УДК 004.942:519.612(045)

РОЗВ'ЯЗОК НЕЧІТКИХ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРИЧНИХ РІВНЯНЬ У ТЕНЗОРНОМУ БАЗИСІ ЗАСОБАМИ ПММ MATLAB

Мінаєв Ю. М., Філімонова О. Ю., Мінаєва Ю. І., Гончарова Є. О.

Національний авіаційний університет

minaev@rambler.ru

Розглянуто питання розв'язання нечітких систем лінійних алгебричних рівнянь шляхом представлення нечітких параметрів моделі (матриця коефіцієнтів, праві частини) тензорами другого рангу. Показано можливість розв'язання вказаного класу задач на рівні чітких систем блочних лінійних алгебричних рівнянь, де коефіцієнти матриці та праві частини являють собою матриці тензорів другого рангу.

The questions of deciding the fuzzy single-line algebraic equation systems by presentati-ons of fuzzy parameters models (matrix of factors, right parts) by tensors 2 ranks are Considerered .Shown possibility of deciding a given class of problems at a rate of crisp block systems of single-line algebraic equations where factors matrixes and right parts present itself matrixes of tensors by dimensionality 3×h 3. Example of deciding is bring.

Вступ

Проблема управління за умов невизначеності належить до таких проблем теорії управління, де розв'язок навіть окремих задач цієї проблеми має велике теоретичне та прикладне значення. Однією з таких є задача розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) за умов невизначеності, зокрема, коли коефіцієнти матриці та праві частини подаються інтервалами або нечіткими змінними (числами).

Для розв'язаня інтервальних СЛАР запропоновано достатньо велику кількість методів [1], зокрема, існує так зване *інтервальне розширення* методу Гаусса [1; 2].

Найбільш повне дослідження прямих методів розв'язання систем лінійних та нелінійних алгебричних рівнянь наведено в праці [3]. Головна мета інтервального аналізу полягає в заміні арифметичних операцій та речовинних функцій над речовинними числами інтервальними операціями і функціями, що перетворюють інтервали, які вміщують ці числа.

Сучасний стан проблеми

«Цінність» інтервальних розв'язків полягає в тому, що вони вміщують *точні* розв'язки початкових задач. Разом з тим, для достатньо складних задач повне застосування інтервального аналізу не дає задовільних результатів, причиною цього є надзвичайно великі довжини інтервалів. Це пояснюється тим, що на кожній елементарній операції враховують усі можливі, в тому числі найгірші варіанти, сполучень похибки.

Нечіткі СЛАР являють собою систему рівнянь

$$\begin{cases} \tilde{a}_{11} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{1m} \otimes \tilde{x}_n \underset{=}{\approx} \tilde{b}_1, \\ \vdots \\ \tilde{a}_{m1} \otimes \tilde{x}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{a}_{mm} \otimes \tilde{x}_n \underset{=}{\approx} \tilde{b}_m, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\tilde{A} \otimes \tilde{x} \underset{=}{\approx} \tilde{b}, \qquad (2)$$

де відношення $\underset{=}{\approx}$ визначене у вигляді: $\tilde{A} \underset{=}{\approx} \tilde{B}$ якщо і тільки якщо $\mathrm{D(A)} \cong \mathrm{D(B)}$, де $D: F(\Re) \to \Re$ — функція ранжирування; $\otimes$ — знак скалярного добутку нечіткої зміни (НЗ) (НЧ)

$$\lambda \otimes \tilde{A} = \lambda \otimes (a, \alpha, \beta)_{LR} = \begin{cases} (\lambda a, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}, \lambda > 0, \\ (\lambda a, -\lambda\alpha, -\lambda\beta)_{LR}, \lambda < 0 \end{cases}$$

нижній індекс $_{\mathrm{LR}}$ означає стандартну (L-R) – ФН, яка задається трійкою параметрів $\tilde{A} = (a, \alpha, \beta)$, де a-мода, α, β — правий та лівий коефіцієнти нечіткості відповідно: $\tilde{a}_{ij} = =\{a_{ij} / \mu_{ij}^a\}$,

$$\mu_{ij}^a \to [0,1]; \tilde{x}_i = \{x_i / \mu_i^x\}, \mu_i^x \to [0,1]; \tilde{b}_j = \\ = \{b_j / \mu_j^b\}, \mu_j^b \to [0,1].$$

Можливий вигляд ФН L-R-типу подано на рис. 1

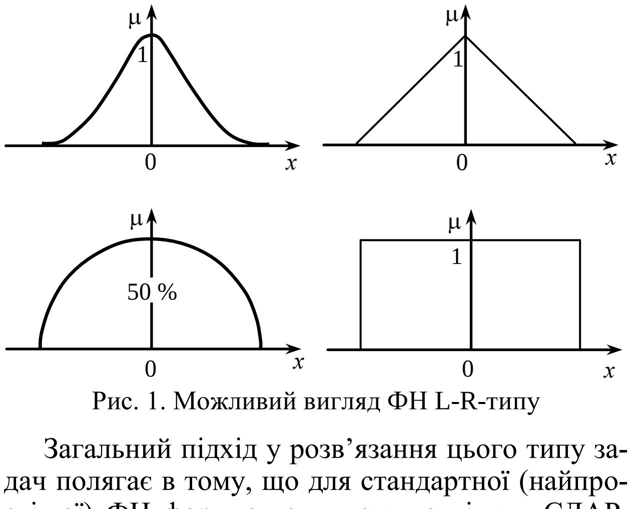


Рис. 1. Можливий вигляд ФН L-R-типу

Загальний підхід у розв'язання цього типу задач полягає в тому, що для стандартної (найпростішої) ФН формується множина чітких СЛАР, на підставі розв'язків останніх формується початковой СЛАР. Наприклад, матриця коефіцієнтів $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}\ ]_{m*n}$, $1 \le \mathrm{i, j} \le \mathrm{n - m \times n}$ — нечітка матриця, де $(\forall \mathrm{i,j})$ $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{x}_i, \tilde{b}_j \in \mathrm{F}(\Re)$.

