

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РЕГУЛЯРНИХ ВИХРОВИХ СТРУКТУР У КУТОВИХ КОНФІГУРАЦІЯХ ОБТІЧНИХ ПОВЕРХОНЬ

Шквар Є. О., д-р техн. наук, доц.

Національний авіаційний університет
int 2080@ukr.net

Побудовано ефективний числовий метод моделювання тривимірної турбулентної течії вздовж ребра двогранного кута. Розглянуто адаптацію до даної задачі запропонованої автором гібридної алгебрично-диференціальної моделі турбулентної в'язкості. Наведені результати демонструють відтворення розрахунками визначальних характеристик основної та вторинних течій і можуть ефективно бути використані в різноманітному енергетичному устаткуванні та швидкісних транспортних засобах.

Ключові слова: турбулентність, течія в куті; напруження Рейнольдса, гібридна алгебрично-диференціальна модель турбулентної в'язкості, вторинні вихрові системи.

The effective numerical method for three-dimensional turbulent flow along an edge of a streamwise corner is elaborated. The hybrid algebraically-differential model of turbulent viscosity has been adopted to the given problem. Presented results have demonstrated reproduction in calculations the governing characteristics of main and secondary vortical flows and can be effectively implemented in different energetic equipment and high-speed transport vehicles.

Keywords: turbulence, corner flow, Reynolds stresses, hybrid algebraic-differential model of turbulent viscosity, secondary vortical systems.

Постановка проблеми

Відтворення особливостей формування течій поблизу поверхонь є вкрай важливою задачею для визначення опору та цілеспрямованого пошуку шляхів його зменшення та, відповідно, поліпшення енергоощадності транспортних засобів. Є добре відомим багаторазово підтверджений експериментально факт того, що негладкі поверхні з регулярним поздовжнім мікропрофілюванням у деяких випадках, незважаючи на збільшену порівняно з гладкою поверхнею площею змочування, при обтіканні забезпечують ефект зменшення тертя до 5–7 % [1–3]. Наочним прикладом використання цього ефекту в природі є шкіра риб, вкрита лускою (крім захисних функцій сприяє також і зменшенню тертя. Найбільш показовою в цьому розумінні є шкіра акул, вкрита регулярними геометричними структурами зубоподібної форми, в зв'язку з чим вони і отримали назву зубчиків (*denticles*). Багаточисельні експериментальні дослідження мікропрофілюваних поверхонь переконливо свідчать про існування можливості використання цього ефекту в технічних об'єктах шляхом штучного профілювання поверхні в напрямку переважаючого розвитку течії [1–3], але спроби впровадження даної технології гальмуються складністю визначення оптимальних розмірів та профілів рифлення поверхні для очікуваних умов її експлуатації. Інша практично важлива проблема, що зумовлює інтерес до течій в областях спряження кількох поверхонь, пов'язана з взаємовпливом (інтерферен-

цією) примежових шарів, що розвиваються на них, результатом чого є формування додаткових поздовжніх вихрових структур [4; 5]. На вихроутворення витрачається додаткова енергія, а отже, ефект зазначеної взаємодії проявляє себе як додатковий опір. Тому оптимізація форми зчеплення поверхонь та розробка методів зменшення інтенсивності вихрових систем є практично важливою проблемою. Обидві наведені вище задачі об'єднує той фактор, що в результаті обтікання рельєфу профільованої поверхні та при формуванні течії в областях зчеплення двох різних аеродинамічних поверхонь течія набуває властивостей просторовості, що суттєво ускладнює експериментальні дослідження. У випадку дослідження течії над мікропрофілюваною поверхнею експериментальне визначення детальної структури течії унеможливується вкрай малими розмірами мікроборозен. Тому побудова математичних моделей даних течій є перспективною науковою проблемою, оскільки вона не тільки забезпечить розширення меж, що накладаються експериментальними методиками, а й дозволить глибше зрозуміти фізичні ефекти, які зумовлюють виникнення регулярних поздовжніх вихрових систем. Крім того, враховуючи турбулентний режим, який реалізується на переважній площі обтічної поверхні, математичне моделювання зазначеного кола задач дозволить визначити механізми взаємодії складових тензора рейнольдсових напружень, які відповідають за генерацію вихроутворення. Таким чином, дана проблематика окрім суто практичної значущості має також і вагомий науковий актуальність.

