УДК 519.21; 681.5.01 (045)

МЕТОД ІНВАРІАНТІВ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ ДО ЗАДАЧ УПРАВЛІННЯ СИСТЕМАМИ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ. ІНТЕГРАЛЬНІ ІНВАРІАНТИ СТОХАСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ

Дубко В. О., д-р фіз.-мат. наук, проф.

Національний авіаційний університет

applied_math@ukr.net

Запропоновано теорію інваріантів задля моделювання динаміки системи в умовах сильної невизначеності. Сформульовано основні положення теорії інтегральних інваріантів стохастичних систем.

Ключові слова: інтегральний інваріант, стохастичні системи, багатовид.

The work opens the cycle of articles devoted to the development of the theory of invariants for the purposes of modelling the dynamics of the systems in the conditions of strong disturbances.The substantive provisions of theory of integral invariants of the stochastic systems are formulated.

Key words: integral invariants, stochastic systems, manifold**.**

Вступ

Забезпечення нечутливості (інваріантності) визначальних для збереження реальних динамічних систем змінних, показників стосовно зовнішніх впливів — одне з найважливіших питань регулювання та автоматичного управління. Класична теорія інваріантності, що досліджує ці проблеми, ґрунтується на властивостях розв’язків звичайних диференціальних рівнянь. При переході до опису динаміки систем, які функціонують в умовах випадкових збурень, спираються на теорію випадкових процесів.

Для цього класу задач часто основою слугує досить повно відображена в літературі теорія стохастичних рівнянь, а саме: рівнянь Іто, узагальнених рівнянь Іто.

Збурення моделюють за допомогою вінерівських та пуассонівских процесів. Це пов’язано з можливістю апроксимації, у багатьох випадках реальних збурень суперпозицією білих і пуассонівских шумів різної інтенсивності. Пуассонівські процеси залучають для моделювання стрибкоподібних переходів у випадкові моменти часу. Як і в класичному випадку, проблему розглядають як задачу пошуку необхідних вимог, які забезпечують інваріантність (індиферент-ність) визначальних показників існування дина-мічної системи.

Динаміка збурених систем має ряд особливостей, які не дозволяють в усіх випадках скористатись для її пояснення висновками класичної теорії інваріантів.

Мета даного циклу робіт — узагальнення результатів, отриманих у працях [2—6], пов’язаних з теорією інваріантів та її застосуванням для побудови моделей стохастичних відкритих систем, теорії керування.

Робота публікується в п’яти частинах. У першій, на основі визначення інтегрування за випадковими багатовидами формуються елементи теорії інваріантів, пов’язаних з розв’язками узагальненого рівняння Іто. У другій проводиться узагальнення формули Іто-Вентцеля та будуються рівняння для стохастичних перших інтегралів узагальненого рівняння Іто. На основі запропонованого методу знаходження континууму автоморфних перетворень заданої функції сформовано алгоритм побудови рівнянь, для яких перші інтеграли рівняння Іто є першими інтегралами узагальненого рівняння Іто.

У третій частині розглядаються спеціальні класи стохастичних рівнянь та алгоритми побудови програмних керувань. Програмні керування вибираються з урахуванням умов збереження з імовірністю одиниць локальних і глобальних інваріантів динамічних систем в умовах сильних збурень, а зокрема для систем зі змінною структурою.

Четверта та п’ята частини присвячені проблемам стійкості, порівнянню різних підходів до дослідження інваріантності в умовах сильних збурень. У кожній частині наведено приклади.

Надалі, задля спрощення запису формул — вважається, що за індексами, які трапляються двічі, виконується підсумовування.

