УДК 511.11(045)

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ ЛОГАРИФМІЧНОЇ ЩІЛЬНОСТІ РОЗРЯДНИХ ПОЛІВ СИСТЕМ ЧИСЛЕННЯ ІЗ ДВІЙКОВИМ АЛФАВІТОМ

А. Я. Білецький, д-р техн. наук, проф.

Національний авіаційний університет

abelnau@ukr.net

Наведено асимптотичні оцінки логарифмічної щільності розрядних полів для факторіальної і фібоначчійової систем числення із двійковою формою подання вагових коефіцієнтів чисел.

Ключові слова: системи числення, логарифмічна щільність, двійковий алфавіт.

Give asymptotic estimates for the logarithmic density of bit fields for the factorial and Fibonacci number system to binary form, a number of weights.

Keywords: number systems, logarithmic density, the binary alphabet.

Вступ й постановка задачі

Історія розвитку дискретної математики й обчислювальної техніки безпосередньо пов’язана з розробкою і впровадженням усе більш нових принципів подання й кодування цифрової інформації, основу яких становлять *системи числення чисел*. Під «системою числення» [1] розуміють такий спосіб зображення множини чисел за допомогою обмеженого набору символів, що утворюють її *алфавіт*, при якому ці символи (елементи алфавіту) розміщуються у встановленому порядку, займаючи певні місця (позиції). Будь-яка система числення повинна мати у своєму складі кінцеву множину невід’ємних чисел — *діапазон*, який вона кодує [2]. У позначену множину обов’язково входить число 0 і далі йдуть числа натурального ряду, починаючи з 1. Існують різноманітні системи числення (а також способи їх класифікації), кількість яких невпинно зростає. Всі системи числення можна розділити на такі основні класи: позиційні, непозиційні та змішані.

У *позиційних* системах числення числовий знак (*цифра*) у записі числа має різні значення залежно від того місця (розряду), де він розташований. Під позиційною системою числення зазвичай мається на увазі p-на система числення, що визначається цілим числом $p > 1$, так званою *основою* системи числення. Число x у p-ій системі числення подається у вигляді кінцевої лінійної комбінації ступенів числа p:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p^k \,, \qquad (1)$$

де α_k — цілі числа, що задовольняють нерівності $0 \le \alpha_k \le (p-1)$; n — число розрядів числа.

Найпростішими прикладами позиційних систем можуть слугувати двійкова, десяткова та інші системи числення.

У *непозиційних* системах числення величина, що позначає цифра, не залежить від положення цифри в числі. При цьому система має накладати обмеження на положення цифр, наприклад, щоб вони були розміщені в порядку убування. До непозиційних систем відносять римську, біноміальну й ряд інших систем.

Змішана система числення є узагальненням p-ої системи й найчастіше належить до позиційних систем числення. Основою змішаної системи числення є зростаюча послідовність чисел p_k, $k = 1, 2, \ldots$, і кожне число x представляється як лінійна комбінація:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k p_k \,,$$

де на коефіцієнти α_k накладаються деякі обмеження.

Одним з відомих прикладів змішаної системи є *факторіальна* система числення, у якій основою є послідовність факторіалів $p_k = k!$, і кожне натуральне число x наводиться у вигляді:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k k!, \quad 0 \le \alpha_k \le k. \qquad (2)$$

Іншою змішаною системою числення, яка часто застосовується, є *фібоначчійова* система, що ґрунтується на числах Фібоначчі,

$$F_{k+2} = F_{k+1} + F_k \,; \qquad F_1 = F_2 = 1$$

при цьому

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k F_k, \quad \alpha_k \in \{0, 1\}. \qquad (3)$$

У довільній системі числення ціле позитивне число x зображується послідовністю символів

$$[x] = \alpha_n \alpha_{n-1} \ldots \alpha_k \ldots \alpha_2 \alpha_1, \qquad (4)$$

де $[x]$ — подання числа в цій системі числення, причому кожний символ α_k у загальному випадку займає r_k біт (якщо використовується двійковий алфавіт).