Якщо матриця A подана як $\tilde{A}=(A,A',A'')$ при $A=[a_{ij}]_{m*n}, A'=[a'_{ij}]_{m*n}, A''=[a''_{ij}]_{m*n}$, $x=(x,x',\ x''),\ b=(b,b',b'')$, одержуємо таку задачу: $(A,A',A'')\otimes(x,x',x'')\underset{=}{\approx}(b,b',b'')$.

Для трикутної НЗ оцінювальна функція має вигляд $D(\tilde{A})=\bar{A}+\frac{1}{4}(A''-A')$ і для трикутних НЗ $\tilde{A}\ i\ \tilde{B}$ маємо $\tilde{A}\underset{=}{\approx}\tilde{B}$ якщо і тільки якщо $A+\frac{1}{4}(A''-A')\cong\bar{B}+\frac{1}{4}(B''-B')$.

З урахуванням введених передумов задача

$$\begin{cases}(4,1,0)\otimes\tilde{x}_1\oplus(-3,2,1)\otimes x_2\underset{=}{\approx}(2,1,2)\\(-3,1,2)\otimes\tilde{x}_1\oplus(2,1,1)\otimes\tilde{x}_2\underset{=}{\approx}(1,0,1)\end{cases}$$

трансформується в систему ЛАР з матрицею 2×5 (система з двома рівняннями і 5 невідомими),

$$\begin{cases}3.75x_1-0.25x_1'+0.25x_1''-3.25x_2+\\+0.75x_2'\ -0.75x_2''=2.25;\\\quad -2.75x_1+0.75x_1'-0.75x_1''+\\\quad +2x_2-0.5x_2'\ +0.5x''=1.25,\end{cases}$$

рішенням якої є нечіткий вектор $\tilde{x}=\{\tilde{x}_1,\tilde{x}_2\}$, $\tilde{x}_1$ = (8.25, 8.25, 0), $\tilde{x}_2$ =(0, 0, 35.5).

У працях [4—6] наведені чисельні приклади формування і розв'язання такого типу СЛАР.

Підводячи підсумок розглянутим методам, слід визнати, що в багатьох випадках має місце ситуація, коли приблизно (чи погано) сформульовану задачу намагаються розв'язувати все більш і більш «витонченими» методами. Практика показує, що одна і та ж СЛАР, розв'язувана різними способами, дає достатньо різні розв'язки, які у кращому випадку можна віднести лише до припустимих.

Показовим у цьому відношенні є також те, що існування декількох абсолютно рівноправних методів дефадзифікації, при розв'язанні нечіткої СЛАР для дефадзифікованої задачі дає також різні результати. У загальному випадку має місце спроба нечіткого розширення методів розв'язання стандартних СЛАР на нечіткі (1), (2), але ніякої доказової бази при цьому не існує. Алгоритм вирішення, здавалося б, загальної задачі стає унікальним, обмеженим великою кількістю явних і схованих умов і умовностей, застосувати його де-небудь в іншому місці практично нереально.

Постановка основних задач

Тензор-змінні як аналоги нечітких змінних. У працях [7; 8] наведено, що представлення об'єкта дослідження (виміру) у вигляді тензора є більш адекватним, ніж представлення у вигляді величини. Тензорна модель, розглянута як матрична проекція, дає змогу аналізувати об'єкт у різних системах координат, тобто експертні оцінки об'єкта розглядаються як один і той самий об'єкт у різних системах координат, відповідність між цими системами координат, що характеризуються тензорами, може бути встановлена за допомогою «тензора приєднання», що дає змогу погодити і зв'язати різні точки зору.

Особливістю тензорної моделі об'єкта є те, що при зміні координат компоненти тензора змінюються, хоча властивості тензора залишаються інваріантними.

Властивості тензора, що залишаються незмінними при перетвореннях координат, визначаються системою його *інваріантів*, деякі з яких є коефіцієнтами характеристичного рівняння. Інваріанти — константи, значення яких зберігаються при зміні системи координат. Величини головних інваріантів можуть бути визначені через власні значення, число головних інваріантів для тензора рангу r визначається виразом r+1, у загальному випадку кількість незалежних інваріантів набагато більше, вона визначається можливістю розкладання головного тензора на систему приєднаних тензорів: симетричний — кососиметричний, девіатор — ізотропний. Наприклад, для тензора другого рангу в загальному випадку існує вісім незалежних інваріантів. Однією з важливих інваріантних характеристик тензора є його величина — магнітуда, яку можна обчислити на основі параметрів матриці тензора, також інваріантом є норма матриці тензора. Відзначимо дуже важливу обставину, якщо для представлення НЗ використовують кілька моделей дефадзифікації, одержуючи при цьому, як правило, різні значення, то для тензор-змінної існує єдина система інваріантів, що однозначно характеризує тензор.

Представлення нечіткої змінної у вигляді тензора (тензор-змінна). Нечітка множина чи множина нечітких змінних (НЗ), розглянута як сукупність пар «значення/функція належності (ФН)», може бути структурована шляхом представлення НЗ у вигляді тензора. Діада відповідає представленню НЧ(НЗ) у формі «значення (1-й вектор)/ФН (2-й вектор)» $\tilde{x}=\{x/\mu^x\}=\{x_i/\mu_i^x\}$, $i=1,2,.\ ...,n$; $\mu^x\to[0,\ 1]$. Раціонально (хоча зовсім необов'язково) представляти НЗ у вигляді множини, що складається з 3^n, n = 1,2,... компонент. У цьому випадку маємо *діадний* тензор, властивості якого добре досліджені, його використання відрізняється визначеною конструктивністю. Головна перевага використання тензор-змінної як моделі невизначеності полягає в такому:

- можливість представлення об'єкта у вигляді 3^n чисел, n = 1,2,... дає змогу на підставі принципу екстремальної ентропії визначити за необхідності ФН, що об'єктивно відтворює «значимість» елемента в складі об'єкта.