Цілі дослідження, аналіз попередніх результатів

Мета даного дослідження — побудова математичної моделі турбулентної течії, що формується уздовж ребра кута між двома плоскими поверхнями при їх спряженні під прямим кутом. Ця конфігурація є максимально спрощеною, але їй притаманні ті ж найсуттєвіші особливості, що мають місце і для складніших випадків. Водночас вона дає змогу дослідити ефект взаємодії двох турбулентних примежових шарів у максимально чистому вигляді. Стан експериментального вивчення даної конфігурації повною мірою висвітлено В. І. Корніловим у монографії [4]. Найсуттєвішим згідно з викладеними в праці [4] результатами є висновок про визначальну роль градієнтів турбулентних напружень у формуванні вихрових систем течії вздовж кута, що дозволяє віднести ці вихроутворення до вторинних вихрових структур другого виду за класифікацією Л. Прандтля.

Цей фактор, у свою чергу, зумовлює важливість коректного моделювання складових тензора рейнольдсових напружень при теоретичному розгляді задачі.

Аналіз ряду можливих підходів до розв'язання цієї задачі виконано А. Арналем та Ж. Кустеем у праці [5]. Зокрема, було порівняно дві моделі — алгебричну та двопараметричну диференціальну ($k-\varepsilon$) для визначення турбулентної в'язкості та обґрунтовано необхідність їх удосконалення шляхом урахування анізотропних властивостей тензора напружень Рейнольдса. До цілком задовільних результатів привело застосування в праці [5] для досягнення даної мети алгебричної моделі рейнольдсових напружень (АМРН) [6]. У цій роботі здійснено спробу узагальнення та застосування для даної задачі підходу, що розвивається автором, з побудови гібридної алгебрично-диференціальної моделі турбулентної в'язкості.

Математичне формулювання задачі

Характеристики просторової течії у кутовій конфігурації визначатимемо вирішенням системи усереднених за Рейнольдсом диференціальних рівнянь, що описує рух рідини чи газу у зв'язаній з обтічним тілом декартової системі координат (x, y, z) , поданий на рис. 1.

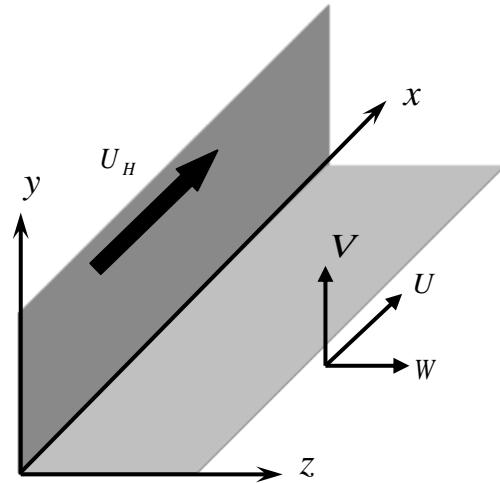


Рис. 1. Схема формування течії вздовж ребра двогранного кута

Ураховуючи, що пріоритетною задачею є відтворення процесів вихроутворення, подамо систему у формі, яка однією з розрахункових змінних містить саме поздовжню складову вихору Ω_x [4].