Інтеграли за багатовидами, що індуковані випадковими процесами

Безпосереднє застосування методів і висновків класичної теорії динамічних систем, математичного аналізу, диференціальної геометрії при формуванні теорії відкритих динамічних систем (ВДС) не завжди можливе. Змістовні результати вдається одержати під час введення нових понять, додаткових структур. Продуктивним виявився шлях, заснований на визначенні елементів стохастичних багатовидів та правила встановлення зв'язку з елементами початкових невипадкових багатовидів, подібного заміні змінних у математичному аналізі. Це дало змогу визначити операцію інтегрування на випадкових багатовидах, створювати конструкції, аналогічні тим, що використовуються в аналітичній механіці, перейти до побудови теорії відкритих динамічних систем при сильних випадкових збуреннях. Ефективність такого підходу було продемонстровано на прикладі стохастичних процесів Іто в працях [2—5].

Особливість запропонованого в роботі методу полягає в тому, що відбувається відображення не точки, а її околу за формальним правилом. Поняття зсуву вздовж реалізації траєкторії у даній схемі відсутнє. Це є однією з відмінностей від побудов у теорії Малявена [6]. Перехід до стохастичних рівнянь конкретних реалізацій відбувається на основі співставлення динаміки елементу просторової структури, маркованої числом, із динамікою реалізації траєкторії, для якої це число є початковим значенням. Ця можливість обумовлена близькістю, в імовірніс-ному сенсі, на кожному з часових перетинів, траєкторій, що стартували в області вихідного околу.

Наведемо деякі результати застосування даного підходу в теорії випадкових процесів, пов'язаних з розв'язками узагальнених стохастичних рівнянь Іто, спираючись на працю [6], на відміну від якої, подамо результати для нецент-рованих стохастичних мір Пуассона.

Нехай $x(t)$ — процес, визначений на R^n, і є розв'язком системи стохастичних диференціальних рівнянь (СДР) [1]:

$$dx_i(t) = a_i(t; x(t))dt + b_{i,k}(t; x(t))\, dw_k(t) + \int\limits_{\mathrm{R}(\gamma)} g_i(t; x(t); \gamma)\, \nu(dt; d\gamma), \tag{1}$$

$$x(t) = x(t, x(0))|_{t=0} = x(0), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \geq 0,$$

де $w(t)$ — m-вимірний вінерівський процес, $\nu(t; \Delta\gamma)$ — однорідна за t випадкова міра Пуассона.

Щодо коефіцієнтів $a(t; x)$, $b(t; x)$ і $g(t; x; \gamma)$ будемо вважати, що вони обмежені та неперервні разом зі своїми похідними

$$\frac{\partial a_i(t; x)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial b_{i,k}(t; x)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial g_i(t; x; \gamma)}{\partial x_j}, \quad i, j = \overline{1,n}$$

за сукупністю змінних $(t; x; \gamma)$.

Цих умов достатньо для існування випадкових величин

$$J_{i,j}(t) = \underset{|\Delta| = \Delta_j \to 0}{l.i.m.} \frac{x_i(t; x(0) + \Delta) - x_i(t; x(0))}{\Delta_j},$$

які можуть бути знайдені як розв'язки (1) і системи стохастичних рівнянь

$$\begin{aligned} dJ_{i,j}(t) = J_{l,j}(t) \Bigg[&\frac{\partial a_i(t; x(t))}{\partial x_l(0)} dt + \\ &+ \beta \frac{\partial b_{i,k}(t; x(t))}{\partial x_l(0)} dw_k(t) + \\ &+ \int\limits_{\mathrm{R}(\gamma)} \frac{\partial g_i(t; x(t))}{\partial x_l(0)} \nu(dt; d\gamma) \Bigg], \end{aligned} \tag{2}$$

$$J_{i,j}(t) = J_{i,j}(t; x(0))|_{t=0} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

За допомогою випадкових величин $J_{i,j}(t)$ можна побудувати будь-які випадкові багатовиди, зв'язавши їх з конфігураційними багатовидами вихідного, початкового багатовиду:

$$M(0; x(0; \lambda)) = \\ = (\lambda \in D \subset \mathrm{R}^r, \quad x(0; \lambda) = x(\lambda) \in \mathrm{R}^n, \quad r \leq n).$$

Ця операція зіставлення — аналог заміни змінних у теорії інтегрування в математичному аналізі. Необхідно тільки враховувати, що у цьому випадку будуть фігурувати випадкові величини, отримані з відповідних елементів $J_{i,j}(t)$ — розв'язків (2).

