

УДК 004.054.53 (045)

ВИКОРИСТАННЯ АНАЛІТИЧНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ У ЗАДАЧАХ СТИСНЕННЯ ЗОБРАЖЕНЬ

О. К. Юдін, д-р техн. наук, проф.; К. О. Курінь; О. І. Варченко

Національний авіаційний університет

e-mail:kszi@ukr/net

Проаналізовано існуючі алгоритми перетворення зображень. Розглянуто математичні моделі перетворень: дискретного косинусного перетворення, дискретного вейвлет-перетворення, перетворення Хаара, перетворення Уолша–Адамара в контексті розв'язання задач стиснення інформаційних потоків даних. Наведено математичні моделі, реалізовані програмними засобами Mathcad. Проведено розрахунок характеристик, що визначають ефективність перетворень для зміни статистичних характеристик тестового зображення. Як дані метрик обрано перехресну кореляцію значень яскравостей сусідніх пікселів та перерозподіл дисперсії між значеннями яскравостей парних та непарних пікселів зображення.

Ключові слова: перетворення зображень, кореляція, дисперсія, піксель.

The analysis of existent algorithms of transformation of images is provided. The mathematical models of transformations are considered, among them: discrete cosine transformation, discrete wavelet transformation, transformation of Haar, transformation of Walsh–Hadamard. Marked mathematical models are realized programmatic with the tools of Mathcad. The calculation of characteristics which determines efficiency of transformations for a test image is conducted. Cross-correlation of values of brightness of nearby pixels and redistribution of dispersions between the values of brightness of even and odd pixels of image are chosen as such characteristics.

Keywords: transformation of images, correlation, dispersion, pixel

Вступ

Сучасна теорія кодування джерел повідомлення різних класів є досить широкою та розгалуженою з наукового погляду. Тут знайшла своє відображення велика кількість різних технологій, методів, алгоритмів теорії інформації і кодування, а також безпосередньо методи компресії різних типів даних: текстів, зображень, відео- та аудіоповідомлень. Серед безлічі наукових напрямів особливе місце займає стиснення зображень або компактне представлення даних.

Методи стиснення зображень зазвичай повинні з урахуванням адаптації для конкретного класу зображень. Існують різні підходи до компресії графічних образів.

Один з них — використання спеціальних аналітичних перетворень базової матриці пікселів у вигляді, який сприяє подальшому ефективному кодуванню на базі видалення або скорочення статистичної надмірності даних.

Відомо, що формування статистичної надмірності матриці зображення, зазвичай є результатом кореляційних зв'язків між пікселями, які характеризують джерело повідомлення.

Зрозуміло, що впровадження в процес оброблення та стиснення даних аналітичних перетворень, які виконують завдання декореляції, буде означати одночасне видалення надмірності [2].

Поняття перетворення широко застосовується в математиці. За його допомогою розв'язується багато задач у різних галузях науки.

Основна ідея їх використання полягає в зміні математичної величини (числа, вектора, функції або іншого об'єкта) з метою надання їй іншої форми, в якій вона має корисні властивості.

Перетворена величина використовується під час розв'язання задачі або здійснення деяких обчислень, після чого до результату застосовується зворотне перетворення для повернення до вихідної форми.

Постановка задачі

Мета статті — дослідження існуючих методів стиснення, а саме процедур аналітичних перетворень матриці зображень з умови їх впливу на статистичну структуру даних.

До **задач дослідження** належать:

- аналіз процедур перетворень, їх математичних моделей;
- побудова програмних моделей, які реалізують аналітичні перетворення;
- визначення основних статистичних метрик, які описують ефективність перетворень з погляду подальшого стиснення даних, а також оцінювання цих величин для перетвореного тестового зображення.

Базові методи стиснення зображень традиційно використовують процедури попередньої трансформації матриці пікселів (статистично корельованих) базового зображення для зміни статистично-структурних характеристик, перетворюючи її у представлення, в якому взаємозв'язок між пікселями зменшується або втрачається (де-

кореляція). Процес стиснення відбудеться ефективно, якщо нові кількісні показники зазначених характеристик перетворених матриць зображення будуть, в середньому, менше початкових.

Принцип дії перетворень матриць зображень

Перетворення, які використовуються для стиснення зображень, мають бути швидкими для обчислення і, по можливості, легко реалізовуватися програмно. Далі обговорюватимуться такі перетворення [1; 3]:

1. Дискретне косинус-перетворення (ДКП, DCT, discrete cosine transform) є добре вивченим і досить ефективним перетворенням, яке застосовується в таких методах компресії, як JPEG і MPEG. Відомі алгоритми швидкого обчислення DCT роблять цей метод прийнятним для конкретних застосувань.

