

УДК 621.3.038.61(045)

ХВИЛЬОВИЙ СКІН-ЕФЕКТ В АНІЗОТРОПНОМУ МАГНІТОДІЕЛЕКТРИКУ**В. Т. Чемерис**, канд. техн. наук; **І. О. Бородій**

Національний авіаційний університет

vchemer@voliacable.com

На підставі розгляду загального рівняння індукції визначено критерії, що встановлюють переважну роль дифузії або хвильового процесу при поширенні імпульсного магнітного поля в електропровідному середовищі. Виконано аналіз встановлення розподілу імпульсного магнітного поля в анізотропному магнітодіелектрику. Наведено результати моделювання за допомогою програми FEMLAB хвильових процесів при збудженні імпульсного магнітного поля в шихтованому пакеті індуктора прискорювача електронів. Показано, що прояви скинування поля в осердях при хвильовому процесі спостерігаються у випадках, коли швидкість поширення хвилі в магнітодіелектрику менша, ніж відношення поперечного розміру осердя до тривалості імпульсу.

Ключові слова: імпульсне електромагнітне поле, аморфний ферромагнетик, рівняння магнітної індукції, електромагнітна хвиля, еквівалентні параметри, анізотропний магнітодіелектрик, хвильовий скін-ефект.

The general criteria of the prevailing role for the field diffusion or the wave propagation process have been formulated on the base of pulsed magnetic field equation at electro-conducting medium. The analysis of the pulsed magnetic field distribution at the anisotropic magneto-dielectrics has been developed. The results of the wave process simulation of the pulsed magnetic field excitation in the laminated package of inductor core for electrons accelerator have been obtained using the FEMLAB software. That is shown the appearance of the wave skin-effect at the condition when the velocity of the wave propagation in the medium of magneto-dielectrics is less than ratio of cross section of core dimension to the pulse duration.

Keywords: pulsed electromagnetic field, amorphous ferromagnetics, equation of magnetic induction, electromagnetic wave, equivalent parameters, anisotropic magneto-dielectrics, wave skin-effect.

Постановка проблеми

В індукторах індукційних прискорювачів електронних пучків та у високочастотних пристроях імпульсної техніки широко використовуються ферромагнітні осердя, виготовлені зі стрічки аморфного ферромагнітного матеріалу типу MetGlas (США) або Melta (Росія), нанесеної на полімерну основу [1].

Проникнення імпульсів магнітного поля мікросекундної та наносекундної тривалості в такі осердя супроводжується втратами енергії на вихрові струми та перемагнічування, при цьому в площині перерізу осердя при змінах магнітного потоку, крім струмів провідності існують струми зміщення.

Найповніший аналіз проникнення магнітного поля в багатошарове осердя може бути здійснений на основі рівняння індукції, яке враховує як струми зміщення, так і можливу вібрацію шарів ферромагнетика, якщо їх швидкість $V \neq 0$.

Це рівняння можна записати, використовуючи еквівалентні параметри середовища μ , σ , ε :

$$\Delta \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\mu \sigma \bar{H}) + \text{rot} [(\mu \sigma) \bar{V} \cdot \bar{H}] + \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu \varepsilon \bar{H}). \quad (1)$$

Якщо не враховувати можливу вібрацію шарів ($V = 0$) і припустити, що еквівалентні параметри не залежать від часу і координат, то рівняння (1) для z -складової індукції матиме такий вигляд:

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = v^2 \Delta \bar{H}, \quad (2)$$

де $v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$ — швидкість поширення електромагнітної хвилі в еквівалентному середовищі.

Відносна роль хвильового і дифузійного процесів при встановленні імпульсного поля в осерді визначається співвідношенням $\frac{\sigma}{\varepsilon}$.

Якщо $\frac{\sigma}{\varepsilon} \gg 1$, то впливом хвильового процесу можна знехтувати і розглядати рівняння дифузії поля у формі [1] $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = D \Delta \bar{B}$, де $D = \frac{1}{\mu \sigma}$ — коефіцієнт дифузії поля в багатошарове середовище. Якщо ж умова $\frac{\sigma}{\varepsilon} \gg 1$ не виконується, то необхідно розглядати хвильовий процес, враховуючи загасання хвилі в міру її поширення через втрати енергії на Джоулеве тепло, обумовлені провідністю шарів ферромагнетика.

