УДК 512.972

ПРОЦЕСОР НЕЧІТКОЇ МАТЕМАТИКИ НА ОСНОВІ ТЕНЗОРНИХ МОДЕЛЕЙ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Мінаєв Ю.М., Апонасенко Д.В., Гончарова Є.О., Кублій О.А.

Національний авіаційний університет

minaev@rambler.ru

Розглянуто питання представлення невизначеності (у т. ч. невизначеності, яка моделюється у формі нечітких множин) у вигляді головних тензорів парних рангів і їхніх інваріантів. У середовищі MatLab розроблений віртуальний процесор, що дає змогу виконати операції нечіткої математики у просторі нечітких чисел і змінних і тензорних інваріантів.

We review the questions of presentation of uncertainty (including uncertainties, modelling in the form of fuzzy sets) in the manner of main tensors of even ranks and their invariants in the medium of MatLab virtual processor, allowing execute operations fuzzy mathematics in the space of fuzzy number and variable and tensor invariants is designed.

Вступ

Різноманіття типів і форм невизначеності змушує шукати нові методи керування і прийняття рішень в умовах невизначеності. Вважають, що успіхи в цьому напрямку можуть бути досягнуті на шляху застосування інтелектуальних методів і технологій. У даний час різноманіття типів і форм невизначеності практично зведене до одного — невизначеності, що подається згідно Л. Заде [1] у вигляді нечітких множин (НМ), що дозволяють за допомогою поняття «функція належності» (ФН) дати об'єктивне представлення суб'єктивним твердженням і оцінюванням.

Постановка завдання

Вирішення завдань в умовах невизначеності на основі інтелектуальних технологій (ІТ) сьогодні зв'язують з м'якими обчисленнями (МО — *soft computing*) і обчислювальним інтелектом. Ці галузі науки як напрямок розвитку штучного інтелекту термінологічно споконвічно пов'язують з працями Л. Заде [1; 2]. На території СНД основні результати досліджень, зв'язаних із МВ (розглянутих у комплексі з м'якими вимірами), викладені в роботах Д. Поспєлова, А. Аверкіна, С. Прокопчиної та ін. [3]. Огляд результатів цих досліджень наведений у праці [3], де відзначається, що головний принцип МО допускає толерантність до недостатньої точності, істинності заради можливості прозорої інтерпретованості рішення і його невисокої вартості. Головною причиною, що викликає використання ІТ (у т.ч. МО), є те, що переважна більшість сучасних завдань керування, зв'язаних із прийняттям рішень, повинні враховувати наявність складної інформаційної ситуації, особливістю якого є винятково висока апріорна невизначеність про властивості об'єкта і вплив навколишнього середовища, неможливість безпосереднього спостереження і виміру основних параметрів об'єкта чи велика неточність і неповнота апріорної інформації.

Тензорний підхід до моделювання невизначеностей. Не торкаючись аналізу НМ як філософської категорії в загальному понятті «невизначеність», відзначимо ту безперечну обставину, що НМ як модель невизначеності в цілому ряді випадків не дає змоги оцінити об'єкт адекватно, тому що невизначеність — це складніший об'єкт (категорія), ніж його модель у вигляді НМ. Однією з характерних рис моделювання невизначеності у вигляді НМ є те, що той самий об'єкт різними експертами може бути представлений природно, суб'єктивно по-різному, апарату, що дає змогу цю суб'єктивність уніфікувати, не існує.

У працях Г. Крона [4], що не стосуються прямо невизначеності, було показано, що пред-ставлення об'єкта дослідження (виміру) у вигля-ді тензора є більш адекватним, ніж представ-лення у вигляді величини. Тензорна модель, розглянута як матрична проекція, дає можливість аналізувати об'єкт у різних системах координат, тобто експертні оцінювання об'єкта розгляда-ються як той самий об'єкт у різних системах координат, відповідність між цими системами координат, що характеризуються тензорами, може бути встановлена за допомогою т. зв. «тензора приєднання», що допомагає погодити і зв'язати різні точки зору. Не виключено, що розмаїтість точок зору — це розмаїтість систем координат, будучи приведеними до однієї системи, ці різноманітні, на перший погляд, точки зору виявляться адекватними. Можна думати, що умови невизначеності — *різні* у різних базисах, можуть привести до того, що у визначеному базисі система може бути частково (чи цілком) визначеною. Нагадаємо, що в контексті роботи базис — це точка зору чи стан досліджуваного об'єкта.