У загальному випадку тензорне моделювання невизначеності не потребує обов'язкого використання ФН.

Тензорне моделювання невизначеності дає змогу істотно розширити множину визначних властивостей, якими характеризується об'єкт, бо розкладання початкового тензора на групу так званих «приєднаних тензорів» дає можливість додаткової інформованості про об'єкт;

Властивості тензора: наявність інваріантів, що однозначно характеризують його, можливість згортки тензора, що дають змогу підвищити конструктивність арифметичних операцій, виконуваних над нечіткими змінними, відкривають нові можливості у моделюванні невизначеності.

Припустимо, що НЗ задана у вигляді:

$$\tilde{x} = \{x / \mu^x\},\ x = [x_1\ x_2\ x_3\ ],\quad \mu^x = [\mu_1^x\ \ \mu_2^x\ \ \mu_3^x].$$

Тензор-змінна (ТЗ) — аналог НЗ, може бути розрахована за такою схемою:

$$\text{НЗ} \to \text{ТЗ},\ \tilde{x} \to T^x,\ T^x = x \bullet \mu^x\ ,$$

де $\bullet$ — знак тензорного добутку, або використовуючи засоби ПММ MatLab шляхом реалізації функції T^x = kron (x, $(\mu^x)^T$), де верхній індекс ^{T} — символ транспонування. Для наведеної НЗ маємо ТЗ у вигляді тензора другого рангу з матрицею

$$T^x = \begin{pmatrix} x_1 * \mu_1^x,\ x_2 * \mu_1^x,\ x_3 * \mu_1^x \\ x_1 * \mu_2^x,\ x_2 * \mu_2^x,\ x_3 * \mu_2^x \\ x_1 * \mu_3^x,\ x_2 * \mu_3^x,\ x_3 * \mu_3^x \end{pmatrix}.$$

Раніше вказувалося, що пошук *точних* розв'язків *неточно* сформульованих задач належить до безперспективних проблем, тому розглянемо спрощену задачу, що однак досить повно характеризує проблему. Таке спрощення полягає в тому, що розглядають стандартну (для більшості задач прикладної математики) трикутну ФН: $\mu^x = [0\ 1\ 0],\ x = [x_1\ x_2\ \ x_3\ ],\ x \bullet \mu^x$ дає

$$T^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 * \mu_2^x, & x_2 * \mu_2^x, & x_3 * \mu_2^x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

На рис. 2 показано НЗ із трикутною ФН і її тензорний аналог.

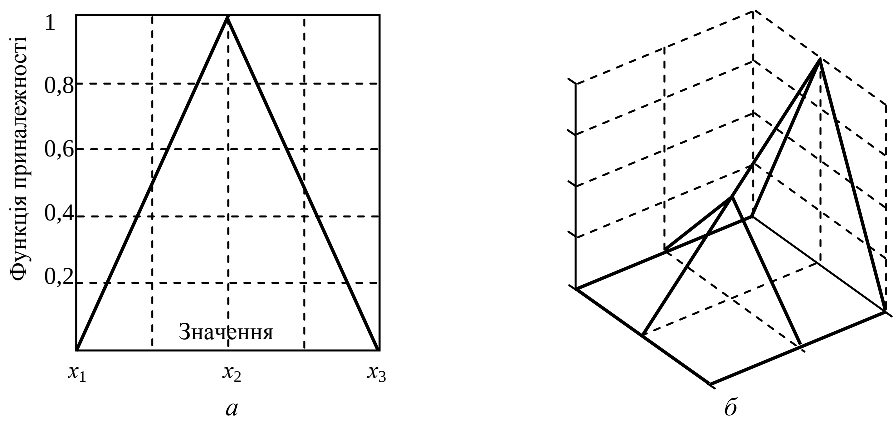


Рис. 2. Нечітка змінна (*а*) та її тензорний аналог (*б*)

Тензорна змінна (ТЗ), створена запропонованим способом, належить до класу так званих діадних тензорів [9]. Із трьох незалежних інваріантів тільки вона має перший інваріант (слід), який не дорівнює нулю.

У розглянутому випадку — трикутна ФН — слід t = trace(T^x)= x_2. Відзначимо, що слід квадратної матриці $[A]_{N\times N}$ визначений у вигляді tr[A]= $\sum_{k=1}^{N} A_{kk}$ і має такі властивості:

$$\text{tr}([A]^T) = \text{tr}[A],\ \text{tr}([A][B]) = \text{tr}([B]\ [A]).$$

Для двох матриць одного класу $[A]_{M\times N}$ і $[B]_{M\times N}$ внутрішній (скалярний) добуток матриць [A]*[B], визначений у вигляді

$$[A]*[B] = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M} A_{mn} B_{mn}\ ,$$

еквівалентний добутку слідів:

$$[A]*[B] = \text{tr}([A]\ \ [B]^T) = \text{tr}([A]^T [B]).$$

Нульовий інваріант — магнітуда визначається у вигляді

$$\|[A]\| = \sum \sqrt{[A]*[A]}\ .$$

У розглянутому випадку

$$\|[A]\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{m}\sum_{n=1}^{m} (A_{mn})^2}\ .$$

Однією з розповсюджених форм представлення інваріантів є так звана «слідова» форма:

$$I = trT,$$
$$II = tr(T^2),$$
$$III = tr(T^3).$$

Через власні значення інваріанти можуть бути представлені у вигляді:

$$I = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3;$$
$$II = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2;$$
$$III = \lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3.$$

Для інваріантів справедливі такі співвідношення:

$$I_T = trT,\ II_T = \frac{1}{2}((tr(T)^2 - trT^2), III_T = \det T\ ,$$

де оператор $tr\ T = t_{ii}$ (подвійне «іі» символізує суму від 1 до 3).