Обираючи часовий та просторовий масштаби процесу (T і L відповідно), рівняння (2) можна записати в нормованих змінних:

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\sigma T}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{B}}{\partial \tilde{t}} = \frac{v^2 T^2}{L^2} \tilde{\Delta} \bar{B}, \quad (3)$$

де $\tilde{\Delta} = L^2 \Delta = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2}$ — оператор Лапласа в нормованих координатах,

$$\tilde{t} = \frac{t}{T}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{L}.$$

Як часовий масштаб процесу доцільно обирати тривалість T імпульсу струму, що живить індуктор, а під просторовим масштабом процесу розуміти шлях, який електромагнітна хвиля проходить за час тривалості імпульсу: $L = vT$. Тоді рівняння поля (3) для одновимірної задачі зводиться до відомого рівняння:

$$\frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial x^2}, \quad (4)$$

(у рівнянні (4) і далі позначення \sim для незалежних змінних відмінено),

де у нашому випадку $k = \frac{\sigma T}{\varepsilon}$, $a = \frac{v^2 T^2}{L^2} = 1$.

Фундаментальний розв'язок рівняння (4) має вигляд рухомої функції Хевісайда θ , амплітуда якої змінюється в процесі переміщення відповідно до модифікованої функції Бесселя $I_0(\xi)$ і експоненціального закону загасання таким чином:

$$E(x, t) = \frac{1}{2} \theta(t - |x|) e^{-kt/2} I_0(\xi), \quad (5)$$

де $\xi = \frac{1}{2} k \sqrt{t^2 - x^2}$.

Шляхом заміни $B(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2} kt\right) b(x, t)$

можна виключити першу похідну за часом.

Для одновимірної задачі це приводить до однієї з простих форм рівняння Клейна–Гордона, яке добре вивчене у квантовій теорії поля та інших прикладних задачах:

$$\frac{\partial^2 b}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} + cb, \quad (6)$$

де $c = \frac{1}{4} k^2$.

Це рівняння має фундаментальний розв'язок, який не відрізняється від (5).

Рівняння Клейна–Гордона можна також розв'язувати методом розділення змінних [3], що призводить до розв'язку у формі

$$b(x, t) = \left[A_1 \exp(x\sqrt{\lambda - c}) + A_2 \exp(-x\sqrt{\lambda - c}) \right] \times \left[B_1 \exp(t\sqrt{\lambda}) + B_2 \exp(-t\sqrt{\lambda}) \right],$$

де λ , A_1 , A_2 , B_1 , B_2 — довільні сталі.

Як для рівняння (4), так і для рівняння (6) відомі функції Гріна [3], які можуть бути використані для розв'язків одновимірних крайових задач для поля в еквівалентному середовищі.

Врахування початкових та граничних умов дає змогу отримати картину поля з урахуванням відбивання хвилі від меж перерізу осердя за допомогою числових процедур обчислення інтегралів, що містять функції Гріна.

Поширення електромагнітної хвилі в електропровідному середовищі добре вивчене для випадку збудження хвилі від джерела синусоїдальних коливань з частотою $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Для характеристики середовища вводять комплексну діелектричну проникність

$$\varepsilon_\omega = \varepsilon \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right) \text{ або комплексну магнітну про-}$$

$$\text{никність } \mu_\omega = \mu \left(1 - i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right).$$

Глибина проникнення плоскої хвилі при хвильовому процесі зі загасанням [4] визначається як

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega^2 \mu \varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \right)^2} - 1 \right)}}.$$

Встановлення імпульсного поля з тривалістю 50... 200 нс в осерді з втратами енергії через труднощі аналізу загального рівняння індукції зазвичай досліджується, нехтуючи хвильовими процесами, на підставі рівняння дифузії

$$\Delta \bar{H} = \frac{\partial}{\partial t} (\mu \sigma H),$$

вважаючи, що $\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu \varepsilon \bar{H}) = 0$; $V = 0$.

Але питання про роль хвильових процесів залишається відкритим, тому що на практиці відношення $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ для багат шарових середовищ, які складаються з шарів аморфного феромагнетика, які чергуються з шарами діелектричної стрічки, може досягати значень 0,001 – 0,1 [2].

