КУЦ Ю. В., д-р техн. наук, проф.
ПИРОГ Т. М.

ГЕНЕРУВАННЯ МАСИВІВ ВИПАДКОВИХ КУТІВ У ПРОГРАМНОМУ СЕРЕДОВИЩІ LABVIEW

У статті розглянуто методику генерування вибірок випадкових кутів, яка ґрунтується на методі оберненої функції. Запропонована методика реалізована у середовищі LabVIEW. Наведений приклад генерації кутових даних з розподілом Мізеса підтвердив її ефективність.

The method of generation of random anglers samples has been considered in the article, which is based on the method of reversed function. The offered method has been realized in the environment of LABVIEW. The resulted example of generation of angular s with Mizes distributing confirmed its efficiency.

Вступ

Моделювання як метод дослідження складних систем і процесів широко використовують в інформаційно-вимірювальній техніці, радіолокації, аеронавігації тощо [1]. Одним з етапів моделювання є підготовка вихідних даних для числового експерименту.

У практиці вимірювання досить поширеними є задачі, пов’язані з визначенням статистичних характеристик випадкових кутів. Такі задачі зустрічаються в фізиці, медицині, біології, економіці та ін. Статистична обробка кутових даних передбачає виконання значного об’єму обчислень, візуалізацію проміжних і кінцевих результатів. Таку обробку доцільно виконувати на базі сучасних інформаційних технологій. Широкі можливості з обробки сигналів, візуалізації результатів вимірювання, створення віртуальних приладів та систем має програмне середовище *LabView*.

Метою статті є розробка підсистеми генерування масивів випадкових кутів в середовищі *LabView* для наступного виконання в статистичному експерименті.

Постановка задачі

Задано щільність розподілу ймовірностей $p(\theta)$ (або функція розподілу $F(\theta)$ випадкового кута (ВК) $\psi(\omega)$, де ω — елементарна подія з області подій Ω, з областю визначення функції $\theta \in [0,\ 2\pi)$. Необхідно сформувати масив вибіркових значень заданого ВК об’єму $K \times M$.

Розв’язування. Сформулюємо основні вимоги до системи генерування кутових даних. Така система має забезпечувати:

- генерацію вибірок випадкових кутів у півінтервалі $[0,2\pi)$ необхідного об’єму і заданого розподілу ймовірностей;
- виконання гістограмного аналізу отриманої вибірки і оцінка якості вибірки;
- візуалізацію графічної, числової і текстової інформації, пов’язаної з генеруванням, типом розподілу ймовірності, його параметрами та представленням даних.

Структура системи генерування кутових даних наведена на рис. 1.

Розглянемо ці питання більш детально. Специфіка кутових вимірювань полягає в тому, що областю значень випадкових кутів є коло (а не пряма, що має місце для випадкових величин), тому всі закони розподілу ймовірності та статистичні характеристики слід розглядати на колі (на півінтервалі $[0,2\pi)$).

У статистичних кутових вимірюваннях, У більшості випадків маємо справу з випадковими кутами, які характеризуються одновершинними (одночастотними) розподілами. Тому далі розглядатимемо саме такі розподіли.

Найбільш характерними розподілами ймовірностей випадкових кутів на півінтервалі $[0,2\pi)$ є [2]:

- намотаний гауссівський розподіл;
- розподіл Мізеса;
- кардіоїдний розподіл.

Генерацію вибірок випадкових кутів розглянемо на прикладі розподілу Мізеса .

Рис. 1. Структурна схема генерування кутових даних

Розподіл Мізеса. Щільність розподілу Мізеса для ВК $\psi(\omega)$ дається рівнянням

$$p_M\left(\theta \mid \mu, k\right) = \frac{1}{2\pi I_0\left(k\right)} \exp\left\{k\cos\left(\theta - \mu\right)\right\},$$

$$\left|\mu\right| < \infty,\ k > 0, \tag{1}$$

де $I_0(k)$ — модифікована функція Бесселя першого роду і нульового порядку

$$I_0\left(k\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left\{k\cos\theta\right\} d\theta, \tag{2}$$

де μ — круговий середній напрям ВК; k — параметр концентрації ВК в околі μ.

Графіки функцій $f(\theta)$ для значень параметрів $k = \{1, 2, 5\}$ та $\mu = \{0, 0{,}5\}$ зображено на рис. 2.

