УДК 534.3 (0.45)

ФУНКЦІЯ ГРІНА КОНВЕКТИВНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА ДЛЯ ЖОРСТКОСТІННОЇ ТРУБИ

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ

aobor@ukr.net

Побудовано функцію Гріна тривимірного рівняння Гельмгольца для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби і є періодичною по азимутальній координаті та симетричною відносно осьового перерізу труби, в якому розташоване точкове джерело. Крім цього, в ній у явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції Гріна відносно поперечного перерізу труби, де знаходиться точкове джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на зазначену функцію зменшується, проявляючись, окрім іншого, у зменшенні вказаної її асиметрії. У випадку ж відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно вказаного поперечного перерізу і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

Ключові слова: функція Гріна, конвективне рівняння Гельмгольца, труба, осереднена течія.

Green's function of the three-dimensional Helmholtz equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow is found. This function is written in terms of series of the pipe acoustic modes, and is periodic in the azimuthal co-ordinate and symmetric about the pipe axial section of the point source location. Apart from this, the mean flow effects are directly reflected in the function. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the Green's function asymmetry about the pipe cross-section where the point source is located. And vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of the effects and, in particular, the decrease of the indicated asymmetry of the function. In the case of mean flow absence the obtained Green's function is symmetric about the indicated cross-section and coincides with the corresponding Green's function for the investigated pipe, which is available in the scientific literature.

Keywords: Green's function, convective Helmholtz equation, pipe, mean flow.

Вступ

Дослідження акустичних полів у трубах є актуальною проблемою у літако- та автомобілебудуванні, комунальному господарстві, архітектурі, медицині, нафтогазовій промисловості тощо [1–3]. Її розв'язок, незалежно від типу труб й акустичних джерел у них, у принципі можна одержати за допомогою одного і того самого підходу — методу функцій Гріна. Проте доцільність його використання залежить від можливості побудови відповідної функції Гріна — якщо існує принципова можливість побудови останньої, то його використання є доцільним і навпаки.

Зазначена можливість, окрім майстерності й кваліфікації вченого, залежить від багатьох факторів. Це геометрія досліджуваної труби та форма її поперечного перерізу, фізичні властивості її стінок та умови її закріплення, фізичні властивості внутрішнього та зовнішнього середовищ, акустичні умови на кінцях труби та наявність або відсутність течії в ній тощо. Як показує аналіз наукової літератури, з-поміж випадків, які визначаються різними комбінаціями цих факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченної прямої жорсткостінної труби кругової та прямокутної форм поперечного перерізу [1; 3–10].

Для цих випадків побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також з їх допомогою одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами у зазначених трубах. Проте зазвичай усі ці результати не враховують наявність течії в трубі. Якщо ж течія все-таки і розглядається, то її вплив на відповідні функції Гріна та/або кінцеві результати проявляється лише у неявному вигляді[1] [1; 4; 7–10].

У даній роботі цей недолік частково виправляється. Тут будується функція Гріна рівняння Гельмгольца для нескінченної прямої нерухомої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Одержані при цьому результати мають явну залежність від параметрів течії, а в разі її відсутності — збігаються з відповідними результатами для зазначеної труби, які є в науковій літературі [1; 6—10].

Постановка задачі

Розглядається нескінченна пряма нерухома жорсткостінна труба кругового поперечного перерізу радіуса a, в якій з осередненою осьовою швидкістю U тече рідина[2]. У трубі задані довільним чином розподілені акустичні джерела різної природи, котрі генерують у ній звукове поле. Це поле описується тривимірним *конвективним* хвильовим рівнянням[3], яке в циліндричній системі координат (r, φ, z) має такий вигляд [7–10]:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2 p_a}{dt^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p_a}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p_a}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial z^2} = \gamma\,; \quad (1)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + U^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2c_0 M\frac{\partial^2}{\partial t \partial z} + c_0^2 M^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,;$$

$$0 \le r \le a\,;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,;\quad |z| < \infty\,;\quad |t| < \infty\,.$$

Образ Фур'є рівняння (1) у частотній області

$$\nabla^2 \breve{p}_a + k_0^2 \breve{p}_a + i2k_0 M\frac{\partial \breve{p}_a}{\partial z} - M^2\frac{\partial^2 \breve{p}_a}{\partial z^2} = \breve{\gamma}\,; \quad (2)$$

$$0 \le r \le a\,;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi\,;\quad |z| < \infty\,;\quad |\omega| < \infty\,.$$