Додатково визначимо норми для матриць ТЗ:

n_1 — 1-норма: максимальна сума стовпчика norm(T^x, 1) = max(sum(abs(T^x)))= x_3,

n_2-*Infiniti*-норма: максимальна сума рядка — norm(T^x,inf) = max(sum(abs((T^x)^T))) = x_1+ x_2+ x_3.

Для матриць [A],[B] справедливе відношення: norm $([A]*[B]) \le$ norm $[A]$*norm $[B]$.

Зазначимо головні особливості тензорної методології розв'язку СЛАР:

- тензорне представлення невизначеності не передбачає обов'язкового використання ФН, зокрема, ТЗ може бути сформована на інтервалі $I_x = [x_1 \ x_2 \ x_3]$, де $x_1 \le x_2 \le x_3$ — мінімальне, середнє та максимальне значення інтервалу:

$$I_x = [x_1 \ x_2 \ x_3] \to T_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{x}_1 & \mathrm{x}_2 & \mathrm{x}_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

у цьому випадку визначення ФН доцільне тільки з одного боку — перехід від тензорної методології до звичної методології нечіткого аналізу;

- замість магнітуди доцільно використовувати норми, бо визначення магнітуди за виразом $\|[A]\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}(A_{mn})^2}$ дає одну з норм.

Тензорні аналоги нечітких СЛАР. Загальний вигляд нечіткої СЛАР наведено у виразах (1) та (2). Тензорне представлення кожної НЗ з (1) та (2) за трикутної ФН має вигляд (3):

$$\tilde{x}_j \to {}^jT^x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^jx_1 & {}^jx_2 & {}^jx_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{a}_{ij} \to {}^{ij}T^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^{ij}a_1 & {}^{ij}a_2 & {}^{ij}a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \tilde{b}_i \to {}^iT^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ {}^ib_1 & {}^ib_2 & {}^ib_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Для трикутної ФН μ =[0 1 0] між $\{x_1, x_2, x_3\}$ та інваріантами визначені зв'язки:

$$x_2 = t, \quad x_3 = \mathrm{n}1, \quad x_1 + x_2 + x_3 = n2,$$

де t, $n1$, $n2$ — слід та норми матриці ТЗ.

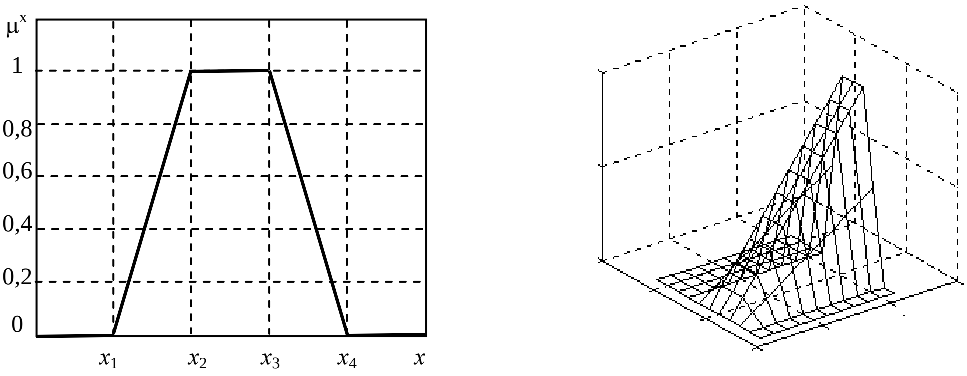
Ці умови будуть використані при модифікації реального розв'язання СЛАР у таке, що ТЗ має аналог з трикутною ФН.

Нагадаємо, що кожен компонент рішення вихідної НСЛАР являє собою двовимірний вектор, кожна компонент якого — НЗ із трикутною ФН.

Для НЗ із трапецієподібною ФН $\tilde{x} = \{x / \mu^x\}$ (рис. 3) вектора $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]$, μ^x = [0 1 1 0] дають ТЗ у вигляді:

$$T^x = \begin{pmatrix} x_1\mu_1^x & x_2\mu_1^x & x_3\mu_1^x & x_4\mu_1^x \\ x_1\mu_2^x & x_2\mu_2^x & x_3\mu_2^x & x_4\mu_2^x \\ x_1\mu_3^x & x_2\mu_3^x & x_3\mu_3^x & x_4\mu_3^x \\ x_1\mu_4^x & x_2\mu_4^x & x_3\mu_4^x & x_4\mu_4^x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



а *б*

Рис. 3. Трапецієподібна нечітка змінна (*а*) та її тензорний аналог (*б*)

Властивості ТЗ:

- слід — $t = trace(T^x) = x_2 + x_3$;
- n_1 — 1-норма —максимальна сума стовпчика — norm(T^x, 1) = max(sum(abs(T^x)))= $=2x_4$;
- n_2 — *Infiniti*-норма — максимальна сума рядка — norm(T^x, inf) = max(sum(abs(($T^x)^T$))) = $= x_1 + x_2 + x_3 + x_4$.