Особливістю тензорної моделі об'єкта є те, що при зміні координат компоненти тензора змінюються, хоча властивості тензора залишаються інваріантними. Для симетричного тензора існує можливість такого повороту координат, що елементи тензора скорочуються до діагональної форми. Очевидно, що діагональна форма значно простіша для аналізу і, як буде показано далі, є однією з властивостей НМ — його дефадзифікацією (представлення в чіткій формі).

Властивості тензора, що залишаються незмінними при перетвореннях координат, визначаються системою його *інваріантів*, що являють собою константи, значення яких зберігаються при зміні системи координат, деякі з них залежать від коефіцієнтів характеристичного рівняння. Величини головних інваріантів можуть бути визначені через власні значення, число головних інваріантів для тензора рангу r визначається виразенням $r + 1$, у загальному випадку число незалежних інваріантів набагато більше, воно визначається розкладанням головного тензора на систему приєднаних тензорів. Наприклад, для тензора 2-го рангу в загальному випадку існує вісім незалежних інваріантів.

Представлення нечіткої змінної у вигляді тензора (тензор-змінна). Тензори являють собою фізичний стан інформації, що залежна від обраної координатної системи, у якій вона вимірюється чи відтворюється. Зазначимо, що в даному контексті система координат не є завжди системою координат у математичному розумінні, а означає точку зору чи спосіб одержання (обробки) інформації. Залежно від властивостей, які потрібно підкреслити, тензор може бути еквівалентно визначений, як множина компонентів, що підкоряються специфічним трансформаційним правилам при зміні системи координат (точка зору окремого індивіда (експерта), що, зокрема, виявляється у призначенні ФН), як геометричний об'єкт, що має визначені властивості, які залишаються інваріантними в різних системах координат чи як лінійна або полілінійна форма на інших тензорах [5].

Згортання тензорів. Нехай A — тензор типу (p, q), $p > 0$ і $q > 0$. У кожної координати $a^{k_1 \ldots k_q}_{i_1 \ldots i_p}$ тензора A виділимо m-*й* верхній індекс ($1 \le m \le q$) і n-й нижній індекс ($1 \le n \le$ p). Виконаємо підсумовування (згортання) координат тензора з однаковими виділеними індексами з номерами m і n (ми скористалися тут угодою про підсумовування). Доведено, що отримані числа $\{ a^{k_1 \ldots \alpha \ldots k_q}_{i_1 \ldots \alpha \ldots i_p} \}$ утворять тензор типу (p–1, q–1), тобто згорта понизило ранг тензора на 2.

Діадне представлення НЗ(НЧ). Діада природно відповідає представленню НЧ(НЗ) у формі «значенння (1-й вектор)/ФН (2-й вектор)» $\tilde{x} = \{x/\mu\} = \{x_i/\mu_i\},\ i = 1,2, \ldots, n$.

Наприклад, трикутна ФН у нотації *MatLab* має форму *TRIMF (X, PARAMS)*, де *PARAMS* = [*A B C*] моделює (представляє) 3-елементний вектор, що визначає крайні точки ФН, $A \le B \le C$. Як відомо, загальний вигляд діади $x \otimes \mu$, де символ «$\otimes$» означає діадний добуток.

Діада між двома векторами x і μ — це абстрактна математична конструкція, що визначається як $x \otimes \mu$ і має сенс, якщо вона використовується в операціях з будь-яким довільним вектором v: $(x \otimes \mu) \bullet v = x(\mu \bullet v)(\forall x)$. У загальному випадку для діади не має місця комутативність, тобто $x \otimes \mu \ne \mu \otimes x$. Однак у нашому випадку, це не має принципового значення, тому що тензори, зв'язані з діадами, мають абсолютно однакові інваріанти, $Inv(x \otimes \mu)$ = $= Inv(\mu \otimes x)$. Для спрощення беруть $x \otimes \mu = \mu x$.

Сформуємо нову підмножину, що назвемо тензор-підмножиною **A** множини **E**, утворивши її у вигляді матриці шляхом реалізації тензорного добутку вектор-рядка $a = \{a_j\}$ і вектора-стовпця $\mu_{\tilde{A}}(x) = \{\mu^j{}_{\tilde{A}}\}$, $j = 1, n$; НЗ $\tilde{a} = \{a_i/\mu_i^a\}, i = 1, n;$

$$T_{\tilde{A}} = a \bullet \mu_{\tilde{A}}(x),$$

де $\bullet$ — знак тензорного добутку, $T_{\tilde{A}} = [t^j_i]$, i, j =1, n.