Зважаючи на розгляд безвідривного обтікання, спростимо вихідні рівняння, відкидаючи в них члени поздовжньої дифузії та нехтуючи зміною тиску по нормалі до обтічних поверхонь, у результаті чого отримуємо параболізовану форму вихідної системи. Задля спрощення запису завдяки подібності структури отриманих рівнянь переносу подамо їх для узагальненої змінної $\varphi = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\Omega}_x, \bar{k}, \bar{\varepsilon}\}$ рівнянням вигляду:

$$\lambda_\varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u} \varphi}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v} \varphi}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w} \varphi}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(D_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(D_\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \right) + S_\varphi, \quad (1)$$

де $\bar{u} = U/U_H$, $\bar{v} = V/U_H$, $\bar{w} = W/U_H$ — збезрозмірені компоненти швидкості уздовж осей (x, y, z) відповідно; U_H — швидкість зовнішньої течії; D_φ — дифузійний коефіцієнт; S_φ — джерельний член; λ_φ — коефіцієнт, які визначаються згідно з таблицею.

Параметри узагальненого рівняння (1)

φ	λ_φ	D_φ	S_φ
\bar{u}	1	$\frac{1}{Re}$	$-\frac{d\bar{p}}{d\bar{x}} - \bar{u}^2 \frac{2}{U_H} \frac{dU_H}{d\bar{x}} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial \bar{z}}$

σ	0	1	$\frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}}$
w	0	1	$-\frac{\partial \bar{\Omega}_x}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x} \partial \bar{z}}$
$\bar{\Omega}_x$	1	$\frac{1}{\text{Re}}$	$\bar{\Omega}_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{\Omega}_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \bar{\Omega}_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} +$ $+\frac{\partial^2}{\partial \bar{y} \partial \bar{z}} (\bar{v}^2 - \bar{w}^2) +$ $+\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \right) \bar{v}' w' -$ $-\bar{u} \bar{\Omega}_x \frac{2}{U_H} \frac{dU_H}{d\bar{x}}$
\bar{k}	1	$\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_k}$	$P - \bar{\varepsilon} - \bar{u} \bar{k} \frac{3}{U_H} \frac{dU_H}{d\bar{x}}$
ε	1	$\frac{1}{\text{Re}} + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon}$	$(C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \bar{\varepsilon}) \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{k}} - \frac{4\bar{u} \bar{\varepsilon}}{U_H} \frac{dU_H}{d\bar{x}}$

Тут $\text{Re} = U_H a / \nu$ — число Рейнольдса, обрaховане за характерним лінійним розміром a (звичай півширина каналу чи ширина грані); ν — кінематичний коефіцієнт в'язкості; $x = x/a$, $y = y/a$, $z = z/a$ — безрозмірені координати; $\bar{v}_t = \nu_t / (U_H a)$, $\bar{p} = p / (\rho U_H^2)$, $\bar{k} = k / (\rho U_H^2)$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon a / (\rho U_H^3)$ — безрозмірені коефіцієнти турбулентної в'язкості, тиск, кінетична енергія турбулентності та швидкість її дисипації; ρ — густина; $P = \nu_t \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right]$ — член породження k ; $\Omega_x = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}}$, $\Omega_y = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}$, $\Omega_z = \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}$ — компоненти вихору; $-\bar{u}'v'$, $-\bar{u}'w'$, $-\bar{v}'w'$, \bar{v}^2 , \bar{w}^2 — найбільш визначальні з погляду відтворення в просторовому прилежовому шарі структури вторинних течій компоненти тензора рейнольдсових напружень.

Моделювання турбулентності

Для моделювання останніх, беручи до уваги працю [5], застосовано АМРН [6]:

$$-\bar{u}'v' = \bar{v}_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right); \quad -\bar{u}'w' = \bar{v}_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right);$$

$$-\bar{v}'w' = -\frac{C_3}{C_\mu} \frac{\bar{v}_t}{k} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} + \bar{u}'w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right),$$

$$\bar{v}' - \bar{w}' = \frac{2C_3}{C_\mu} \frac{\bar{v}_t}{k} \left(\bar{u}'v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \bar{u}'w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} \right), \quad (2)$$

де $C_3 = 2(4C_2 - 1)/11C_1$, $C_1 = 1,5$, $C_2 = 0,3$ — модельні коефіцієнти.