Методи стиснення зображень використовують двовимірне DCT, яке задається формулою

$$G_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2n}} C_i C_j \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 p_{xy} \times \cos\left(\frac{(2y+1)j\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2x+1)i\pi}{16}\right), \quad (1)$$

при $0 \leq i, j \leq n-1$.

Зображення розбивається на блоки пікселів $p_{x,y}$ розміру $n \times n$ (у подальших розрахунках використовуватиметься $n = 8$), і рівняння (1) використовуються для знаходження коефіцієнтів $G_{i,j}$ для кожного блоку пікселів. Якщо допускається часткова втрата інформації, то коефіцієнти квантуються. Декодер відновлює стислий блок даних (точно або приблизно), обчислюючи зворотне DCT (IDCT) за формулою:

$$p_{xy} = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 G_{ij} C_i C_j \times \cos\left(\frac{(2y+1)j\pi}{16}\right) \cos\left(\frac{(2x+1)i\pi}{16}\right), \quad (2)$$

де $C_f = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, f = 0; \\ 1, f > 0. \end{cases}$

2. Перетворення Уолша–Адамара (WHT, Walsh–Hadamard transform) швидко обчислюється (при цьому використовується лише додавання і віднімання), але його характеристики, виражені в термінах концентрації енергії, як буде показано далі, нижчі, ніж у DCT.

Для заданого блоку пікселів $N \times N$ (тут N має бути ступенем двійки $N = 2^n$), його двовимірне пряме і зворотне перетворення Уолша–

Адамара (вони позначаються WHT і IWHT відповідно) визначаються за допомогою таких рівнянь:

$$H(u, v) = \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} P_{xy} g(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} P_{xy} (-1)^{\sum_{i=0}^n [b_i(x)p_i(u)+b_i(y)p_i(v)]}, \quad (3)$$

$$P_{xy} = \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} H(u, v) h(x, y, u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} H(u, v) (-1)^{\sum_{i=0}^n [b_i(x)p_i(u)+b_i(y)p_i(v)]}, \quad (4)$$

де $H(u, v)$ — результат перетворення (тобто, коефіцієнти WHT), величина $b_i(u)$ дорівнює біту i в двійковому представленні цілого числа u , а $p_i(u)$ визначається за допомогою таких рекурентних співвідношень:

$$\begin{aligned} p_0(u) &= b_{n-1}(u); \\ p_1(u) &= b_{n-1}(u) + b_{n-2}(u); \\ p_2(u) &= b_{n-2}(u) + b_{n-3}(u); \\ &\dots \\ p_{n-1}(u) &= b_1(u) + b_0(u). \end{aligned} \quad (5)$$

3. Перетворення Хаара є дуже простим і швидким. Воно є простим вейвлет-перетворенням.

Перетворення Хаара використовується на практиці для відображення піддіапазону частот і використовує функцію шкали $\phi(t)$ і вейвлет $\psi(t)$, які показані на рис. 1, а, для представлення широкого класу функцій. Це представлення має вигляд суми:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(t-k) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} \psi(2^j t - k),$$

де c_k і $d_{j,k}$ — коефіцієнти, які необхідно визначити.

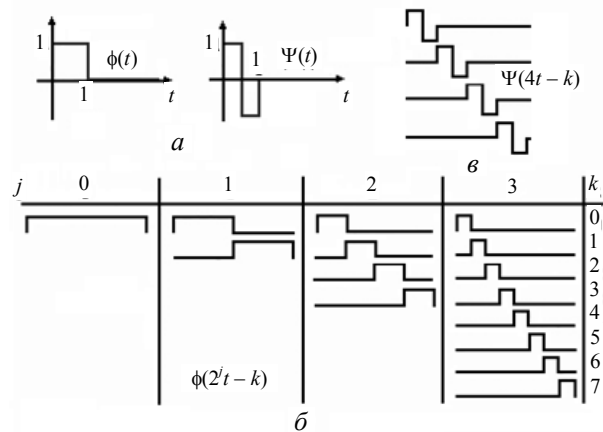


Рис. 1. Базисна шкала Хаара та вейвлетні функції

Базисна функція шкали $\phi(t)$ є одиничним ім-

$$\text{пульсом } \phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1, \\ 0, & t \in (-\infty; 0) \cup [1; \infty) \end{cases}$$

Функція $\phi(t-k)$ є копією функції $\phi(t)$, зсунутої вправо на число k . Аналогічно, функція $\phi(2^j t - k)$ забезпечує стиснення аргументу в два рази порівняно з $\phi(t)$ (це ще можна назвати зменшенням масштабу). Зрушені функції використовуються для апроксимації функції $f(t)$ при різних моментах часу, а функції з різними масштабами потрібні для апроксимації функції $f(t)$ при вищому дозволі.