Введемо такі визначення деяких стохастичних геометричних структур, аналогів класичних.

Означення 1. *Векторною варіацією дуги* $L(t)$, *узгодженої з процесом* $x(t; x(0; \lambda))$, *назвемо випадкову структуру вигляду:*

$$\delta\vec{l}(t) = \vec{e_i}\,\delta x_i(t) = \vec{e_i}\, J_{i,j}(t) d_\lambda x_j(0; \lambda), \ \lambda \in (0,1),$$

де $(\vec{e_i}, \vec{e_j}) = \delta_{i,j}$, $x(0; \lambda)$ — параметричне задання кривої $L(0)$; $J_{i,j}(t)$ — елементи матриці Якобі, $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Означення 2. *Елементом стохастичного об'єму, що породжується випадковим процесом* $x(t; x(0))$, *назвемо структуру*:

$$d\Gamma(t) = J(t) d\Gamma(x(0)),$$

де $J(t)$ *— якобіан, побудований з елементів*

$$J_{i,j}(t; x(0)), \ d\Gamma(x) = \prod_{i=1}^{n} dx_i.$$

На основі означень 1, 2 можна ввести такі випадкові структури:

$$\begin{aligned} I_{\Gamma(t)}(t) &= \underbrace{\int \cdots \int}_{\Gamma(t)} f(t; z) d\Gamma(z) = \\ &= \underbrace{\int \cdots \int}_{\Gamma(0)} f(t; x(t; y)) J(t) d\Gamma(y), \end{aligned} \tag{3a}$$

де

$J(t) = \dfrac{D(x_1(t); ...; x_{2\bar{n}}(t))}{D(x_1(0); ...; x_{2\bar{n}}(0))}$ — якобіан перетворення,

$$I_L(t) = \int\limits_{L(t)} \vec{f}(t; x)\delta\vec{l}(t) = \\ = \int\limits_{L(0)} f_i(t; x(y; t))J_{i,j}(t)\delta x_j(\gamma) \quad (3б)$$

та одержати для них твердження аналогічні теоремам з математичного аналізу.

Інтегрування за випадковим об'ємом $\Gamma(t)$, дугою $L(t)$ реалізується на основі інтегральних сум Рімна, поняття середньоквадратичної границі, для будь-яких неперервних за z, загалом, випадкових функцій $f(t; z)$. На побудовані випадкові величини переносяться методи та співвідношення інтегрального числення.

Зауваження 1. *Аналогічно можна будувати й інші стохастичні структури. Але в подальшому, нам достатньо наведених.*

Спираючись на (3), можемо перейти до розв'язку питання про умови інваріантності (збереження) цих структур, їх детермінованої поведінки тощо.

Умови збереження фазового об'єму

У класичній механіці доводиться, що якщо рух фазової точки $\vec{x}(t) = \vec{x}(t; \vec{x}(0)) \in R^{2\bar{n}}$ підпорядкований рівнянням Гамільтона, то одним з інваріантів є фазовий об'єм (теорема Ліувілля):

$$\Gamma(t) = \int\limits_{V(0)}\!\!...\!\!\int \frac{D(x_1(t); ...; x_{2\bar{n}}(t))}{D(x_1(0); ...; x_{2\bar{n}}(0))} \prod_{i=1}^{2\bar{n}} dx_i(0);$$

$$\Gamma(V(0)) = \int\limits_{V(0)}\!\!...\!\!\int \prod_{i=1}^{2\bar{n}} dx_i(0),$$

де $V(0)$ — довільна область початкових значень $\vec{x}(0)$.