У табл. 1 наведено приклади зображення чисел у факторіальній і фібоначчійовій системах числення.

Таблиця 1

Двійкове подання десяткових чисел

k	$[x_k]_{Fakt}$	$[x_k]_{Fibon}$	k	$[x_k]_{Fakt}$	$[x_k]_{Fibon}$	k	$[x_k]_{Fakt}$	$[x_k]_{Fibon}$
1	1	1	31	101001	10100100	61	1010001	1000010001
2	10	100	32	101010	10101000	62	1010010	1000010100
3	11	1000	33	101011	10101001	63	1010011	1000100000
4	100	1001	34	101100	100000000	64	1010100	1000100001
5	101	10000	35	101101	100000001	65	1010101	1000100100
6	1000	10001	36	110000	100000100	66	1011000	1000101000
7	1001	10100	37	110001	100001000	67	1011001	1000101001
8	1010	100000	38	110010	100001001	68	1011010	1001000000
9	1011	100001	39	110011	100010000	69	1011011	1001000001
10	1100	100100	40	110100	100010001	70	1011100	1001000100
11	1101	101000	41	110101	100010100	71	1011101	1001001000
12	10000	101001	42	111000	100100000	72	1100000	1001001001
13	10001	1000000	43	111001	100100001	73	1100001	1001010000
14	10010	1000001	44	111010	100100100	74	1100010	1001010001
15	10011	1000100	45	111011	100101000	75	1100011	1001010100
16	10100	1001000	46	111100	100101001	76	1100100	1010000000
17	10101	1001001	47	111101	101000000	77	1100101	1010000001
18	11000	1010000	48	1000000	101000001	78	1101000	1010000100
19	11001	1010001	49	1000001	101000100	79	1101001	1010001000
20	11010	1010100	50	1000010	101001000	80	1101010	1010001001
21	11011	10000000	51	1000011	101001001	81	1101011	1010010000
22	11100	10000001	52	1000100	101010000	82	1101100	1010010001
23	11101	10000100	53	1000101	101010001	83	1101101	1010010100
24	100000	10001000	54	1001000	101010100	84	1110000	1010100000
25	100001	10001001	55	1001001	1000000000	85	1110001	1010100001
26	100010	10010000	56	1001010	1000000001	86	1110010	1010100100
27	100011	10010001	57	1001011	1000000100	87	1110011	1010101000
28	100100	10010100	58	1001100	1000001000	88	1110100	1010101001
29	100101	10100000	59	1001101	1000001001	89	1110101	10000000000
30	101000	10100001	60	1010000	1000010000	90	1111000	10000000001

Нехай

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} r_k = \sum_{k=1}^{n} [\alpha_k] \qquad (5)$$

є сумарне число розрядів (біт), за допомогою яких записуються всі символи α_k правої частини зображення (4). У формулі (5) позначення $[\alpha_k]$ відповідає числу двійкових розрядів r_k, необхідних для подання вагового коефіцієнта α_k. Назвемо l_n *інтервалом* двійкового подання *n*-розрядного числа в деякій системі числення.

Позначимо через L_n *діапазон* чисел (їхня максимальна кількість, включаючи 0), що у тій або іншій системі може бути представлено l_n двійковими розрядами. Уведемо міру

$$\rho_n = \log_2(L_n)/l_n = \lg L_n / l_n, \qquad (6)$$

і назвемо її *логарифмічною щільністю розрядного поля* (або просто — *щільністю*) системи числення.

Зокрема, для класичної двійкової системи, утвореної рядом (1) для $p = 2$, маємо $L_n = 2^n$ й

$l_n = n$. Відповідно до виразу (6) одержимо $\rho_n = 1$. Це єдина зі згаданих вище систем числення з таким (максимальним) значенням щільності розрядного поля.