На рис. 1, б подано графіки функцій $\phi(2^j t - k)$ при $j=0, 1, 2, 3$ і при $k=0, 1, \dots, 7$. Базисна вейвлет-функція Хаара $\psi(t)$ є ступінчастою функцією

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0,5; \\ 0, & 0,5 \leq t < 1. \end{cases}$$

Загальна вейвлет-функція $\psi(2^j t - k)$ отримується з $\phi(t)$ зрушенням вправо на k одиниць і зміною масштабу в 2^j рази. Чотири вейвлет-функції $\psi(2^j t - k)$ при $k=0, 1, 2, 3$ показані на рис. 1, в.

Перетворення Хаара ґрунтується на функціях Хаара $h_k(x)$, які задаються при $x \in [0, 1]$ і для $k=0, 1, \dots, N-1$, де $N=2^n$.

Перш, ніж задати це перетворення, нагадаємо, що будь-яке ціле число k можна представити у вигляді суми $k=2^p + q - 1$, де $0 \leq p \leq n-1$, q дорівнює 0 або 1 при $i \leq q \leq 2^p$ при $p \neq 0$.

Базисні функції Хаара задаються формулами

$$h_0(x) = \frac{1}{\sqrt{N}}, \text{ при } 0 \leq x \leq 1; \quad (6)$$

$$h_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} 2^{p/2}, & \text{при } \frac{q-1}{2^p} \leq x \leq \frac{q-1/2}{2^p}; \\ -2^{p/2}, & \text{при } \frac{q-1/2}{2^p} \leq x \leq \frac{q}{2^p}; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (7)$$

4. Дискретне вейвлетне перетворення (ДВП, DWT, discrete wavelet transform). Найпростіший спосіб опису вейвлетних перетворень використовує добуток матриць.

Розглянемо один з найпоширеніших вейвлетів, а саме вейвлет Добеши, який прийнято позначати D4. Він заснований на чотирьох коефіцієнтах c_0, c_1, c_2, c_3 , значення яких

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; & c_1 &= \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; \\ c_2 &= \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}; & c_3 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Матриця W перетворення:

$$c_0, W = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_3 & -c_2 & c_1 & -c_0 \\ c_2 & c_3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_0 & c_1 \\ c_1 & -c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & c_3 & -c_2 \end{pmatrix}$$

Якщо цю матрицю застосувати до вектор-стовпця вихідних даних (x_1, x_1, \dots, x_n) , то її верхній рядок дасть зважену суму

$$S_1 = c_0 x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3 + c_3 x_4.$$

Третій рядок матриці визначить суму $S_2 = c_0 x_3 + c_1 x_4 + c_2 x_5 + c_3 x_6$, і всі рядки з непарними номерами зададуть аналогічні зважені суми. Такі суми збігаються зі згортками вихідного вектора (x_1, x_1, \dots, x_n) , і чотирма коефіцієнтами c_0, c_1, c_2, c_3 . На мові вейвлетів усі вони називаються гладкими коефіцієнтами, а разом вони утворюють згладжувальний фільтр H .

Аналогічно другий рядок матриці W породжує величину $D_1 = c_3 x_1 - c_2 x_2 + c_1 x_3 - c_0 x_4$, а всі останні парні рядки матриці визначають подібні згортки. Кожне число D_i називається *детальним коефіцієнтом*, а всі разом вони утворюють фільтр G . Фільтр G не є згладжувальним. Насправді, його коефіцієнти підбрані так, щоб фільтр видавав на вихід маленькі числа, коли дані (x_1, x_1, \dots, x_n) корельовані. Разом G і H називаються *квадратурними дзеркальними фільтрами* (QMF, *quadrature mirror filters*).

Таким чином, вейвлет-перетворення будь-якого зображення є проходженням вихідного образу через фільтр QMF, який складається з низькочастотного фільтру (H) і високочастотного фільтру (G).

Оцінювання ефективності перетворень

У програмному середовищі MathCAD були сформовані програмні модулі, які реалізують описані вище перетворення. Дані перетворення були застосовані до тестового зображення розмірністю 1024×1024 пікселів, яке належить до класу повнокольорових неперервно-тонових зображень (рис. 2).



Рис. 2. Тестове зображення

Зображення було проскановане растровим способом (тобто, рядок за рядком) і згруповане в пари прилеглих пікселів. Оскільки пікселі корельовані, два пікселі (x, y) у парі зазвичай мають близькі значення.

Розглянемо тепер ці пари у вигляді точок на площині і відзначимо їх на графіку. Відомо, що точки вигляду (x, x) лежать на прямій з нахилом 45° , рівняння якої має вигляд $y = x$, тому всі точки, які описують пікселі зображення, будуть сконцентровані біля цієї прямої.