Для стохастичних гамільтонових систем питання про інваріантність фазового об'єму, тобто виконання рівності

$$J(t) = 1 \ \ \forall t \ge 0,$$

при вінерівських збуреннях ($g(x(t); t; \gamma) \equiv 0$ в (1)), розв'язується позитивно [2; 3; 6].

Враховуючи наявність в (1) пуассонівських збурень, використовуючи (2) та узагальнену формулу Іто [1], отримуємо рівняння для $J(t)$ [7]:

$$dJ(t) = J(t)\mathrm{K}(t)dt + \\ + J(t)\frac{\partial b_{i,k}(x(t); t)}{\partial x_\ell} dw_k(t) + \\ + \int\limits_{R(\gamma)} \{J([J_{i,j}(t) + \frac{\partial g_i(x(t); t; \gamma)}{\partial x_l} J_{l,j}(t)]) - \\ - J(J_{i,j}(t))\}\nu(dt, d\gamma)$$

$$J(t)\big|_{t=0} = 1, \quad (4)$$

де

$$\mathrm{K}(t) = \left\{\frac{\partial a_i(x(t); t)}{\partial x_i} + \right. \\ + \frac{1}{2}\frac{\partial b_{i,k}(x(t); t)}{\partial x_i}\frac{\partial b_{j,k}(x(t); t)}{\partial x_j} - . \\ \left. - \frac{\partial b_{j,k}(x(t); t)}{\partial x_i}\frac{\partial b_{i,k}(x(t); t)}{\partial x_j}\right\}.$$

Із властивостей матриць і детермінантів випливає, що

$$J(J_{i,j}(t) + \frac{\partial g_i(x(t); t; \gamma)}{\partial x_l} J_{l,j}(t)) = \\ = J(t)\det\left[\mathrm{E} + \mathrm{G}\left(\frac{\partial g_i(x(t); t; \gamma)}{\partial x_j}\right)\right], \quad (5)$$

де E і G — матриці $n \times n$ відповідно, одинична та побудована з елементів $\dfrac{\partial g_i(x(t); t; \gamma)}{\partial x_j}$.

Враховуючи (5), замість (4) отримуємо:

$$dJ(t) = J(t)\{\mathrm{K}(t)dt + \frac{\partial b_{i,k}(x(t); t)}{\partial x_i} dw_k(t) + \\ + \int \det\left(\left[\mathrm{G}\left(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(x(t); t; \gamma)}{\partial x_j}\right)\right] - 1\right)\nu(dt, d\gamma)\}; \quad (6)$$

$$J(t)\big|_{t=0} = 1.$$

За умови, що

$$\det\left[\mathrm{G}\left(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(x; t; \gamma)}{\partial x_j}\right)\right] \ge 1,$$

можна скористатися методом знаходження розв'язку лінійного узагальненого рівняння Іто [1; с. 273—274].

Розв'язок (6) можна представити в такому вигляді:

$$J(t) = \exp\left\{\int_0^t \left[\mathrm{K}(\tau) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_{i,k}(x(\tau); \tau)}{\partial x_i}\right)^2\right] d\tau + \right. \\ + \int_0^t \frac{\partial b_{i,k}(x(\tau); \tau)}{\partial x_i} dw_k(\tau) + \\ \left. + \int_0^t \int\limits_{R(\gamma)} \ln\left\{\det\left[\mathrm{G}\left(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(x(\tau); \tau; \gamma)}{\partial x_j}\right)\right]\right\}\nu(d\tau, d\gamma).\right.$$

Вимога $J(t) \equiv 1 \ \forall t \geq 0$ приводить до таких обмежень:

$$\frac{\partial a_i(x;t)}{\partial x_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{j,k}(x;t)}{\partial x_i}\frac{\partial b_{i,k}(x;t)}{\partial x_j} = 0; \qquad (7)$$

$$\frac{\partial b_{j,k}(x;t)}{\partial x_j} = 0;\ k = \overline{1,m}; \qquad (8)$$

$$\det\left[\mathrm{G}\left(\delta_{i,j} + \frac{\partial g_i(x;t;\gamma)}{\partial x_j}\right)\right] = 1,\ \forall x,\gamma. \qquad (9)$$

У загальній постановці: знаходження підобластей інваріантності $J(t)$ — умови (7)—(9) будуть уже визначальними [7].