Під час розв'язання НСЛАР у тензорному базисі розв'язок одержують у вигляді ТЗ із матрицею T^x. У цьому разі постає завдання визначення відповідної НЗ Необхідно визначити додаткові умови, за яких можна розрахувати на параметри ФН. Зауважимо, що за умовчанням обирається, що для НЗ із визначеною ФН розв'язок НСЛАР має таку саму ФН. Для трапецієподібної ФН для визначення $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ можна сформувати систему рівнянь $\mathbf{A}\mathrm{x} = \mathrm{b}$, що наведена нижче:

$$\begin{cases} 0 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 + 0 * x_4 = t; \\ 0 * x_1 + 0 * x_2 + 0 * x_3 + 2 * x_4 = n_1; \\ 1 * x_1 + 1 * x_2 + 1 * x_3 + 1 * x_4 = n_2. \end{cases}$$

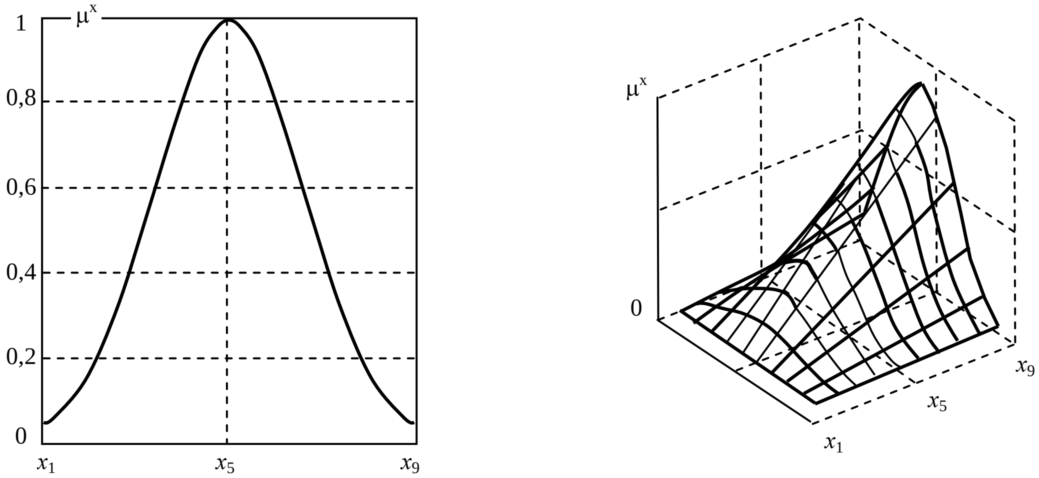
Як видно, ця система є недовизначеною — для чотирьох невідомих існує тільки три рівняння (матриця 4×3).

MatLab дають змогу одержати наближене розв'язання цієї системи методом найменших квадратів, зокрема, можливе визначення псевдооберненої матриці $A^{(p)}$, для якої $A^{(p)}\, x \approx b$. На підставі цього можна визначити наближені значення x_1, x_2, x_3, x_4. Аналогічно відбувається й у більш складному випадку(рис. 4), коли НЗ представлена функцією, для якої недостатньо чотирьох значень, наприклад, ФН гауссівського типу, для якої, припустимо, можна обмежитися 9 значеннями

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_9\},\ \mu^x = \{\mu_1^x,\ \mu_2^x, \ldots, \mu_9^x\};$$

$$T^x = \begin{pmatrix} x_1\mu_1^x & x_2\mu_1^x & \ldots & x_9\mu_1^x \\ x_1\mu_2^x & x_2\mu_2^x & \ldots & x_9\mu_2^x \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1\mu_4^x & x_2\mu_4^x & \ldots & x_9\mu_9^x \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку система рівнянь має матрицю вимірністю 9×3, однак і тут засоби ПММ MatLab дозволяють одержати наближене рішення цієї системи методом найменших квадратів, зокрема, можливе визначення псевдооберненої матриці $A^{(p)}$, для якої $A^{(p)}\, x \approx b$, на підставі якої можна визначити наближені значення $x_1, x_2, \ldots, x_9$... Відзначимо, що при цьому ФН для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_9$ передбачається заданою.



а *б*

Рис. 4. Нечітка змінна із гауссівською ФН (*а*) та її тензорний аналог (*б*)

Наприкінці відзначимо, що лише у разі НЗ із трикутною ФН можна однозначно визначити параметри розв'язання НСЛАР, в інших випадках, наприклад, трапецієподібна чи гауссова ФН, розв'язки матимуть більш низьку точність. У загальному випадку пошук *оптимального* (у розумінні максимальної точності) розв'язання НСЛАР належать до класу некоректних задач, для розв'язання яких можуть бути застосовані методи регуляризації. Зазначимо, що за умов невизначеності така задача має обмежене прикладне значення.

Приклад. Розглянемо особливості розв'язання НСЛАР у разі представлення параметрів моделі тензорами. НСЛАР для тензорного представлення НЗ із трикутною ФН з урахуванням зроблених вище припущень набуде вигляду:

$$\begin{cases} {}^{11}T^a \otimes {}^{1}T^x \oplus \cdots \oplus {}^{1m}T^a \otimes {}^{m}T^x \otimes \tilde{x}_n \approxeq {}^{1}T^b, \\ \vdots \\ {}^{m1}T^a \otimes {}^{1}T^x \oplus \cdots \oplus {}^{mm}T^a \otimes {}^{m}T^x \otimes \tilde{x}_n \approxeq {}^{b}T^b \end{cases} \tag{5}$$

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} {}^{ij}T^a\, {}^{j}T^x \approx {}^{i}T^b,\ \mathrm{I} = 1,\ m;\ j = \mathrm{I},\ n,$$