описує довільну частотну компоненту зазначеного поля [7–10] і називається тривимірним *конвективним* рівнянням Гельмгольца[3]. Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (2) для досліджуваної труби [у рівняннях (1) і (2) p_a та $\breve{p}_a$ є відповідно акустичним тиском та його частотним образом Фур'є; c_0 — швидкістю звуку в незбуреній рідині; t — часом; γ — функцією, котра описує сумарний розподіл вищевказаних джерел; $\breve{\gamma}$ — її частотним образом Фур'є; $M = U / c_0$ — числом Маха течії; $k_0 = \omega / c_0$ — акустичним хвильовим числом; а ω — коловою частотою].

Функція Гріна

Функція Гріна $\tilde{G}$ рівняння (2) для досліджуваної труби задовольняє рівняння[4]

$$\nabla^2 \tilde{G} + k_0^2 \tilde{G} + i2k_0 M\frac{\partial \tilde{G}}{\partial z} - M^2\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial z^2} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{r}\delta\ r - r_0\ \ \delta\ \varphi - \varphi_0\ \ \delta\ z - z_0\ , \quad (3)$$

(де $\delta(...)$ — дельта-функція Дірака) і описує акустичний тиск у точці (r, φ, z), який генерується в трубі на частоті ω джерелом, розташованим у точці (r_0, φ_0, z_0). Крім цього, $\tilde{G}$ повинна мати нульову радіальну похідну на нерухомій жорсткій стінці труби:

$$\left.\frac{\partial \tilde{G}}{\partial r}\right|_{r=a} = 0\,, \quad (4)$$

задовольняти умову випромінювання у нескінченність[5], а також бути періодичною по кутовій координаті φ:

---

[1] У явному вигляді (тобто у вигляді явних математичних залежностей досліджуваних характеристик акустичних полів від параметрів течії) ці ефекти проявляються лише у відповідних масштабних законах та різного роду кількісних оцінках.

[2] Тут не вводяться ні масова густина рідини, ні її в'язкість. Причина такого кроку полягає в тому, що у сформульованій таким чином задачі перша характеристика рідини відобразиться у кінцевому результаті лише у неявному вигляді (через наперед задану швидкість звуку в незбуреному середовищі), тоді як друга — взагалі не відіграватиме ніякої ролі (бо вважається, що згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі [1; 3–10]).

[3] Наявність терміна *конвективне* у назві цього рівняння зумовлена тим, що воно містить залежні від числа Маха доданки, які з'являються внаслідок існування відмінної від нуля *конвективної* похідної $U\partial / \partial z$. У разі відсутності осередненої течії ($U = 0 \;\Rightarrow\; M = 0$) конвективна похідна зникає, і обговорюване рівняння співпадає зі своїм класичним аналогом

[4] У науковій літературі трапляються різні константи у правих частинах рівнянь для відповідних функцій Гріна [наприклад, ± 1, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, $\pm 1/(2\pi)$], що зумовлено переважно різними формами запису вибраних авторами перетворень Фур'є. Проте це не має принципового значення для кінцевого результату, оскільки побудовані при цьому відповідні функції Гріна відрізнятимуться між собою лише сталими множниками, а розв'язки ж задач, одержані на основі цих функцій Гріна, збігатимуться.

$$\tilde{G}\Big|_{\varphi=\varphi_*+2n\pi}=\tilde{G}\Big|_{\varphi=\varphi_*},\quad n=\pm 1,\pm 2,... \qquad (5)$$

і симетричною відносно осьового перерізу труби $\varphi=\varphi_0$, в якому знаходиться зазначене джерело:

$$\tilde{G}\Big|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi}=\tilde{G}\Big|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi},\quad \Delta\varphi>0. \qquad (6)$$

Аргументи ж функції $\tilde{G}$ мають змінюватися у таких межах:

$$0\le r, r_0\le a,\quad 0\le\varphi,\varphi_0\le 2\pi,\quad |z|<\infty,$$
$$|z_0|<\infty,\quad |\omega|<\infty.$$