Ядра інтегрального інваріанта

Нехай $\rho(t;x;\omega)$ — випадкова функція, вимірна щодо потоку σ-алгебр $\{F\}_0^T$, $F_{t_1} \subset F_{t_2}$, $t_1 < t_2$, узгодженого із процесами $w(t)$ та $\nu(t;\Delta\gamma)$ (надалі індекс ω будемо опускати) і для неї виконані співвідношення:

$$\int_{R^n} \rho(t;x) f(t;x) d\Gamma(x) =$$
$$= \int_{R^n} \rho(0;y) f(t;x(t;y)) d\Gamma(y); \qquad (10)$$

$$\int_{R^n} \rho(0;x)\, d\Gamma(x) = 1; \qquad (11)$$

$$\rho(0;x) \geq 0, \quad \lim_{|x|\to\infty} \rho(0;x) = 0, \qquad (12)$$

де $d\Gamma(x) = \prod_{i=1}^{n} dx_i$, $x(t;y)$ — розв'язок рівняння (1) для будь-якої неперервної функції $f(t;x)$.

Якщо $f(t;x) \equiv 1$, то з умов (10)—(12) випливає, що

$$\int_{R^n} \rho(t;x) d\Gamma(x) = \int_{R^n} \rho(0;y) d\Gamma(y) = 1.$$

Тобто,

$$\int_{R^n} \rho(t;x) d\Gamma(x) = 1$$

є функціоналом, що зберігається в часі.

У подальших побудовах рівність (10) розглядається як основна.

Означення 3. *Функцію* $\rho(t;x) \geq 0$ *будемо називати стохастичним ядром, стохастичною щільністю інтегрального інваріанта, якщо виконується рівність* (10).

Побудуємо рівняння для знаходження $\rho(t;x)$, яке на класі довільних невипадкових функцій $f(t;x)$, неперервних разом зі своїми включно до другої, похідними по x та першої по t, будуть забезпечувати умови (10)—(12).

За узагальненою формулою Іто:

$$d_t f(t;x(t)) = \left[\frac{\partial f(t;x(t))}{\partial t} + a_i(t;x(t))\frac{\partial f(t;x(t))}{\partial x_i} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} b_{ik}(t;x(t)) b_{jk}(t;x(t)) \frac{\partial^2 f(t;x(t))}{\partial x_i x_j}\right] dt +$$
$$+ b_{ik}(t;x(t)) \frac{\partial f(t;x(t))}{\partial x_i} dw_k(t) +$$
$$+ \int_{R(\gamma)} \left[f\left(x(t) + g(t;x(t);\gamma)\right) - f(t;x(t))\right] \nu(dt;d\gamma). \qquad (13)$$

де $x(t)$ — розв'язок рівняння (1).

Візьмемо похідну по t від обох частин рівності (7), враховуючи що $f(t;x)$ не є випадковою:

$$\int_{R^n} \left(f(t;x) d_t \rho(t;x) + \rho(t;x) \frac{\partial f(t;x)}{\partial t} dt \right) d\Gamma(x) =$$
$$= \int_{R^n} \rho(0;y) d_t f(t;x(t;y))\, d\Gamma(y). \qquad (14)$$