Тензор, утворений у зазначений спосіб, є діадним тензором 2-го рангу і має вигляд:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \frac{\tilde{a}}{\mu^a}$$

$$\begin{pmatrix} a_1\mu_1^a & a_1\mu_2^a & \ldots & a_1\mu_n^a \\ a_2\mu_1^a & a_2\mu_2^a & \ldots & a_2\mu_n^a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n\mu_1^a & a_n\mu_2^a & \ldots & a_n\mu_n^a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ . \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$$T_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} a_1\mu_1^a & a_1\mu_2^a & \ldots & a_1\mu_n^a \\ a_2\mu_1^a & a_2\mu_2^a & \ldots & a_2\mu_n^a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n\mu_1^a & a_n\mu_2^a & \ldots & a_n\mu_n^a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = \left[t^a_{ij} \right]^{j=1,n}_{i=1,n},$$

$$T_{\tilde{A}} \to T^D_{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & t_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix} = \left[t^a_{ij} \right]^{j=1,n}_{i=1,n},$$

де $t_{ij} = a_i\mu_j^a$, $T_{\tilde{A}}$, $T^D_{\tilde{A}}$ — повна і діагональна матриці, що відповідають НЗ.

Тензор-змінну можна розглядати для арифметичних операцій як $n \times n$ — матрицю, для якої арифметичні операції над НЧ (НЗ) мають матричні аналоги, тобто $\tilde{a} *_f \tilde{b} \to T_{\tilde{A}} *_f T_{\tilde{B}}$ (для повних матриць) чи $T^D_{\tilde{A}} *_f T^D_{\tilde{B}}$ (для діагональних), де $*_f \in \{+, -, *, /\}$, і як множину елементів $\{t_{ij}\} = \{a_i\mu_j^a\}$, отриманих шляхом читання матриці по рядках чи стовпцях, і в такий спосіб реалізувати теоретико-множинні операції. Відзначимо, що теоретико-множинні операції можуть бути реалізовані аналогічно над множинами, отриманими в результаті обчислення діагоналей тензор-змінних.

Теоретико-множинні операції для тензор-змінних виконуються над множинами, що являють сбою порядкове чи постовпчикове розкладання відповідних матриць.

Операції *вкладеності* для НМ $\tilde{A},\tilde{B}-\tilde{A}\subset\tilde{B}$, якщо $\forall x \in \mathbf{E}$: $\mu_{\tilde{A}}(x)\le\mu_{\tilde{B}}(x)$, для тензорів-множин, породжених НМ $\tilde{A},\tilde{B}-T_{\tilde{A}}$ і $T_{\tilde{A}}$, відповідно, виконуються $I_0^{T_A}\le I_0^{T_B}$, де $I_0^{T_A}, I_0^{T_B}$ — нульові інваріанти тензорів $T_{\tilde{A}}$ і $T_{\tilde{B}}$ відповідно.

Перетинання НМ $\tilde{A},\tilde{B}-\tilde{A}\subset\tilde{B}$, якщо $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x)=\min\ \mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)$: $\forall x\in\mathbf{E}$, для тензорів-множин, породжених НМ $\tilde{A},\tilde{B}-T_{\tilde{A}}$ і $T_{\tilde{A}}$ відповідно також можна визначити $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}=\min(T_{\tilde{A}},T_{\tilde{A}})$; *об'єднання* НМ $\tilde{A},\tilde{B}-\tilde{A}\subset\tilde{B}$, якщо $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\max\ \mu_{\tilde{A}}(x),\ \mu_{\tilde{B}}(x)$: $\forall x \in \mathbf{E}$, для тензорів-множин, породжених НМ $\tilde{A},\tilde{B}-T_{\tilde{A}}$ і $T_{\tilde{A}}$ $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}=\max(T_{\tilde{A}},T_{\tilde{A}})$.

Відзначимо, що елементи $x^p/\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x)$ й $x^0/\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x)$ еквівалентні $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}$ й $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}$ у тому значення, що для НМ з унімодальної (зокрема, трикутної) ФН $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}= \ =x^p*\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x)$ і $T_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}=x^0*\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x)$

Алгебричний добуток і сума двох тензор-множин можуть бути визначені, якщо врахувати, що тензорний добуток $\mu_{\tilde{A}}(x)\bullet x\ne x\bullet\mu_{\tilde{A}}(x)$, але інваріанти для правої і лівої частин однакові. Як відомо, алгебричний добуток НМ $\tilde{A},\tilde{B}$, визначається як

$$\tilde{A}\cdot\tilde{B}\to\ \mu_{\tilde{A}\cdot\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\,\mu_{\tilde{B}}(x)\ :\ \forall x\in\mathbf{E}.$$