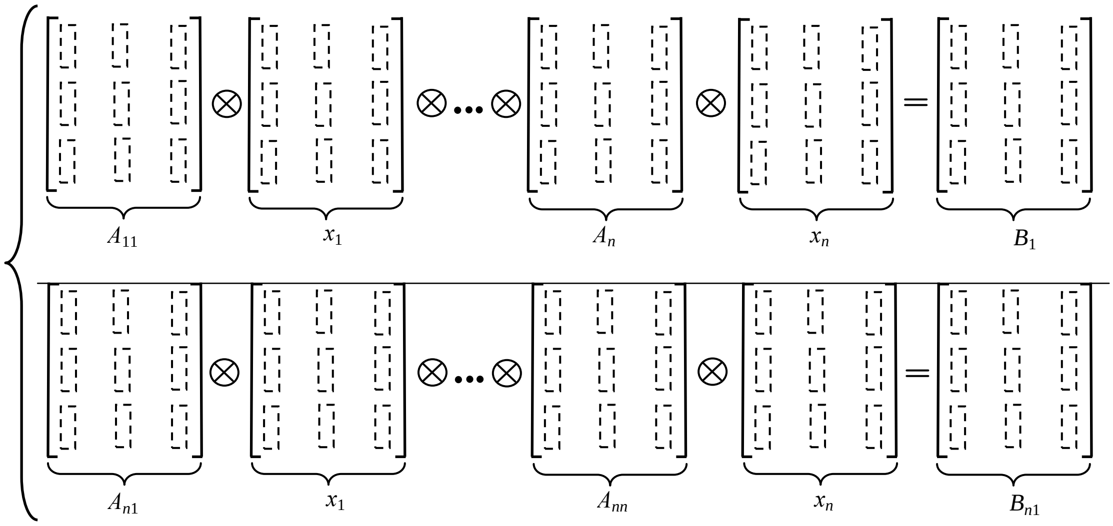
де ${}^{ij}T^a, {}^{j}T^x, {}^{i}T^b$ — ТЗ, визначені за системою (3).

Розв'язання СЛАР у такій постановці можна отримати двома способами:

- шляхом розв'язання блочної системи рівнянь;
- шляхом розв'язання чітких СЛАР для інваріантів і норм відповідних ТЗ.

Якщо у НСЛАР (1) підставити тензорні аналоги НЗ, отримаємо нову систему рівнянь, яка матиме блочну матрицю коефіцієнтів, праві частини також будуть матрицями.

$$\begin{cases}[A_{11}]\otimes[X_1]\oplus\cdots\oplus[A_{n1}]\otimes[X_n]=[B_1]\\ \vdots \\ [A_{1n}]\otimes[X_1]\oplus\cdots\oplus[A_{nn}]\otimes[X_n]=[B_n]\end{cases} \tag{6}$$



Зазначимо, що представлення НСЛАР у вигляді матриць (6) є загальним, незалежно від форми ФН тензор-змінна може розглядатись як тензор другого рангу шляхом її згортки. Розглянемо, які особливості можуть виникнути під час розв'язання поданої блочної системи

$$[A]\otimes[X]=[B].$$

Розв'язок цієї системи має формальний запис $[X]=[A]^{-1}\otimes[B]=\dfrac{1}{\det\ [A]}[A]^{v}[B]$ і передбачає визначення величини $\det\ [A]$ матриці $[A]$, або

$$[X_i]=\frac{1}{\det\ [A]}\sum_{j=1}^{n}[B]_j\otimes[A]_{ji},\ i=1,2,\cdots,n$$

Як видно з наведеного виразу, для визначення $[X_i]$ потрібно реалізувати операції скалярного добутку і визначення суми матриць. Нехай матриця А має вигляд:

$$A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{p1} & \cdots & A_{pq}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}m_1;\\ \\ m_p.\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_1 & \quad & n_q\end{array} & \end{array}$$

Тут m_1 + ... + m_p = m, n_1 + ... + n_q = n, A_{ij} означає (i, j)-й блок або підматрицю.

Блок A_{ij} має розмірність $m_i \times n_{nj}$, отже $A = (A_{ij})$ є $p \times q$ — блочна матриця. Відомо, що для блочних матриць операцію додавання можна реалізувати як додавання звичайних матриць, за умови відповідності вимірюваностей блоків [10].

Наприклад, якщо матриця B має вигляд

$$B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{p1} & \cdots & B_{pq}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}m_1;\\ \\ m_p,\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_1 & \quad & n_q\end{array} & \end{array}$$

то матриця B розділена на блоки відповідно до A, їх сума $C = A + B$ є $p \times q$ — блочна матриця $C = (C_{ij})$, де $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$.

Множення блочних матриць виконується відповідно до теореми [4]. Якщо матриці A та B мають вигляд

$$A=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1q}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{p1} & \cdots & A_{1q}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}m_1;\\ \\ m_p;\end{array}\\ \begin{array}{ccc}r_1 & \quad & r_q\end{array} & \end{array}\qquad B=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{q1} & \cdots & A_{qt}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}r_1;\\ \\ r_q\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_1 & \quad & n_t\end{array} & \end{array}$$

і добуток $C = AB$ розділений на блоки у так

$$C=\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}C_{11} & \cdots & C_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ C_{p1} & \cdots & C_{pt}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}m_1;\\ \\ m_p,\end{array}\\ \begin{array}{ccc}n_1 & \quad & n_t\end{array} & \end{array}$$

то

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{q}A_{ik}B_{kj},\quad i=1:p,\ j=1:t$$

З урахуванням викладеного наведемо конкретний приклад — розв'язання НСЛАР стандартними методами ПММ MatLab.

Приклад. Розв'яжемо НСЛАР

$$\begin{cases}\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{a}_{12}\tilde{x}_2=\tilde{b}_1;\\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1+\tilde{a}_{22}\tilde{x}_2=\tilde{b}_2,\end{cases}$$

параметри якої є НЗ з трикутною ФН:

a_{11} = [2.5 3   3.5]; a_{12} = –[3.5 4 4.5];
a_{21} = –[1.5 2 2.5]; a_{22} = [0.7 1 1.3];
b_1 = –[8.5 10 11.5]; b_2 = –[3.5 4 4.5];
($\forall a_{ij}$, b_j) μ=[0 1 0]'.