Тоді, за виразом (10) та формулою (13) рівність $V(0)$ (14) перетворюється на:

$$\int_{R^n} f(t;x) d_t \rho(t;x) d\Gamma(x) =$$
$$= \int_{R^n} d\Gamma(x) \rho(t;x) \left[\left[a_i(t;x) \frac{\partial f(t;x)}{\partial x_i} + \right.\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} b_{ik}(t;x) b_{jk}(t;x) \frac{\partial^2 f(t;x)}{\partial x_i\, \partial x_j}\right] dt +$$
$$+ b_{ik}(t;x) \frac{\partial f(t;x)}{\partial x_i} dw_k(t) +$$
$$\left. + \int_{R(\gamma)} [f\left(t;x+g(t;x;\gamma)\right) - f(t;x)] \nu(dt;d\gamma)\right]. \qquad (15)$$

Розглянемо у формулі (15) інтеграл:

$$I = \int_{R^n} d\Gamma(x) \rho(t;x) f\left(t; x + g(t;x;\gamma)\right). \qquad (16)$$

Виконаємо заміну змінних:

$$x + g(t;x;\gamma) = y. \qquad (17)$$

Зауваження 2. Область інтегрування у (16) ділимо на підобласті, що не перетинаються, та на яких реалізується однозначна відповідність у (17) між x, y. У подальшому використовуємо єдине позначення розв'язку $x^{-1}(t;y;\gamma)$ рівності (17), відносно x для цих підмножин.

З урахуванням зауваження 2, інтеграл (16) можна подати у такому вигляді:

$$I = \int_{R^n} d\Gamma(y) \rho\left(t; y - g(t; x^{-1}(t;y;\gamma);\gamma)\right) \times$$
$$\times f(t;y)\, D\left(x^{-1}(t;y;\gamma)\right), \qquad (18)$$

де $D\left(x^{-1}(t; y; \gamma)\right)$ — якобіан переходу від x до y.

У формулі (18) перепозначимо змінну y на x. Тоді останній інтегральний доданок у (15) набуває вигляду:

$$\int_{R^n} d\Gamma(x)\rho(t; x) \int_{R(\gamma)} [\, f\left(t; x+g(t; x; \gamma)\right)-$$

$$-f(t;x)]\nu(dt;d\gamma) = -\int_{R^n} d\Gamma(x) f(t;x) \int_{R(\gamma)} [\rho(t;x)-$$

$$-\rho\left(t; x-g(t; x^{-1}(t; x; \gamma); \gamma)\right) D\left(x^{-1}(t; x; \gamma)\right)]\times$$

$$\times\nu(dt;d\gamma). \qquad (19)$$

Виконуючи у (15) інтегрування по частинах, за умови, що

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(t; x) a_i(t; x) f(t; x) = 0;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(t; x) b_{ik}(t; x) f(t; x) = 0;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(t; x) b_{ik}(t; x) f(t; x) = 0;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \rho(t; x) b_{ik}(t; x) b_{jk}(t; x) \frac{\partial\, f(t; x)}{\partial x_i} = 0;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} f(t; x) \frac{\partial}{\partial x_i} \rho(t;x) b_{ik}(t; x) b_{jk}(t; x) = 0.$$

Ураховуючи (19), від (15) переходимо до рівності:

$$\int_{R^n} d\Gamma(x) f(t; x)[d_t\left(\rho(t; x)\right)+$$

$$+\frac{\partial \rho(t; x) b_{ik}(t; x)}{\partial x_i} dw_k(t) +$$

$$+\left(\frac{\partial\left(\rho(t; x) a_i(t; x(t))\right)}{\partial x_i} -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t; x) b_{ik}(t; x) b_{jk}(t; x)\right)}{\partial x_i \partial x_j}\right) dt -$$

$$-\int_{R(\gamma)} \left\{\rho\left(t; x-g(t; x^{-1}(t; x; \gamma); \gamma)\right) D\left(x^{-1}(t; x; \gamma)\right)-\right.$$