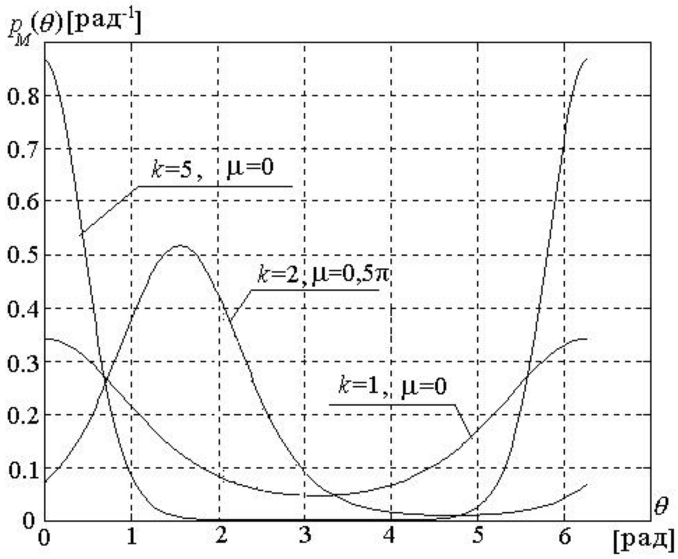

Рис. 2. Графіки щільності ймовірності Мізеса для різних значень параметрів k і μ

З наведених графіків видно, що зі збільшенням k розподіл Мізеса більше концентрується в околі μ. Якщо k=2 *і* $\mu = 0{,}5\pi$, розподіл майже повністю зосереджений на дузі від 0 до 3 рад, а якщо $k \to 0$, то перетворюється на рівномірний. Основні властивості цього розподілу проаналізовані в [2].

Розподіл Мізеса одновершинний та симетричний відносно значення μ, яке є математичним сподіванням цього розподілу. Відношення щільності розподілу в моді μ до значення щільності в антимоді $(\mu + \pi)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$ дорівнює e^{2k}.

У півінтервалі $[\mu - \pi, \mu + \pi)$ **щільність (1) має дві точки перегину** — $\mu \pm \arccos\dfrac{\sqrt{1 + 4k^2} - 1}{2k}$.

Цей розподіл має ще одну важливу властивість: найбільш правдоподібною оцінкою параметра μ є круговий середній напрям.

Метод генерування. Типовим методом генерування випадкових величин з заданим розподілом є метод оберненої функції [1]. Його суть полягає в тому, що значення випадкової величини ξ з функцією розподілу $F(x)$, яка існує на інтервалі $x \in \left(-\infty,\ \infty\right)$, одержують функціональним перетворенням

$$\xi = F^{-1}(\eta) \tag{3}$$

іншої випадкової величини η, яка має рівномірний розподіл ймовірності в області існування $y \in [0,\ 1]$. У формулі (3) позначено $F^{-1}(\cdot)$ — обернена $F(\cdot)$ функція. Вважається, що $F^{-1}(\cdot)$ існує.

Генерування масивів ВК передбачає виконання такої послідовності дій [3]:

1. Формування вихідних даних: задання параметрів розподілу ймовірності, об'єму $K \times M$ масиву генерованих значень ВК.
2. Подання функції розподілу ймовірності множиною $\left\{F\left(\theta_i\right),\ i=\overline{0,P}\right\}$ для множини дискретних значень кутів $\left\{\theta_i, i=\overline{0,P}\right\}$.
3. Отримання множини значень оберненої функції $\theta = F^{-1}\left(y\right)$, де $y \in \left[0,\ 1\right]$ — область значень функції $F\left(\theta\right)$.
4. Формування масиву вибіркових значень рівномірно розподіленої випадкової величини розміром $K \times M$.
5. Обчислення вектора вибіркових значень ВК з розподілом $F\left(\theta\right)$ заданого об'єму $K \times M$.
6. Побудова та аналіз гістограми вибірки.

Гістограмний аналіз. При виконанні гістограмного аналізу рекомендується обирати кількість l інтервалів розбиття рівною [3]

$$l = \left[2\log_2 \frac{n}{4}\right]^+, \tag{4}$$

де $[\cdot]^+$ — позначення цілої частини числа.