Коефіцієнт турбулентної в'язкості ν_t визначається просторовою модифікацією гібридної алгебрично-диференціальної моделі, побудованої автором на базі моделі В. Т. Мовчана [7] та Джонса-Лаундера у такому вигляді:

$$\nu_t = \nu_{t \text{ out}} \tanh(\nu_{t \text{ in}} / \nu_{t \text{ out}}), \quad \nu_{t \text{ in}} = l \nu_{*3D},$$

$$l = \kappa l_{3D} \sqrt{\tau} D_m, \quad l_{3D}^+ = \frac{l_{3D} \nu_{*3D}}{\nu}, \quad \nu_{t \text{ out}} = C_\mu k^2 / \varepsilon,$$

$$D_m = \tanh \frac{\sinh^2[\chi_1 l_{3D}^+ \sqrt{\tau}] \tanh[\sinh^2(\chi_2 l_{3D}^+ \sqrt{\tau})]}{\kappa l_{3D}^+ \sqrt{\tau}}, \quad (3)$$

де модельні коефіцієнти визначаються сталими значеннями з таких інтервалів $\kappa = 0,37 - 0,45$, $\chi_1 = 0,068 - 0,072$, $\chi_2 = 0,223$, $C_\mu = 0,09$.

Визначення зазначених у (3) просторових масштабів поблизу різних елементів обтічної поверхні з урахуванням можливої взаємодії суттєво залежить від геометричної конфігурації останньої. Для випадку течії вздовж ребра прямокутного двогранного кута запропоновані до використання такі співвідношення:

$$l_{3D} = (y^{-1} + z^{-1})^{-1} \quad (4)$$

— для лінійного масштабу, де y , z — відстані до кожної з граней відповідно;

$$\nu_{*3D} = \sqrt{\tau_\Sigma / \rho} = \sqrt{4(-\bar{u}'v')^2 + (-\bar{u}'w')^2} = \sqrt{4\nu_{*y}^4 + \nu_{*z}^4} \quad (5)$$

— для масштабу швидкості, де

$$\nu_{*y} = \sqrt{-\bar{u}'v'}, \quad \nu_{*z} = \sqrt{-\bar{u}'w'}.$$

В остаточному вигляді завдання полягає в побудові на кожному кроці вздовж маршової координати x ітераційного процесу відшукування розв'язку системи рівнянь (1), замикаючих співвідношень (2)—(5) та відповідних конфігурації, що розглядається, межових умов. З метою тестування спроможності розробленої математичної моделі течії (1)—(5) разом з відповідним методом розрахунку до відтворення вторинних течій, характерних для обтікання типових кутових конфігурацій двох поверхонь у напрямку ребра їх перетину, проведено тестування розрахунком течії вздовж каналу квадратного поперечного перерізу.

Розрахунок розпочинався зі вхідного перерізу, де задавалися рівномірні профілі $U(y, z) = U_\infty$, $k(y, z) = k_o = (0,005 \div 0,01)U_\infty^2$, $\varepsilon_o = (10 \div 100)C_\mu k_o^2$.

На стінках $y = 0$ та $z = 0$ задавалися умови прилипання $u = 0$, $\bar{v} = 0$, $w = 0$ та $k = k_{**}$, $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{**}$ згідно з $k_{**} = \nu_*^2 / \sqrt{C_\mu}$, $\varepsilon_{**} = \nu_*^3 / (\kappa y_{**})$, $\nu_{t**} = C_\mu k_{**}^2 / \varepsilon_{**} = \nu_* \kappa y_{**}$, $y_{**} = (10 - 70)\nu / \nu_*$.