$$\left.-\rho(t; x)\;\right\}\nu(dt; d\gamma)] = 0. \qquad (20)$$

За довільністю $f(t;x)$ рівність (20) буде мати місце, якщо інтегральний інваріант $\rho(t; x)$ є розв'язком стохастичного рівняння:

$$d_t\rho(t;x) = -\frac{\partial \rho(t; x) b_{ik}(t; x)}{\partial x_i} dw_k(t) +$$

$$+\left(-\frac{\partial\left(\rho(t; x) a_i(t; x)\right)}{\partial x_i} +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\left(\rho(t; x) b_{ik}(t; x) b_{jk}(t; x)\right)}{\partial x_i \partial x_j}\right) dt \;+$$

$$+\int_{R(\gamma)} \Big[\rho\left(t; x-g(t; x^{-1}(t; x; \gamma); \gamma)\right)\times$$

$$\times D\left(x^{-1}(t; x; \gamma)\right) - \rho(t; x)\Big]\nu(dt; d\gamma),$$

за умов:

$$\rho(t; x)\,|_{t=0} = \rho(0; x) \in C_0^2;\; \lim_{|x|\to\infty}\rho(0; x) = 0\,;$$

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial \rho(0; x)}{\partial x_i} = 0\,.$$

Висновки

Запропоноване означення інтегралів за випадковими багатовидами дає змогу досліджувати умови збереження певних функціоналів від випадкових процесів, будувати рівняння для знаходження ядер інтегральних інваріантів. Крім того, отримані висновки дають можливість перейти до моделювання еволюції ансамблів динамічних систем, що знаходяться під когерентним випадковим впливом, тобто стохастичних збурень з великим радіусом охоплення. Ілюстрацією таких збурень можуть слугувати турбулентні пульсації, розміри яких значно перевищують відстань між об'єктами.

Прикладом є зміни атмосферного тиску з часом, реакція глядачів світових чемпіонатів на перебіг гри.

На сучасному етапі розвитку науки і техніки дослідження таких ансамблів стає більш актуальним.

Тому важливим стають і підходи, що дозволяють підійти адекватно до застосування математичного моделювання реальних об'єктів такого типу.

Більш детально зосередимо увагу на цих питаннях і в наступних роботах.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Гихман И. И.* Стохастические дифференциальные уравнения/ И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1968. — 354 с.

2. *Дубко В. А.* Интегрирование по начальным данным, интегральный инвариант Пуанкаре и уравнения Гамильтона для диффузионных процессов // Укр. матем. журн. — Т. 33. — № 1. / В. А. Дубко. — 1981. — С. 802—804.

3. *Дубко В. А.* Интегральные инварианты для одного класса стохастических дифференциальных уравнений / В. А. Дубко. — ДАН УССР, 1984. — № 1, серия А. — С. 18—21.

4. *Дубко В. А.* Законы сохранения открытых систем / В. А. Дубко // Вероятностные методы в биологии: сб. трудов. — К. : Институт математики АН УССР, 1985. — С. 48—55.

5. *Дубко В. А.* Вопросы теории и применения стохастических дифференциальных уравнений / В. А. Дубко. — Владивосток : ДВНЦ АН СССР, 1989. — 185 с.

6. *Дубко В. А.* Открытые эволюционирующие системы (Некоторые аспекты математического мо-

делирования)/ В. А. Дубко // Перша міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (26—27 квіт. 2002 р.) (Додаток): зб. текстів доповідей. — К. : ВНЗ ВМУРоЛ, 2002. — С. 14—31.

7. *Дубко В. А*. Условие инвариантности фазового объема, связанного с решениями обобщенного уравнения Ито / В. А. Дубко // Друга міжнародна науково-практична конференція «Відкриті еволюціонуючі системи» (01—30 груд. 2003 р.): зб. текстів доп. — К. : ВНЗ ВМУРоЛ, 2004. — Т. 2. — С. 64—66.

Стаття надійшла до редакції 16.02.2011.
Стаття надійшла до редакції після переробки 09.06.2011.