Для вивчення ролі хвильових процесів доцільно спочатку розглянути ідеальний магнітодіелектрик ($\sigma = 0$), тобто вважати, що досліджується осердя без втрат, для якого справедливе рівняння

$$\Delta \bar{H} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\mu \varepsilon \bar{H}), \text{ або ж } \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = v^2 \Delta \bar{H}.$$

Середовище шихтованого пакету осердя моделюється як суцільне середовище, яке має анізотропні властивості стосовно еквівалентних параметрів μ та ε внаслідок шаруватості структури пакета.

Далі вводиться відношення швидкості електромагнітних хвиль у середовищі до швидкості електромагнітних хвиль у вакуумі

$$v_r = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}},$$

де $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$; $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ — відносні проникності.

Процес устанавлення імпульсного поля в магнітно-анізотропному середовищі будемо досліджувати на підставі чисельного розв'язання хвильового рівняння у формі

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = v_r^2 c^2 \Delta \vec{H},$$

розглядаючи поширення поля в площині $A-A$ перерізу розрахункової моделі (рис. 1), тобто по нормалі до пластин феромагнетика.

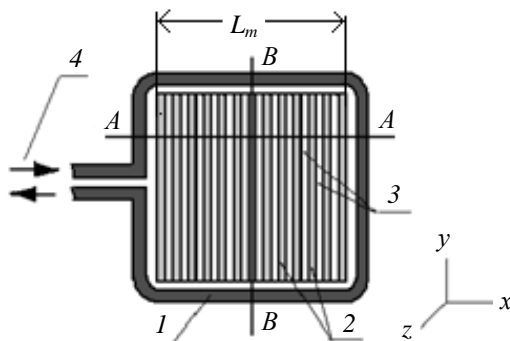


Рис. 1. Переріз осердя індуктора:

- 1 — котушка для збудження магнітного поля;
- 2 — пластини феромагнетика;
- 3 — пластини діелектрика;
- 4 — приєднання до джерела імпульсного струму

Граничною умовою на зовнішній межі перерізу пакета є таке: $H_z(t_0) = 1$. Будемо поступово зменшувати значення параметра v_r .

У міру зменшення відносної швидкості поширення хвиль процес встановлення поля локалізується в приміжових областях.

Урахування анізотропії електромагнітних властивостей дає змогу прослідкувати координатні залежності цього процесу.

Підготовка хвильового рівняння до розв'язання у програмі FEMLAB

Далі використовуються такі позначення: L_m — базовий розмір моделі в безрозмірних координатах задачі (рис. 1); X_m — масштабний коефіцієнт для переведення безрозмірного базового розміру моделі в розмірний; T_m — реальна тривалість процесу в секундах. Вводяться безрозмірні координати x^* , y^* і безрозмірний час t^* , що визначаються за співвідношеннями

$$x^* = \frac{x}{L_m X_m}, \quad y^* = \frac{y}{L_m X_m}, \quad t^* = \frac{t}{T_m},$$

де x, y, t — початкові розмірні змінні.

У кінцево-елементній моделюючій програмі FEMLAB інтервал часу для розв'язання нестационарних задач є стандартизованим: $t^* = [0, 1]$.

З використанням безрозмірних змінних хвильове рівняння набирає вигляду:

$$K_w \frac{\partial^2 H}{\partial t^{*2}} = \frac{\partial^2 H}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^{*2}},$$

де $K_w = \mu_r \varepsilon_r \frac{U^2}{c^2}$, $U = \frac{L_m X_m}{T_m}$,

або $\frac{\partial^2 H}{\partial t^{*2}} = D_w \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^{*2}} \right)$,

де $D_w = \frac{1}{K_w} = \frac{c^2}{\mu_r \varepsilon_r U^2}$.

Параметр K_w або, D_w є визначальним критерієм подібності процесу.

Залежно від поперечних розмірів перерізу пакету осердя (0,1 м – 1 м) і тривалості імпульсу струму, що збуджує поле (50...200 нс), величина U може бути в межах від $0,5 \cdot 10^6$ до $2 \cdot 10^7$. Відповідно до цього, має місце співвідношення

$$\frac{U^2}{c^2} = 0,27 \cdot 10^{-5} \dots 0,44 \cdot 10^{-4}.$$

Під час використання для виготовлення пакету осердя плівкових аморфних феромагнітних матеріалів типу METGLAS 2605CO початкова магнітна проникність може досягати значень $\mu_r = (300..400) \cdot 10^3$. Тому величина критерію K_w може перевищувати 1 і знаходитися в межах $K_w = 1 \dots 100$ і більше (відповідно величина $D_w = 1 \dots 0,01$ і менше).