У площинах симетрії каналу $y = 1$ та $z = 1$ задавалися умови $u'_y = w'_y = k'_y = \varepsilon'_y = 0$, $\nu = 0$ та $u'_z = v'_z = k'_z = \varepsilon'_z = 0$, $w = 0$ відповідно. Незважаючи на застосування маршової розрахункової процедури, на кожному її кроці уздовж x координати організовувався ітераційний процес з метою узгодження розв'язків усіх рівнянь системи (1). Вихід з ітераційного процесу на кожному поточному кроці ($n+1$) відбувався при виконанні на ітерації k умови

$$\left| \frac{((\varphi^{n+1})_k - (\varphi^{n+1})_{k-1}) / (\varphi^{n+1})_{k-1}}{(\varphi^{n+1})_{k-1}} \right| < 10^{-4}$$

для усіх рівнянь системи (1) одночасно, після чого здійснювався перехід до наступного кроку уздовж маршового напрямку x .

Розрахунок, представлений на рис. 2, відтворював умови проведення експерименту Gessner F. V., Po J. K., Emeri A. F. [8], $U_\infty \approx 15$ м/с, повітря, півширина каналу $a = 0,127$ м.

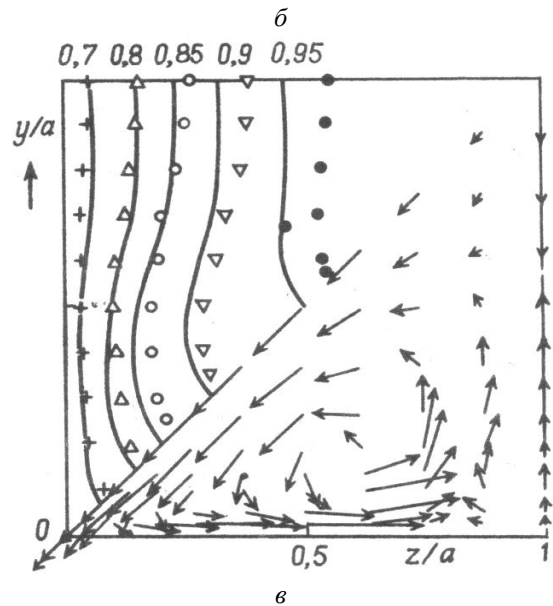
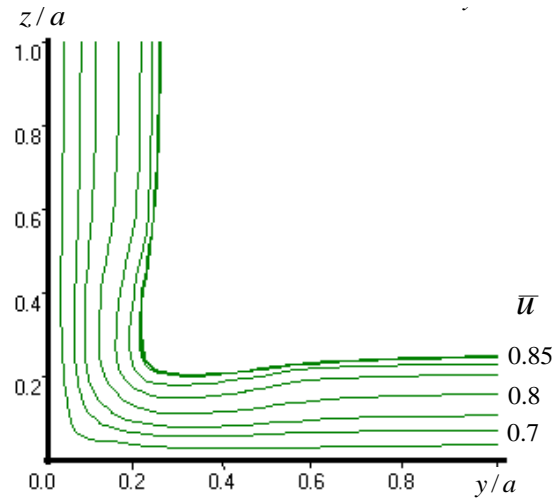
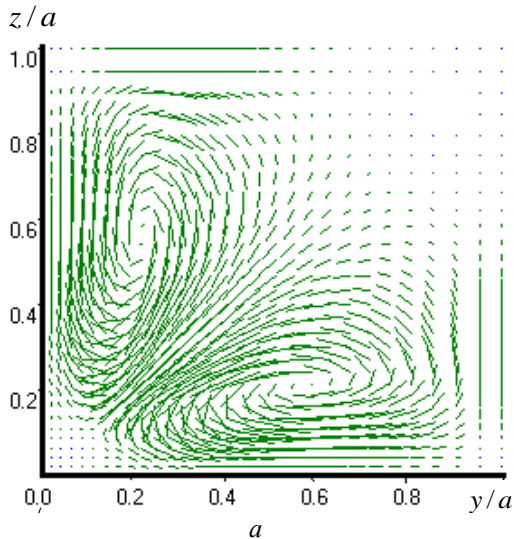