Основна задача, що розглядається в даній роботі, полягає у визначенні асимптотичних оцінок логарифмічної щільності ρ_n для факторіальної й фібоначчійової систем числення із двійковою формою подання вагових коефіцієнтів основ систем.

Факторіальна система числення

Ціле позитивне число x у факторіальній системі числення згідно з (2) можна представити виразом

$$x = \alpha_n \cdot n! + \alpha_{n-1} \cdot (n-1)! + \ldots + \alpha_k k! \times \times + \ldots + \alpha_2 \cdot 2! + \alpha_1 \cdot 1!, \quad (7)$$

де $k = 1, 2, \ldots, n; \quad 0 \le \alpha_k \le k.$

Співвідношення (7) називається *нумераційною* (або *числовою*) функцією [3]. Максимальне число у факторіальній системі, що з'являється коли, $\alpha_k = k$, має вигляд:

$$x_{\max} = (n+1)! - 1. \quad (8)$$

Підтвердимо рівність (8) на простому прикладі, поклавши $n = 2$. Маємо

$$2 \cdot 2! + 1 \cdot 1! = \left[(2+1) - 1\right] \cdot 2! + \left[(1+1) - 1\right] \cdot 1! = = \cdot 2! - 1 \cdot 2! + 2 \cdot 1! - 1 \cdot 1! = 3! - 1.$$

Діапазон факторіальних чисел L_n обчислюється за формулою:

$$L_n = x_{\max} + 1 = (n+1)!. \quad (9)$$

Тим самим при визначенні діапазону чисел враховується, крім максимального числа, ще й нуль.

Наведемо оцінку числа двійкових розрядів, необхідних для подання вагових коефіцієнтів α_k факторіального ряду (2). Маємо

$$[\alpha_1] = 1; \ \left([\alpha_2], [\alpha_3]\right) = 2; \ \left([\alpha_4] - [\alpha_7]\right) = 3;$$
$$\left([\alpha_8] - [\alpha_{15}]\right) = 4; \ldots$$

Отже,

$$[\alpha_k] = \lfloor \lg k + 1 \rfloor, \quad (10)$$

де $[x]$ — округлення числа x у менший бік (або ціла частина x).

У табл. 2 наведено значення параметрів r_k і l_n для факторіальної системи.

На підставі співвідношень (6), (9) і (10) приходимо до наступного виразу логарифмічної щільності факторіальної системи числення

$$\rho_n = \sum_{k=2}^{n+1} \lg k / l_n. \quad (11)$$

Розраховані за формулою (11) величини ρ_n наведені в табл. 3.

Таблиця 2

Параметри вагових коефіцієнтів факторіальної системи числення

k	1	2-3	4-7	8-15	16-31	32-63	64-127	128-255	256-511	512-1023
r_k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$l_n = l_{k\max}$	1	5	17	49	129	321	769	1793	4097	9217

Таблиця 3

Оцінка логарифмічної щільності факторіальної системи

n	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023
l_n	1	5	17	49	129	321	769	1793	4097	9217
ρ_n	1	0,917	0,900	0,903	0,912	0,922	0,931	0,939	0,945	0,951

Як випливає з табл. 3, асимптотична логарифмічна щільність розрядного поля факторіальної системи числення наближається до щільності класичної двійкової системи.

Фібоначчійова система числення

Коди Фібоначчі є узагальненням поняття класичного двійкового коду [4]. Будь-яке невід'ємне ціле число $x = 0, 1, 2, \ldots$ можна єдиним чином представити у вигляді числової фібоначчійової функції

$$x = \alpha_n F_n + \alpha_{n-1} F_{n-1} + \ldots + \alpha_k F_k + \ldots \alpha_2 F_2 + \alpha_1 F_1, \quad (12)$$

причому послідовність $\{\alpha_k\}$ не містить пар одиниць, що є сусідніми (суміжними).