За умови рівномірного розбиття області визначення гістограми маємо крок розбиття $\Delta\theta = \frac{2\pi}{l} = \frac{\pi}{\log_2 n - 2}$ і границі інтервалів гістограми в точках $\frac{2\pi}{l} j,\ j=\overline{0,l}$. Висота кожного стовпчика гістограми за експериментальними даними обчислюється як

$$H_j = \frac{n_j}{n\Delta\theta}, \tag{5}$$

де n_j — кількість значень ВК, які опинились в j-му інтервалі.

Висота стовпчиків гістограми для теоретичного розподілу визначається як

$$H_j^{'} = \frac{1}{\Delta\theta} \int\limits_{\frac{2\pi}{l}(j-1)}^{\frac{2\pi}{l}j} p(\theta) d\theta. \tag{6}$$

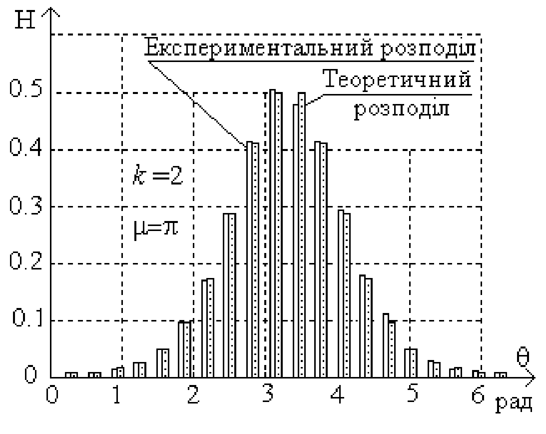

Рис. 3. Гістограма векторів ВК об'єму $M = 10000$ з розподілом Мізеса і параметрами $k = 2,\ \mu = \pi$ відповідно

На рис. 3 як приклад наведено гістограми для ВК з розподілом Мізеса (теоретична та експериментальна) для вибірки об'єму 1×5000 і параметрами $k = 2,\quad \mu = \pi$. Під час генерування ВК важливим є питання якості, тобто питання перевірки розподілу ймовірності отриманої вибірки ВК на відповідність заданому розподілу. Цю задачу вирішують за допомогою критеріїв згоди [4]. З урахуванням того, що тип розподілу, і його параметри відомі, доцільно застосування критерію Колмогорова.

За критерієм Колмогорова розбіжність теоретичного й експериментального розподілів оцінюється максимальним значенням модуля різниці D між значеннями експериментальної $F\left(\theta_j\right)$ і теоретичної $F^{\text{т}}\left(\theta_j\right)$ функцій розподілу ймовірності ВК на всіх l інтервалах гістограми

$$D = \max_{j} \left| F\left(\theta_j\right) - F^{\mathrm{T}}\left(\theta_j\right) \right|, \qquad j = \overline{0,l}\,. \tag{7}$$

Цей критерій ґрунтується на встановленій Колмогоровим закономірності: для довільної функції розподілу ймовірності $F(x)$ випадкової величини $\xi(\omega)$ за необмеженого зростання числа M незалежних спостережень ймовірність виконання нерівності

$$D\sqrt{M} \geq \lambda \tag{8}$$

прямує до границі

$$P(\lambda) = 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\left(-2k^2\lambda^2\right). \tag{9}$$

Результати моделювання свідчать, що запропонований спосіб формування вибіркових значень розподілених на колі ВК забезпечує досягнення високої ймовірності за критерієм Колмогорова (0,8 — 0,95) у широкому діапазоні зміни параметрів розподілів.

Реалізація в програмному середовищі LabView

Розроблена програма системи генерування вибірок ВК зображена на рис. 4, а панель користувача системи — на рис. 5.