Рис. 2. Розрахунок течії в лівому нижньому квадранті каналу квадратного перерізу:
 а — результати відтворення системи вторинних вихорів;
 б — розрахунок ізотак поздовжньої швидкості;
 в — результати розрахунків [5] (лінії) порівняно з даними експериментів [8] (точки, вектори)

Результати відповідних розрахунків на основній ділянці формування течії $x/(2a) = 84$ порівняно як з результатами зазначених експериментів, так і з результатами розрахунків [5] свідчать про відповідність розрахованої системи симетричних вторинних течій із закрученням до ребра кута вздовж його бісектриси (рис. 2, а) та зумовленого цим вихровим рухом характерного вигину ізотак $\bar{u}(y, z)$ (рис. 2, б) експериментальним даним [8] та розрахункам [5] (рис. 2, в). Отриманий результат переконує в коректності розроблених модельних представлень відносно до розглянутої класичної тестової задачі.

Висновки

Підсумовуючи проведений аналіз та отримані результати, можна зробити висновок, що розроблені математична модель та відповідний розра-

хунковий метод відтворюють ефекти взаємного впливу граней прямокутного кута на формування турбулентної зсувної течії і, зокрема, генерацію системи вторинних вихрових течій несуперечливо до відомих експериментальних даних та з належною мірою деталізації відтворення визначальних характеристик течії.

Гібридний принцип побудови моделі турбулентної в'язкості демонструє працездатність у випадку наявності декількох поверхонь, що сумісно впливають на формування течії.

Подальші дослідження стосуватимуться розширення кола просторових конфігурацій на випадок різних рельєфів поздовжнього профілювання обтічної поверхні.

ЛІТЕРАТУРА

1. Уменьшение турбулентного трения с помощью риблетов (по материалам открытой иностранной печати) // Обзор ЦАГИ № 259. — М. : ЦАГИ, 1991. — 38 с.
2. Okamoto S. Effect of Riblet Shape on Turbulent Drag Reduction / S. Okamoto, T. Uchida, T. Yoneyama, K. Taki-guchi, S. Kimura // Transactions of the Japan Soc. of Mechanical Engineers. — 2000–2002. — В 66(642). — Р. 60–68.
3. Suzuki Y. Turbulent Drag Reduction Mechanism above a Riblet Surface / Y. Suzuki, N. Kasagi // AIAA Journal. — Sept., 1994. — Vol. 32, № 9. — Р. 1781–1790.
4. Корнилов В. И. Пространственные пристенные турбулентные течения в угловых конфигурациях / В. И. Корнилов // Новосибирск : Наука, 2000. — 400 с.
5. Арналь А. Численное исследование течений вдоль двугранного угла / А. Арналь, Ж. Кустей // Трехмерные турбулентные пограничные слои; под ред. Х. Фернхольца, Е. Краузе. — М. : Мир. — 1985. — С. 331–343.
6. Launder B. E. Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure / B. E. Launder, G. J. Reece, W. Rodi // Journal Fluid Mech. — 1975. — V. 68. — Р. 537–566.
7. Мовчан В. Т. Різномірні математичні моделі коефіцієнта турбулентної в'язкості / В. Т. Мовчан, Є. О. Шквар // Прикладная гидромеханика. — 2010. — Т. 12, № 1. — С. 55–67.
8. Gessner F. B. Measurement of developing turbulent flow in a square duct / F. B. Gessner, J. K. Po, A. F. Emer // Proc. of the Symp. On Turbulent Shear Flows, Univ. Park, Pennsylvania, April 18–20, 1977.

Стаття надійшла до редакції 06.06.11.