Із збільшенням критерію K_w хвильовий процес все більше локалізується в приміжових зонах перерізу осердя.

Відбувається скінуння поля.

У центральній зоні пакету поле з часом зростає, залишаючись майже однорідним уздовж координат.

При моделюванні був вивчений діапазон значень K_w від часток одиниці до 1000. При значеннях відносної проникності, які незначно перевищують одиницю, скінуння імпульсного поля при хвильовому процесі спостерігається лише при дуже швидких процесах (менше 1 наносекунди) в осердях великих розмірів, коли величина $U = \frac{L_m X_m}{T_m}$ співрозмірна зі швидкістю поширення електромагнітних хвиль.

Результати моделювання

На першому етапі була проведена перевірка розв'язку для немагнітного середовища, що має $\mu_r = 1$, $\varepsilon_r = 1$. Установлення поля в такому середовищі характеризується великими значеннями коефіцієнта $D_w = 10^4 - 10^5$. Для прикладу була взята величина $D_w = 3600$.

Скінуння поля починає виявлятися при $D_w < 1$. Для демонстрації скінуння поля необхідно брати анізотропний магнітодіелектрик. Це можна спостерігати і в ізотропному магнітодіелектрику, але в ньому через накладання хвиль утворюються специфічні картини розподілу поля в кутових зонах, що утруднюють трактування результатів. У програмі FEMLAB закладена можливість задати анізотропні властивості середовища для хвильового рівняння. Врахування анізотропії дозволяє прослідкувати розвиток процесу по обох осях (x , y).

Результати моделювання при заданому анізотропному коефіцієнті дифузії для $T = 1$ показані на рис. 2, де був заданий коефіцієнт дифузії

$$D_w = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

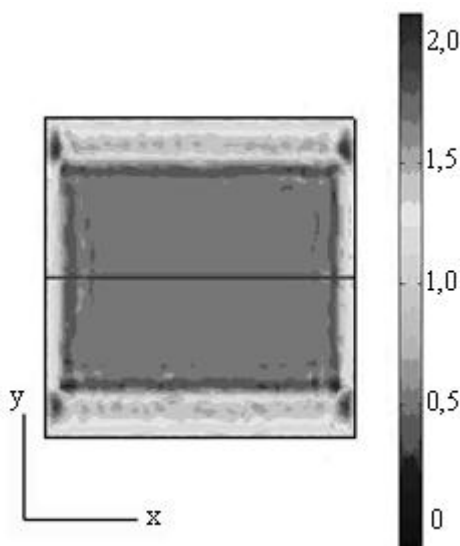


Рис. 2. Картина двовимірного розподілу магнітної індукції (за сірою шкалою) в перерізі осердя індуктора. Колір у центральній частині поля відповідає нижній частині сірої шкали

Видно, що вздовж осі x з меншою складовою коефіцієнта D_w спостерігається сильніше скінуння поля.

Детальніші епюри розподілу z -складової індукції для цього випадку наведено на рис. 3 та рис. 4.

Розподіл поля вздовж осі x по середній лінії перерізу пакета для $t = 0 \dots 1$ через інтервали часу $0,1 T_{\max}$ показаний на рис. 3, де було заданим

$$D_w = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 \\ 0 & 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

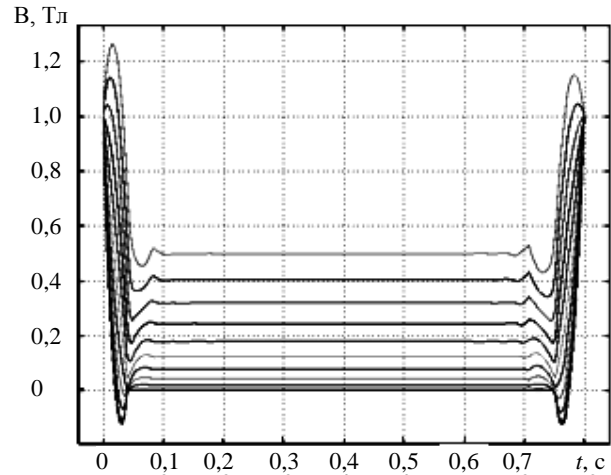


Рис. 3. Розподіл z -складової магнітної індукції в площині $A-A$ розрахункової моделі рис. 1