Сформульована гранична задача (3) – (6) розв'язується через представлення шуканої функції Гріна у вигляді ряду по акустичних модах труби $\Psi^{(1)}_{nm},\Psi^{(2)}_{nm}$:

$$\tilde{G}(r,\varphi,z,r_0,\varphi_0,z_0;\omega)=$$
$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{G}^{(j)}_{nm}(z,r_0,\varphi_0,z_0;\omega)\Psi^{(j)}_{nm}(r,\varphi); \qquad (7)$$
$$\Psi^{(1)}_{nm}(r,\varphi)=J_n(\alpha_{nm}r)\cos(n\varphi);$$
$$\Psi^{(2)}_{nm}(r,\varphi)=J_n(\alpha_{nm}r)\sin(n\varphi),$$

в якому J_n є циліндричними функціями Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm}=\zeta_{nm}/a$ — радіальними хвильовими числами; ζ_{nm} — коренями рівняння

$$J_n'(\zeta_{nm})=0;\quad m=1,2,...,$$

а $\Psi^{(2)}_{0m}\equiv 0$. Вибране представлення функції $\tilde{G}$ тотожно задовольняє умову (4), а його невідомі коефіцієнти $\tilde{G}^{(j)}_{nm}$ — одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца[3]

$$1-M^2\ \frac{\partial^2\tilde{G}^{(j)}_{nm}}{\partial z^2}+k^2_{nm}\tilde{G}^{(j)}_{nm}+i2k_0M\frac{\partial\tilde{G}^{(j)}_{nm}}{\partial z}=$$
$$=-\frac{1}{2\pi}\frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0,\varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2}\delta(z-z_0), \qquad (8)$$

$$k_{nm}=\sqrt{k_0^2-\alpha^2_{nm}},\quad |z|<\infty,\quad |z_0|<\infty,$$

яке одержується з рівняння (3) після підстановки туди ряду (7) та подальшого множення одержаного при цьому співвідношення скалярно на моди $\Psi^{(j)}_{nm}$ і врахування ортогональності останніх:

$$\int_0^a\int_0^{2\pi}\Psi^{(j)}_{nm}\Psi^{(l)}_{sq}r dr d\varphi=\begin{cases}\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2,(s,q,l)=(n,m,j),\\ 0,(s,q,l)\ne(n,m,j),\end{cases}$$

$$\left\|\Psi^{(1)}_{nm}\right\|^2=\begin{cases}\pi a^2J_0^2(\alpha_{0m}a), n=0,\\ \dfrac{\pi a^2}{2}J_n^2(\alpha_{nm}a)\left[1-\dfrac{n^2}{\alpha^2_{nm}a^2}\right], n\ge 1,\end{cases}$$

$$\left\|\Psi^{(2)}_{nm}\right\|^2=\begin{cases}0, n=0,\\ \left\|\Psi^{(1)}_{nm}\right\|^2, n\ge 1.\end{cases}$$

Розв'язок рівняння (8) можна одержати з розв'язку класичного одновимірного рівняння Гельмгольца, до якого можна звести (8) шляхом виконання певних математичних операцій. Дійсно, застосування до (8) оберненого часового перетворення Фур'є

$$G^{(j)}_{nm}(z,t;r_0,\varphi_0,z_0,t_0)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}^{(j)}_{nm}(z,r_0,\varphi_0,z_0;\omega)e^{-i\omega(t-t_0)}d\omega$$

приводить до одновимірного конвективного рівняння Кляйна–Гордона[3] для величин $G^{(j)}_{nm}$:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2G^{(j)}_{nm}}{\partial t^2}+2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2G^{(j)}_{nm}}{\partial t\partial z}-\ 1-M^2\ \frac{\partial^2G^{(j)}_{nm}}{\partial z^2}+$$
$$+\alpha^2_{nm}G^{(j)}_{nm}=\frac{\Psi^{(j)}_{nm}\ r_0,\varphi_0}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2}\delta\ z-z_0\ \delta\ t-t_0\ ; \qquad (9)$$

$$|z|<\infty;\quad |z_0|<\infty;\quad |t|<\infty;\quad |t_0|<\infty.$$

Подальше введення в рівнянні (9) безрозмірних змінних

$$Z=\frac{\lambda z}{a},\quad Z_0=\frac{\lambda z_0}{a},\ T=\lambda^{-1}\frac{c_0t}{a}+M\frac{\lambda z}{a},$$
$$T_0=\lambda^{-1}\frac{c_0t_0}{a}+M\frac{\lambda z_0}{a},\quad \lambda=\frac{1}{\sqrt{1-M^2}} \qquad (10)$$