Для тензор-множин $T_{\tilde{A}}$ і $T_{\tilde{A}}$, отриманих на підставі НМ $\tilde{A},\tilde{B}$ добуток $\tilde{A}\cdot\tilde{B}\to T_{\tilde{A}}\ \ T_{\tilde{A}}$ може бути визначений в такий спосіб:

– тензорний добуток тензорів $T_{\tilde{A}}$, $T_{\tilde{A}}$, результатом є тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів тензорів $T_{\tilde{A}}$, $T_{\tilde{A}}$;

– тензорний добуток тензорів $T_{\tilde{A}}$, $T_{\tilde{B}}$ зі згорткою, результатом є тензор, ранг якого на 2 менше від суми рангів тензорів $T_{\tilde{A}}$, $T_{\tilde{A}}$;

– матричний добуток матриць тензорів $T_{\tilde{A}}$, $T_{\tilde{A}}$.

Кожен добуток дає різний результат, доцільність використання кожної з процедур визначається окремо.

Таким чином, представлення НЗ у вигляді тензор-змінної дає змогу використовувати матричне і множинне представлення об'єкта, розклавши матрицю ТП по рядках чи по стовпчиках, що істотно розширює можливості вирішення завдань керування, аналізу та обробки інформації в умовах невизначеності в тензорному базисі.

Прикладна реалізація НЗ у тензорному базисі в системі математичного моделювання MatLab. З метою узагальнення результатів розглянемо тензорне представлення НЗ ***приблизно 5***, визначеної на інтервалі [1; 9]: $\tilde{x}=\{x_j/\mu_j^x\}$, j = 1,…,9, яку подамо у вигляді множин, що складаються з 3-х і 9-ти пар «значення-функція належності» відповідно,

x = { 1 5 9}, μ_j^x ={ 0.15 0.95 0.15} — (*а*);

x = { 1 2 3 4 5 6 7 8 9}, μ_j^x={ 0.15 0.35 0.55 0.75 0.95 0.75 0.55 0.35 0.15} — (*б*).

$$Tx=\begin{pmatrix}0.15 & 0.75 & 1.35\\ 0.95 & 4.75 & 8.55\\ 0.15 & 0.75 & 1.35\end{pmatrix},$$

а

$$Tx1=\begin{pmatrix}
0.15 & 0.3 & 0.45 & 0.6 & 0.75 & 0.9 & 1.05 & 1.2 & 1.35\\
0.35 & 0.7 & 1.05 & 1.4 & 1.75 & 2.1 & 2.45 & 2.8 & 3.15\\
0.55 & 1.1 & 1.65 & 2.2 & 2.75 & 3.3 & 3.85 & 4.4 & 4.95\\
0.75 & 1.5 & 2.25 & 3.0 & 3.75 & 4.5 & 5.25 & 6.0 & 6.75\\
0.95 & 1.9 & 2.85 & 3.8 & 4.75 & 5.7 & 6.65 & 7.6 & 8.55\\
0.75 & 1.5 & 2.25 & 3.0 & 3.75 & 4.5 & 5.25 & 6.0 & 6.75\\
0.55 & 1.1 & 1.65 & 2.2 & 2.75 & 3.3 & 3.85 & 4.4 & 4.95\\
0.35 & 0.7 & 1.05 & 1.4 & 1.75 & 2.1 & 2.45 & 2.8 & 3.15\\
0.15 & 0.3 & 0.45 & 0.6 & 0.75 & 0.9 & 1.05 & 1.2 & 1.35
\end{pmatrix}$$

б

Діадний тензор отриманий за допомогою засобів *MatLab* — функція *kron(x, max^T)*, де T — символ транспонування ФН. Нижче наведені результати моделювання: головний тензор-діада для випадків (*а*) і (*б*) має відповідно вигляд, де графічне представлення тензор-змінних наведене на рис. 1.