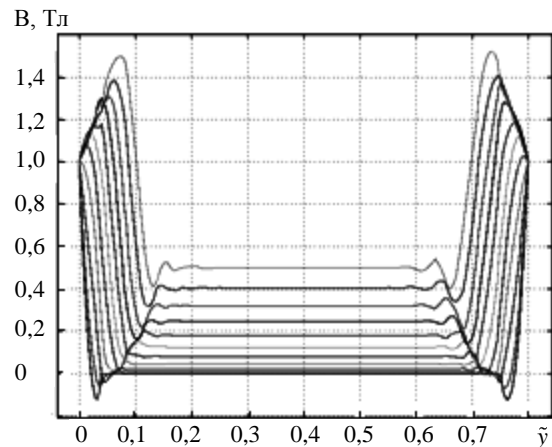


Рис. 4. Розподіл z -складової індукції в площині $B-B$ розрахункової моделі рис. 1

Розподіл поля вздовж осі y по середній лінії перерізу пакета ($t = 0, 1$ з інтервалами $0,1 T_{\max}$) показано на рис. 4.

Характерною рисою процесу є поступове наростання поля в середній частині пакету зі збереженням однорідності розподілу по координаті.

На рис. 5 показано встановлення поля для $T = 1$ по двох координатах в ізотропному магнітодіелектрику для $D_w = 0,01$.

Сітка триангуляції нараховує 3784 елементів. Час розрахунку 16,2 с.

В ізотропному магнітодіелектрику (де $D_w = 0,01$) встановлення поля в ядрі пакета уповільнюється порівняно з анізотропним середовищем.

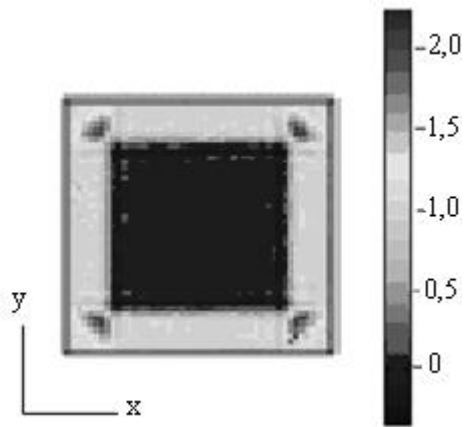


Рис. 5. Картина двовимірного розподілу поля (у сірій шкалі) в перерізі осердя, виготовленого з ізотропного магнітодіелектрика. Колір у центральній частині поля відповідає нижній частині сірої шкали

Розподіл поля по середній лінії перерізу пакета (площина $B-B$) для тих же умов показаний на рис. 6.

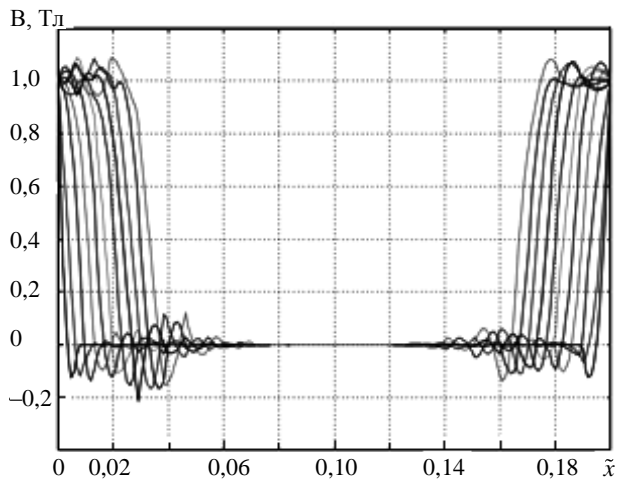


Рис. 6. Розподіл z -складової індукції у площині $B-B$ ізотропного осердя, зображеного на рис. 1

Характер розподілу імпульсного поля був досліджений для слабкої анізотропії властивостей пакета і для сильної анізотропії.