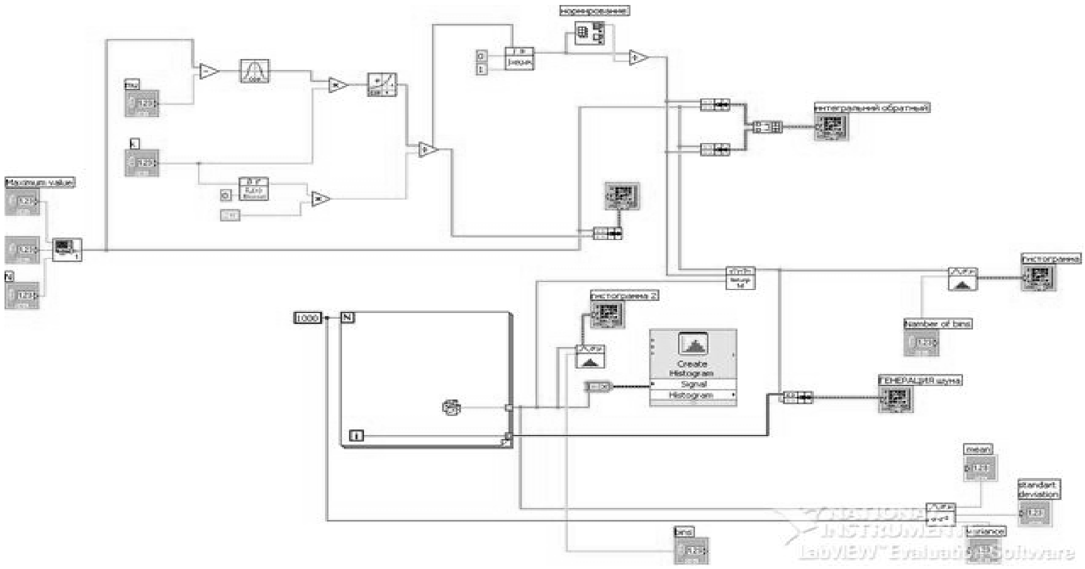

Рис. 4. Програмна реалізація системи генерування вибірок ВК

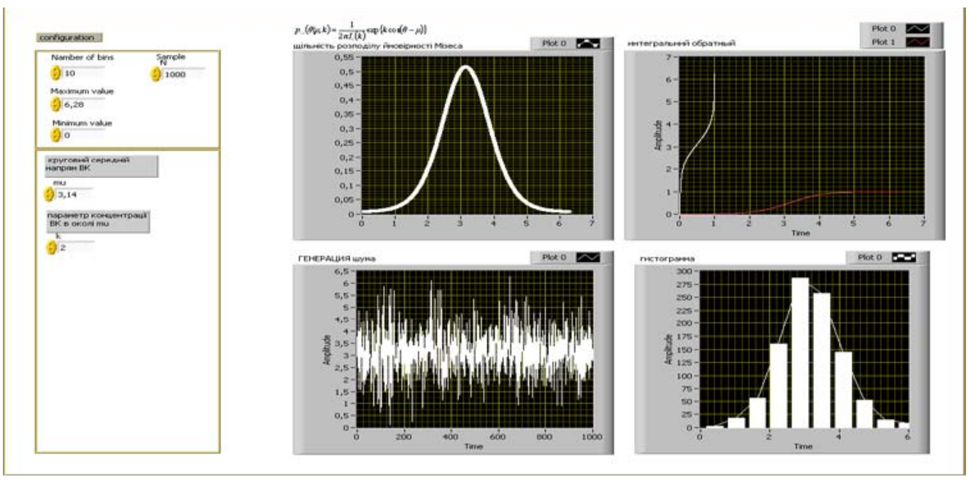

Рис. 5. Панель користувача системи генерування вибірок ВК

Програма підтримує інтерактивний режим роботи і дає змогу здійснювати генерування вибірки ВК, відображення вхідних і вихідних даних, формування файлу вихідних даних для передачі задля подальшого використання.

Висновки

Розроблено програму генерування випадкових кутів із заданим розподілом імовірності в системі *LabView*.

Виконана перевірка підтвердила правильність обґрунтованого методу генерування.

Розроблена програма може бути використана в навчальному процесі та при розробці систем вимірювання кутових величин.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Прокопенко І. Г., Козлов В. С., Корнільєв Е. А*. Основи автоматизації проектування радіоелектронної апаратури: Конспект лекцій. — К. : НАУ, 2002. — 96 с.

2 . *Мардиа К.* Статистический анализ угловых наблюдений: Перевод с англ. — М.: Главная редакция физ.-мат. лит-ры из-ва «Наука», 1978. — 240 с.

3. *Бабак В. П., Куц Ю. В*. Комп'ютерне моделювання задач кутових вимірювань //»Авіа-2002». — Т. 1: Інформаційно-діагностичні системи. — К.: НАУ, 2002. — С. 111—114.

4. *Захаров И. П.* Теоретическая метрология. — Х. : ХТУРЕ , 2000. — 172 с.