Правильний розв'язок $x^0 = \{x^0_1, x^0_2\} = \{5.20,\ \ 6.40\}$.

Сформовану блочну СЛАР (початкова НСЛАР → блочна СЛАР) наведено нижче:

$$\begin{cases}\tilde{a}_{11}\tilde{x}_1+\tilde{a}_{12}\tilde{x}_2=\tilde{b}_1\\ \tilde{a}_{21}\tilde{x}_1+\tilde{a}_{22}\tilde{x}_2=\tilde{b}_2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}[a_{11}][x_1]+[a_{12}][x_2]=[b_1]\\ [a_{21}][x_1]+[a_{22}][x_2]=[b_2]\end{cases}.$$

Зміст блочних параметрів блочної СЛАР

$$[a_{11}]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2.5 & 3.0 & 3.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$[\,a_{12}\,]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -3.5 & -4.0 & -4.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

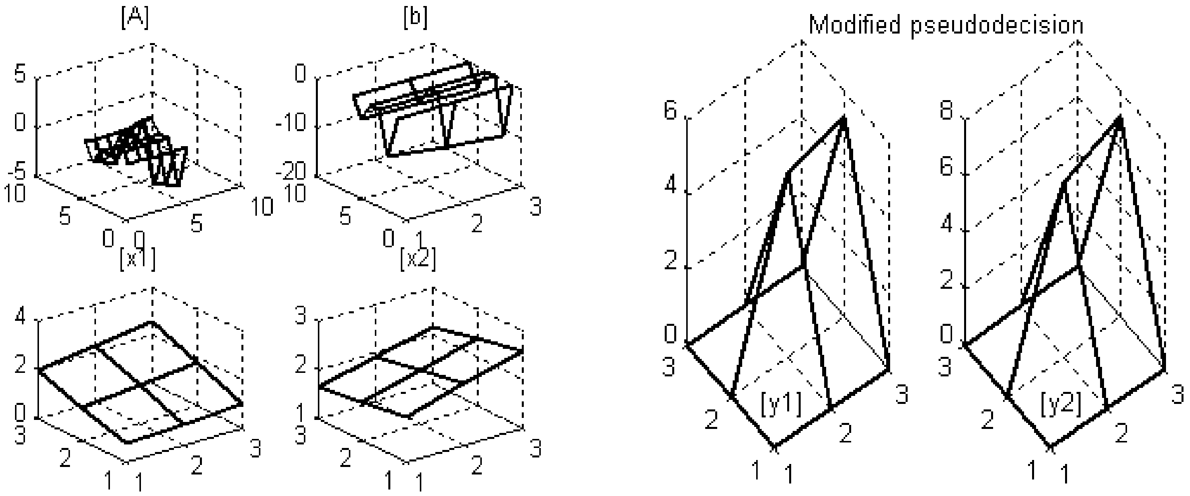
$$[a_{21}]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1.5 & -2.0 & -2.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$[a_{22}]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0.7 & 1.0 & 1.3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$[b_1]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -8.5 & -10.0 & -11.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$[b_2]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -3.5 & -4.0 & -4.5\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

На рис. 5 показано загальний вигляд блочної СЛАР (а) та її розв'язки , а також модифіковані розв'язки (*б*).



а *б*

Рис. 5. Загальне представлення блочної СЛАР (*а*) та її розв'язки (*б*)

Модифіковані розв'язки отримані на підставі таких міркувань. Постановка задачі передбачала трикутну ФН, у зв'язку з чим відповідна ТЗ — $\tilde{x} \to T_X$ має вигляд

$$T_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

але в процесі розв'язання блочної СЛАР у загальному випадку маємо рішення

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Введене поняття еквівалентного *псевдорозв'язання*, згідно з яким реальний розв'язок T і псевдорозв'язок T_X є еквівалентними, якщо у них збігаються сліди та норми, тобто

$$\begin{pmatrix} \text{i} \\ \text{ii} \\ \text{iii} \end{pmatrix} \begin{cases} trace\ (T\ ) = trace\ (T_x\ ); \\ n(T) = n(T_X), \\ n_{\inf inity}(T) = n_{\inf inity}(T_X), \end{cases}$$

$x_2 = trace(T)$; $x_3 = norm(T)$;
$x_1 + x_2 + x_3 = norm_{inf}(T)$, $x_1, x_2, x_3 \in T$.

У таблиці наведено реальні та псевдорозв'язки НСЛАР

Розв'язки блочної СЛАР

Реальні розв'язки блочної СЛАР	Модифіковані розв'язки блочної СЛАР
$x_1 = \begin{pmatrix} 0.78 & 0.90 & 1.02 \\ 1.37 & 1.58 & 1.79 \\ 1.96 & 2.26 & 2.57 \end{pmatrix}$	$y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3.51 & 4.93 & 5.38 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.93 & 5.38 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$x_2 = \begin{pmatrix} 1.95 & 2.27 & 2.59 \\ 1.80 & 2.09 & 2.38 \\ 1.64 & 1.91 & 2.18 \end{pmatrix}$	$y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -6.57 & 6.22 & 7.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.22 & 7.15 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Оцінка якості алгоритму виконана шляхом порівняння чіткого розв'язку дефадифікованої НСЛАР та блочної СЛАР, чіткий розв'язок $x^0=\{x^0_1, x^0_2\} =\{5.20,\ \ 6.40\}$.

Як видно з таблиці, чіткий розв'язок вкладається в інтервал $[x_2,\ x_3]$, $4.93 < 5.20 < 5.38$, $6.22 < 6.40 < 7.15$. Зазначимо, що застосування інтервального методу Гаусса [1] до розв'язання тестової НСЛАР дає суттєво (на 40 %) ширший інтервал.