На рис. 7 показано результати моделювання для слабкої анізотропії, тобто при близьких значеннях складових коефіцієнта D_w , а саме

$$D_w = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 0,02 \end{bmatrix}.$$

Тут зображений розподіл поля вздовж осі x по середній лінії перерізу пакета ($t = 0, \dots, 1$ через $0,1 T_{\max}$).

Розподіл поля вздовж осі y по середній лінії перерізу пакета для тих же умов, що на рис. 7, показаний на рис. 8. Випадок сильної анізотропії

досліджувався для співвідношення $\frac{D_{wy}}{D_{wx}} = 100$.

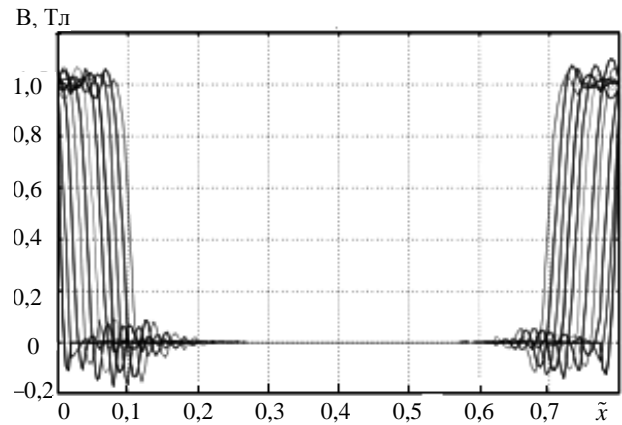


Рис. 7. Розподіл z -складової індукції у площині $A-A$ розрахункової моделі рис. 1 (випадок слабкої анізотропії магнітних властивостей осердя)

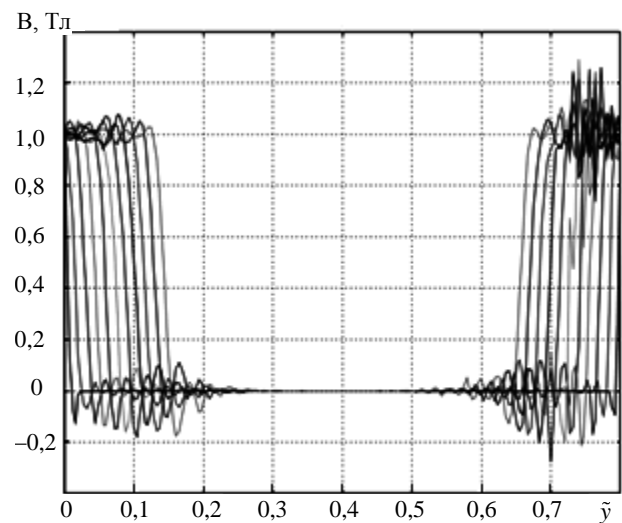


Рис. 8. Розподіл z -складової індукції у площині $B-B$ розрахункової моделі (випадок слабкої анізотропії)

Розподіл поля вздовж осі x по середній лінії перерізу пакета зображений на рис. 9.

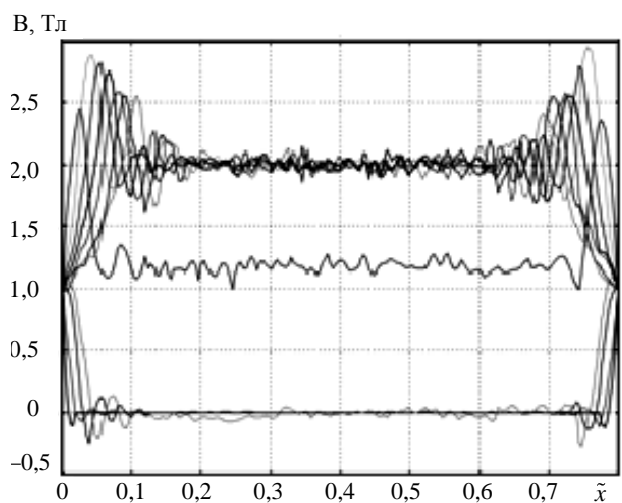


Рис. 9. Розподіл z -складової магнітної індукції по середній лінії перерізу пакета у випадку сильної анізотропії

$$\text{Тут } D_w = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1,0 \end{bmatrix}.$$

Коли складові коефіцієнта D_w по осях x, y відрізняються за величиною на два порядки, формування поля вздовж осі y в середині пакету відбувається на рівні подвоєного значення поля на межах, з наступним спадом до одиничної величини в кінці імпульсного процесу.