Це забезпечується еквівалентним перетворенням, що називається операцією «згортки»: $011 \to 100$.

Дана операція створює можливість представити фібоначчійове число в так званій «мінімальній» формі, кодова комбінація якої буде мати мінімальну вагу.

Наведемо приклад, що ілюструє таке перетворення

$$\underline{011}11\underline{011}001 \to 10\underline{011}100001 \to$$
$$\to 10100100001.$$

Підкресленням у цьому прикладі виділені коди, над якими виконані операції «згортки».

Як випливає з прикладу, операції «згортки» призвели до зниження ваги еквівалентної кодової комбінації.

А саме, число одиниць у кінцевому коді виявилося менше, ніж у вхідному коді.

Табл. 1 складена як з урахуванням операції «згортки», так і тотожності

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

Відповідно до іншої тотожності, що є окремим випадком функції (12), коли всі $\alpha_k = 1$, маємо

$$x_{\max} = \sum_{k=1}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$

Отже, діапазон L_n n-розрядних чисел Фібоначчі можна представити у вигляді:

$$L_n = F_{n+2}. \qquad (13)$$

На підставі табл. 1 одержимо (табл. 4) оцінку числа двійкових розрядів r_k коефіцієнтів α_k в (4), необхідних для запису числа F_k. Відповідно до табл. 4 приходимо до висновку, що кількість кодів, які входять у ту або іншу групу, обумовлену параметром k (верхній рядок таблиці), відповідає послідовності чисел Фібоначчі. Крім того, починаючи з $k = 2$, перехід у сусідню групу (праворуч) супроводжується збільшенням на одиницю числа двійкових розрядів, що необхідні для запису F_k послідовністю вагових коефіцієнтів (4).

Логарифмічна щільність фібоначчійової системи числення, відповідно до (6) і (13), визначається виразом

$$\rho_n = \lg F_{n+2} / l_n.$$

У табл. 5 для ряду значень n, що повторюють відповідні значення їх табл. 3, наведені оцінки ρ_n для фібоначчійової системи числення.

Таблиця 4

Число двійкових розрядів, потрібних для запису значення F_k

k	1	2	3-4	5-7	8-12	13-20	21-33	34-54	55-89
r_k	1	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблиця 5

Оцінка логарифмічної щільності фібоначчійовій системи

n	4	5	6	7	8	9
F_{n+2}	8	13	21	34	55	89
l_n	5	6	8	9	10	11
ρ_n	0,600	0,617	0,549	0,565	0,578	0,589

Із зіставлення даних табл. 3 і 5 випливає, що логарифмічна щільність подання чисел у фібоначчійовій системі менше, ніж у факторіальній системі.

Висновки

Підсумовуючи результати досліджень, що викладені у даній статті, можна дійти такого висновку.

Фібоначчійова система числення більш надлишкова порівняно з факторіальною системою.

У силу означеної обставини перша з них (фібоначчійова система) теоретично повинна забезпечувати більшу завадостійкість передачі кодів порівняно із другою (факторіальною) системою.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Лазня Е. Н.* Про особливості побудови систем числення різних класах / Е. Н. Лазня, В. Л. Селиванов // Вісник НТУУ «КПІ» Інформатика, управління та обчислювальна техніка. — № 49, 2008. — С. 68–73.

2. *Борисенко А. А.* Системи числення в обчислювальній техніці / А. А. Борисенко, В. Б. Чередниченко // Вісник Сумду. Серія Технічні науки. — № 4, 2009. — С. 162–177.

3. *Борисенко О. А.* Дискретна математика : підручн. / О. А. Борисенко. — Суми : ВТД «Університетська книга», 2007. — 255 с.

4. *Стахов А. П.* Коды золотой пропорции / А. П. Стахов. — М. : Радио и связь, 1984. — 151 с.

Стаття надійшла до редакції 04.07.2011.