дозволяє прибрати в ньому доданки з числом Маха і звести його до класичного одновимірного аналогу:

$$\frac{\partial^2G^{(j)}_{nm}}{\partial T^2}-\frac{\partial^2G^{(j)}_{nm}}{\partial Z^2}+\alpha^2_{nm}a^2G^{(j)}_{nm}=a^2\frac{\Psi^{(j)}_{nm}\ r_0,\varphi_0}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2}\times$$
$$\times\delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z-Z_0)\right)\delta\left(\frac{\lambda a}{c_0}(T-T_0-M(Z-Z_0))\right); \qquad (11)$$

---

[5] Умова (4) означає рівність нулеві радіальної компоненти акустичної швидкості на стінці труби, тоді як умова випромінювання у нескінченність — відсутність відбиття звуку на кінцях досліджуваної механічної конструкції (на нескінченності)

$$\left|Z\right| < \infty ; \quad \left|Z_0\right| < \infty ; \quad \left|T\right| < \infty ; \quad \left|T_0\right| < \infty .$$

Тоді застосування до рівняння (11) прямого безрозмірного часового перетворення Фур'є

$$\hat{G}^{(j)}_{nm} \;\; Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega \;\; =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^{(j)}_{nm}(Z, T; r_0, \varphi_0, Z_0, T_0) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega \;\, T - T_0} \,\mathrm{d}\;\; T - T_0$$

приводить до вищезгаданого класичного одновимірного рівняння Гельмгольца для нових невідомих функцій $\hat{G}^{(j)}_{nm}$:

$$\frac{\partial^2 \hat{G}^{(j)}_{nm}}{\partial Z^2} + K^2_{nm} \hat{G}^{(j)}_{nm} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \frac{c_0 a}{\lambda} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right), \quad (12)$$

$$\left|Z\right| < \infty , \quad \left|Z_0\right| < \infty ,$$

в якому

$$\Omega = \lambda \frac{\omega a}{c_0} = \lambda k_0 a \qquad (13)$$

є безрозмірною частотою, а

$$K_{nm} = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2_{nm} a^2} = \sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha^2_{nm}}\, a \qquad (14)$$

— безрозмірними осьовими хвильвими числами.

Розв'язок рівняння (12) для нескінченної області має такий вигляд[6] [1; 7–10]:

$$\hat{G}^{(j)}_{nm} = \frac{i c_0}{4\pi K_{nm}} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} e^{iK_{nm}\left|Z - Z_0\right|} . \qquad (15)$$

Можлива й інша, еквівалентна форма представлення розв'язку (15):

$$\hat{G}^{(j)}_{nm} = \frac{i c_0}{4\pi K_{nm}} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} \times$$

$$\times \left[H(Z_0 - Z) e^{-iK_{nm}(Z - Z_0)} + H(Z - Z_0) e^{iK_{nm}(Z - Z_0)} \right],$$

де

$$H(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \ge 0 \end{cases}$$

є функцією Хевісайда.

Якщо проаналізувати операції, які дали змогу перейти від одновимірного конвективного рівняння Гельмгольца (8) до його класичного аналогу (12), то побачимо, що функції $\tilde{G}^{(j)}_{nm}$ та $\hat{G}^{(j)}_{nm}$ зв'язані між собою таким співвідношенням:

$$\tilde{G}^{(j)}_{nm}(z, r_0, \varphi_0, z_0; \omega) =$$

$$= \frac{\lambda a}{c_0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \hat{G}^{(j)}_{nm}(Z, r_0, \varphi_0, Z_0; \Omega) . \quad (16)$$

Тоді врахування у співвідношенні (16) спочатку виразу (15) для функцій $\hat{G}^{(j)}_{nm}$, а потім виразів (10), (13) і (14) для безрозмірних параметрів z, Z_0, Ω і K_{nm} відповідно дозволяє одержати розв'язок рівняння (8):

$$\tilde{G}^{(j)}_{nm} = \frac{i\lambda}{4\pi\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha^2_{nm}}} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} \times$$

$$\times e^{i\,\lambda\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha^2_{nm}}\left|z - z_0\right| - \lambda^2 M k_0 (z - z_0)} . \qquad (17)$$

Підстановка ж коефіцієнтів (17) у ряд (7) приводить до виразу для шуканої функції Гріна тривимірного конвективного рівняння Гельмгольца (2) для досліджуваної труби:

$$\tilde{G} = \frac{\mathrm{i}\lambda}{4\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda^2 M k_0 (z - z_0)} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} \times$$

$$\times \Psi^{(j)}_{nm}(r, \phi) \frac{e^{i\lambda\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha^2_{nm}}\left|z - z_0\right|}}{\sqrt{\lambda^2 k_0^2 - \alpha^2_{nm}}} . \qquad (18)$$