Висновки

1. Прийняття рішень в умовах невизначеності, засноване на використанні розв'язків систем лінійних алгебричних рівнянь з нечіткими змінними, повинне враховувати ту обставину, що наближена постановка задачі практично усуває раціональність і необхідність застосування точних методів для розв'язання вихідної задачі.

2. Одним з поширених способів розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з нечіткими змінними є спосіб представлення вихідної (нечіткої) задачі у вигляді сукупності чітких задач. Представлення нечіткої змінної (значення/функція належності) у вигляді тензора дає змогу формулювати чітку блочну СЛАР у вигляді, коли всі параметри (матриця коефіцієнтів, права частина) є матрицями.

3. Запропоновано спосіб розв'язання систем лінійних алгебричних рівнянь з нечіткими змінними з матричною формою представлення параметрів моделі, що полягає в тому, що формується блочна чітка СЛАР, розв'язок якої виконується стандартними методами, з подальшим формуванням еквівалентного псевдорішення на підставі рівності слідів та норм.

Алгоритм розв'язання нечітких СЛАР у тензорному базисі незалежно від кількості α-рівнів, дає змогу представити початкову задачу у вигляді однієї задачі з блочними параметрами, що істотно спрощує процедуру обчислень.

Проведені розрахунки модельних прикладів показали високу ефективність запропонованого алгоритму.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ / С. П. Шарый. — М. ; Н.-Сиб., 2007. — 700 с.

2. *Добронец Б. С.* Интервальная математика: учеб. пособие / Б. С. Добронец // Краснояр. гос. ун-т. — Красноярск, 2004. — 216 с.

3. *Алефельд Г.* Введение в интервальные вычисления / Г. Алефельд, Ю. Херцбергер. — М. : Мир, 1987. — 360 с.

4. *Bellman R. E.* Decision-making in a fuzzy environment / R. E. Bellman, L. A. Zadeh // Management Sci. 17, 1970. — P. 141—164.

5. *Dubois D.* Possibility Theory: An Approach to Computerized Processing of Uncertainty / D. Dubois, H. Prade // Plenum Press, New York, 1988.

6. *Shaocheng T.* Interval number and Fuzzy number linear programming, Fuzzy Sets and Systems 66 (1994), 301—306.

7. *Минаев Ю. Н.* Мягкие вычисления на основе тензорных моделей неопределенности. Ч. 1: тензор-переменная в системе нечетких множеств // Электронное моделирование / Ю. Н. Минаев, О.Ю. Филимонова. — К.: ИПМЭ НАН Украины, 2006. — № 2. — С. 25—31.

8. *Минаев Ю. Н.* Мягкие вычисления на основе тензорных моделей неопределенности. Ч. 2: нечеткая математика в тензорном базисе // Электронное моделирование / Ю. Н. Минаев, О.Ю. Филимонова. — К.: ИПМЭ НАН Украины, 2007. — № 3. — С. 30—37.

9. *Brannon R. M.* Elementary and Intermediate Vector and Tensor Analysis presented in a framework generalizable to higher-order applications in material modeling // UNM REPORT, University of New Mexico, Albuquerque, 2002 . — 222 p.

10. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: пер. с англ. / Дж. Голуб, Лоун Ч. Ван. — М. : Мир, 1999. — 548 с.

ДОДАТОК

```
% ***********System equation  with fuzzy  variables = Ax=b*****************

% Matrix of factors
a11=[2.5  3  3.5];
a12=-[3.5 4  4.5];
a21=-[1.5 2  2.5];
a22=[0.7  1  1.3];

%Right  part
b1=-[8.5 10 11.5];
b2=-[3.5   4   4.5]  ;

%Membership function
mu=[0 1 0]';

Ach=[3  -4; -2  1]; % Crisp matrix A
bch=[ -10  -4 ]';   % Crisp right  part b
xch=pinv(Ach)*bch %Crisp decision
xch1=inv(Ach)*bch

% Creation a tensor-variables
a11=kron(a11,mu)
a12=kron(a12,mu)
a21=kron(a21,mu)
a22=kron(a22,mu)

b1=kron(b1,mu)
b2=kron(b2,mu)

%Block equation system with tensor-variables
A=[a11 a12;a21 a22];
b=[b1; b2];
%Decision of Block equation system with tensor-variable
x0=pinv(A)*b;

%Solving - Real   decisions
x1=[x0(1,1) x0(1,2) x0(1,3);...
      x0(2,1) x0(2,2) x0(2,3);...
      x0(3,1) x0(3,2) x0(3,3)]

x2=[x0(4,1) x0(4,2) x0(4,3);...
      x0(5,1) x0(5,2) x0(5,3);...
      x0(6,1) x0(6,2) x0(6,3)]

display('Crisp')
[xch(1) xch(2)]

display('Trace')
[trace(x1) trace(x2)]

% Making the pseudodecisions
y1=[0   0   0;   norm(x1,inf)-trace(x1)-norm(x1,1) trace(x1)  norm(x1,1);0 0 0];
y2=[0   0   0;   norm(x2,inf)-trace(x2)-norm(x2,1) trace(x2)  norm(x2,1);0 0 0];

display('Real decision' )
y1
y2

figure(1)
subplot(221),surf(A)
title('[A]')
subplot(222),surf(b)
title('[b]')
subplot(223),surf(x1)
title('[x1]')
subplot(224),surf(x2)
title('[x2]')

if y1(2,1)<0
       y1(2,1)=0;
    end
if y2(2,1)<0
       y2(2,1)=0;
    end

display('Modified pseudodecision (condition trace ( )>0')
y1
y2
 figure(2)
subplot(121),surf(y1)
title('Modified pseudodecision [y1]')
subplot(122),surf(y2)
itle('Modified pseudodecision [y2]')
```

Стаття надійшла до редакції 01.02.10.