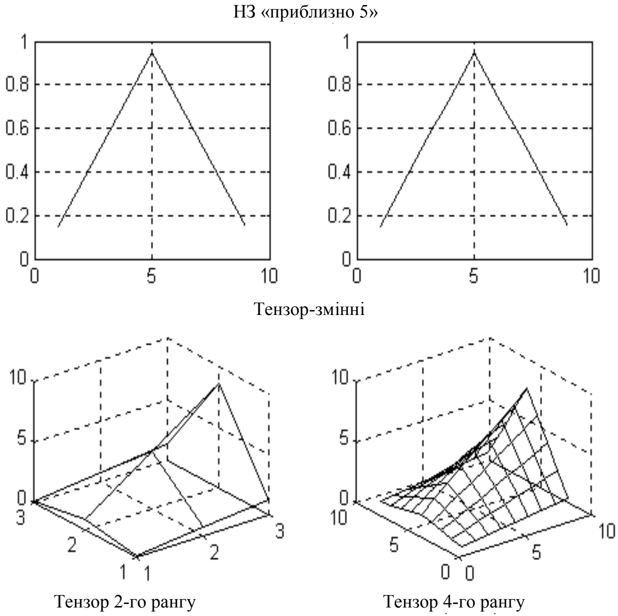

Рис.1. Графічне представлення тензор-змінної (діадний тензор «*приблизно* 5»)

Як випливає з наведених прикладів, у випадку (*а*) НЗ ***приблизно 5*** моделюється тензором 2-го рангу, у випадку (*б*) — тензором 4-го рангу. Тензор шляхом спеціальних перетворень може бути приведений до діагональної форми. Якщо НЗ має вигляд $\tilde{x} = \{x_j / \mu_j^x\}$, то її дефадзифіковане значення $x = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \cdot \mu_j^x \right) / \sum_{j=1}^{n} \mu_j^x$ з точністю до множника $1/\sum_{j=1}^{n} \mu_j^x$ збігається зі слідами матриць Tx і $Tx^д$, $Tx1$ і $Tx^д1$ відповідно.

Таким чином, нечітка множина, розглянута як набір пар «значення / функція належності», чи множина нечітких змінних, може бути структурована шляхом представлення нечіткої змінної у вигляді тензора. Раціонально представляти НЗ у вигляді множини, що складається з 3^n, n = 1,2,... компонент, у цьому випадку маємо діадний тензор, властивості якого добре досліджені, його використання відрізняється визначеною конструктивністю. Головна перевага використання тензор-змінної як моделі невизначеності полягає в такому:

– можливість представлення об’єкта у вигляді 3^n чисел, n = 1, 2, ... дозволяє на підставі принципу екстремальної ентропії «призначити» функцію належності, що об’єктивно відбиває «значимість» елемента у складі об’єкта;

– тензорне моделювання невизначеності дає змогу істотно розширити множину визначених властивостей, який характеризується об’єкт, тому що тензор допускає розкладання на групу т. зв. «приєднаних тензорів», що дає можливість додаткової інформованості про об’єкт;

– властивості тензора — наявність інваріантів, що однозначно характеризують його, можливість згортання тензора — дадуть змогу підвищити конструктивність арифметичних операцій, виконуваних у системі нечітких змінних.

Висновки. У загальному випадку невизначеність, що моделюється у формі нечіткої множини, є складнішим об’єктом і її раціонально моделювати за допомогою тензорів.

Тензорні моделі нечітких змінних («значення/функція належності») дають змогу визначити додаткові характеристики невизначеності.

Можливість згортань тензорів високих рангів і однозначне подання тензора за допомогою його інваріантів дають можливість спростити роботу з нечіткими змінними при оцінюванні.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений / Л.А. Заде. — М.: Мир, 1976. — 165 с.

2. *Zade L.A.* Fuzzy logic, neural networks and soft computing // Communications of the ACM. — 1994. — Vol. 37, № 3. — P. 77—84.

3. *Аверкин А.Н., Прокопчина С.В.* Мягкие вычисления и измерения // Интеллектуальные системы, т. 2, вып. 1—4, 1997. — С. 94—113.

4. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей / Г. Крон. — М.: Мир, 1978. — 720 с.

5. *Гельфанд И.М.* Курс лекций по линейной алгебре. 3-изд. / И.М. Гельфанд. — М.: Наука, 1966. — 280 с.

6. *Минаев Ю.Н., Филимонова О.Ю.* Тензорный базис в концепции нечеткости и формальных методах. // В кн. «Материалы 10-й международной конференции по автоматическому управлению». — Севастополь, 15—19 сентября 2003 г. — С. 154—156.

7. *Минаев Ю.Н., Филимонова Ю.Н.* Тензорный базис как основа новых алгоритмов решения задач управления в условиях неопределенности // Новые информационные технологии: сб. трудов VI Всерос. науч.-техн. конфер. (Москва, 23—24 апреля 2003 г.). У 2 кн. Т. 1 / под общ. ред. А.П. Хныкина. — М.: МГАПИ, 2003. — С. 142—147.

Стаття надійшла до редакції 19.05.09