Аналіз співвідношення (18) показує, що функція $\tilde{G}$ розкладається в ряд по акустичних модах труби $\Psi^{(j)}_{nm}$ і, як і має бути [див. (5), (6)], є періодичною по азимутальній координаті φ та симетричною відносно площини $\varphi = \varphi_0$. Крім того, у (18) через числа M і $\lambda = \lambda(M)$ у явному вигляді відображено вплив осередненої течії на функцію $\tilde{G}$. Цей вплив збільшується зі збільшенням числа M, викликаючи, окрім іншого, появу і подальше збільшення асиметрії функції $\tilde{G}$ відносно поперечного перерізу труби $z = z_0$, в якому розташоване точкове джерело, що стоїть у правій частині рівняння (3). Натомість зменшення числа Маха приводить до зменшення впливу течії на функцію $\tilde{G}$, зумовлюючи, зокрема, зменшення зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності осередненої течії ($M = 0$, $\lambda = 1$) функція (18) є симетричною відносно перерізу $z = z_0$ і збігається з функцією Гріна класичного тривимірного рівняння Гельмгольца для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі:

$$\tilde{G}\Big|_{M=0} = \frac{i}{4\pi} \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Psi^{(j)}_{nm}(r_0, \varphi_0)}{\left\|\Psi^{(j)}_{nm}\right\|^2} \times$$

$$\times \Psi^{(j)}_{nm}(r, \phi) \frac{e^{ik_{nm}\left|z - z_0\right|}}{k_{nm}} .$$

---

[6] При одержанні цього розв'язку було взято до уваги умову випромінювання у нескінченність, яку має задовольняти функція $\tilde{G}$.

Висновки

1. Побудовано функцію Гріна тривимірного рівняння Гельмгольца [вираз (18)] для нескінченної прямої нерухомої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з осередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби і є періодичною по азимутальній координаті φ та симетричною відносно площини $\varphi=\varphi_0$ розташування точкового джерела.

2. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти осередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу труби $z=z_0$, в якому розташоване вказане джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу осередненої течії на функцію Гріна (18) зменшується, проявляючись, окрім іншого, у зменшенні зазначеної її асиметрії.

3. У випадку відсутності осередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно перерізу $z=z_0$ і збігається з функцією Гріна класичного тривимірного рівняння Гельмгольца для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

4. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення, котре дозволяє зводити одновимірне конвективне рівняння Гельмгольца (8) до його класичного одновимірного аналогу (12), і на основі відомого розв'язку останнього одержувати розв'язок першого рівняння.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Борисюк А. О.* Генерація шуму обмеженою областю турбулентної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу / А. О. Борисюк // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2010. — №1. — С. 35–41.

2. *Berger S. A.* Flows in stenotic vessels / S. A. Berger, L.-D. Jou // Ann. Rev. Fluid Mech. — 2000. — 32. — P. 347–382.

3. *Вовк И. В.* Особенности движения среды в каналах со стенозами / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. С. Малюга // Прикл. гідромеханіка. — 2009. — 11, № 4. — С. 17–30.

4. *Davies H. G.* Aerodynamic sound generation in a pipe / H. G. Davies, J. E. Ffowcs Williams // J. Fluid Mech. — 1968. — 32, № 4. — P. 765–778.

5. *Doak P. E.* Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern / P. E. Doak // J. Sound Vibr. — 1973. — 31, № 1. — P. 1–72.

6. *Morse P. M.* Methods of theoretical physics / P. M. Morse, H. Feshbach. — New York : McGraw-Hill, 1953. — Vol. 1. — 997 p.

7. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions / M. S. Howe. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. — 560 p.

8. *Crighton D. G.* Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes / D. G. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, M. Heckl, F. G. Leppington. — London: Springer-Verlag, 1992. — 738 p.

9. *Грінченко В. Т.* Основи акустики / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. — К. : Наук. думка, 2007. — 640 с.

10. *Голдстейн М. Е.* Аэроакустика. / М. Е. Голдстейн. — М. : Машиностроение, 1981. — 294 с.

Стаття надійшла до редакції 03.10.2012.