Заслугує на увагу характер хвильового процесу для $D_w \leq 0,1$. У цьому випадку формування поля в осерді може супроводжуватися значним тимчасовим зростанням амплітуди поля поблизу центральної частини перерізу осердя. Це зумовлено зустрічним рухом двох фронтів хвилі.

Такий процес для ізотропного середовища з $D_w = 0,1$ відображений на рис. 10.

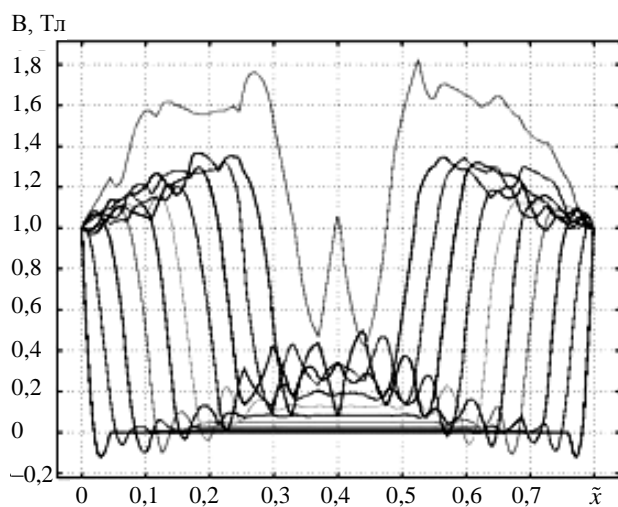


Рис. 10. Розподіл поля, зумовлений зустрічним рухом двох хвиль від границь середовища

Проведені числові експерименти дозволили з упевненістю встановити, що при зменшенні коефіцієнта D_w з наближенням його до величини 0,01 спостерігається локалізація хвильового процесу в приміжових зонах перерізу осердя, де відбувається формування так званого «хвильового скін-ефекту».

Висновок

Дослідження розв'язку хвильового рівняння для електромагнітного поля в анізотропному маг-

нітодіелектрику без втрат (електропровідність відсутня) в широкому діапазоні значень електромагнітних параметрів μ, ϵ (від $\mu_0 \cdot \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ до

$\mu\epsilon = 10^6 \mu_0 \epsilon_0 = \frac{10^6}{c^2}$) вказує на існування специ-

фічних режимів формування поля на границях прямокутної області при імпульсному його збудженні.

Характерним критерієм, що визначає специфіку цього процесу, є безрозмірна величина

$$D_w = \frac{1}{K_w} = \frac{c^2}{\mu_r \epsilon_r U^2} = \frac{1}{\mu\epsilon} \frac{T_{\max}^2}{L_m^2 X_m^2} = \left(\frac{V_{EM}}{U} \right)^2,$$

що являє собою квадрат відношення швидкості електромагнітних хвиль $V_{EM} = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$ у середовищі, яке є еквівалентом шихтованого пакету, до

характерної швидкості $U = \frac{L_m X_m}{T_{\max}}$, яка необхід-

на для проходження хвилею поперечного перерізу пакета за час тривалості імпульсу.

При значеннях D_w , які при зменшенні наближаються зверху до величини 0,01, чітко спостерігається локалізація хвильового процесу в приміжових областях з формуванням так званого «хвильового скін-ефекту».

ЛІТЕРАТУРА

1. Chemerys V. T., Borodiy I.O. Diffusion of Electromagnetic Field Into the Core of Inductor at Induction Accelerator of Electrons. — Proceedings of NAU, 2008, № 2. — P. 44–51.
2. Чемерис В. Т. Волновой скін-ефект в анізотропном магнітодіелектрике // Проблемы повышения эффективности электроэнергетических преобразователей в электроэнергетических системах. — Севастополь : СевГТУ, 2007. — С. 24.
3. Полянин А. Д. Справочник по линейным уравнениям математической физики / А. Д. Полянин — Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.
4. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм / А. Н. Матвеев. — М. : Высш. шк., 1983. — 464 с.

Стаття надійшла до редакції 08.09.2011.