На рис. 3 зображено такий графік для тестового зображення, де значення пікселів лежать в інтервалі $[0, 255]$, та гістограму, яка описує частоти появи цих значень у матриці зображення. Більшість точок утворюють «хмару» біля цієї лінії.

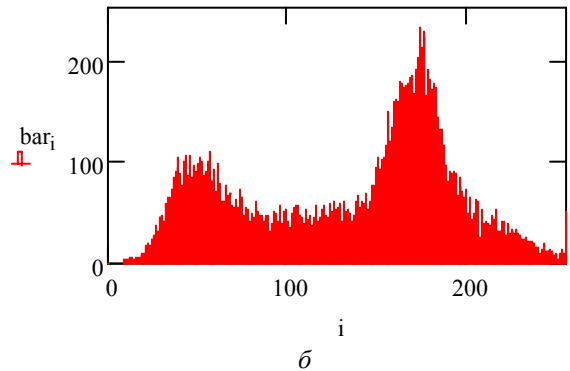
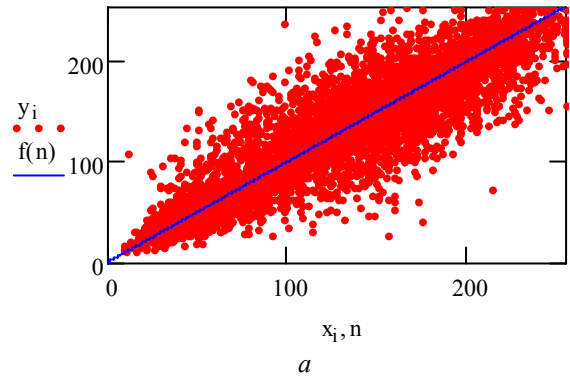
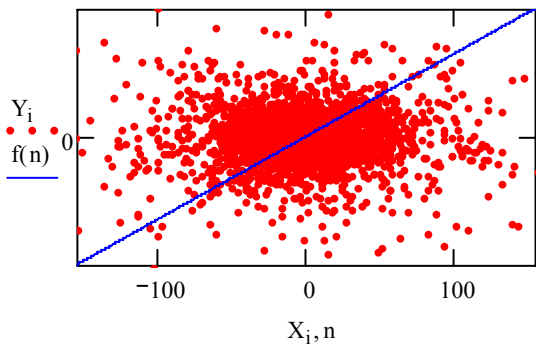
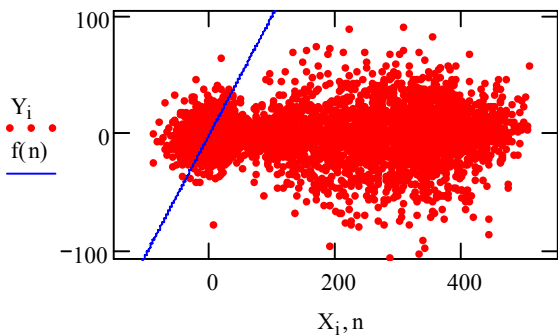
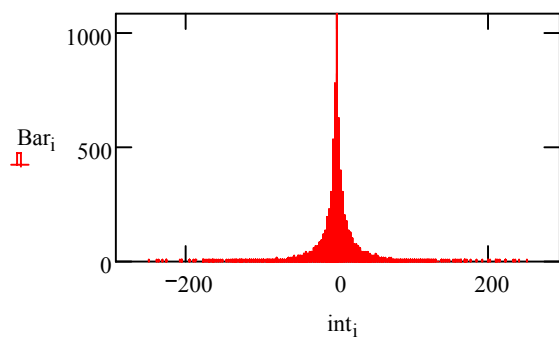


Рис. 3. Розподіл пікселів зображення

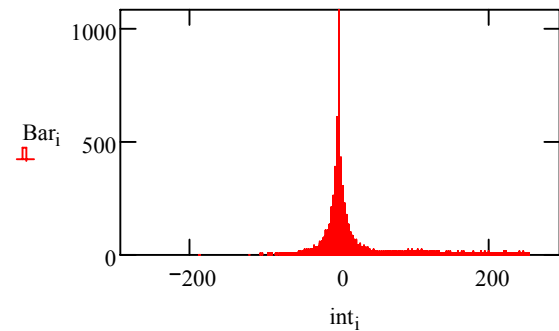
На рис. 4, показано подібні графіки, побудовані для пікселів перетвореного тестового зображення, а також гістограми, які описують частоти появи коефіцієнтів перетворення для ДКП (рис. 4, *a*), ДВП (рис. 4, *б*), перетворення Хаара (рис. 4, *в*) та перетворення Уолша–Адамара (рис. 4, *г*).



a



б



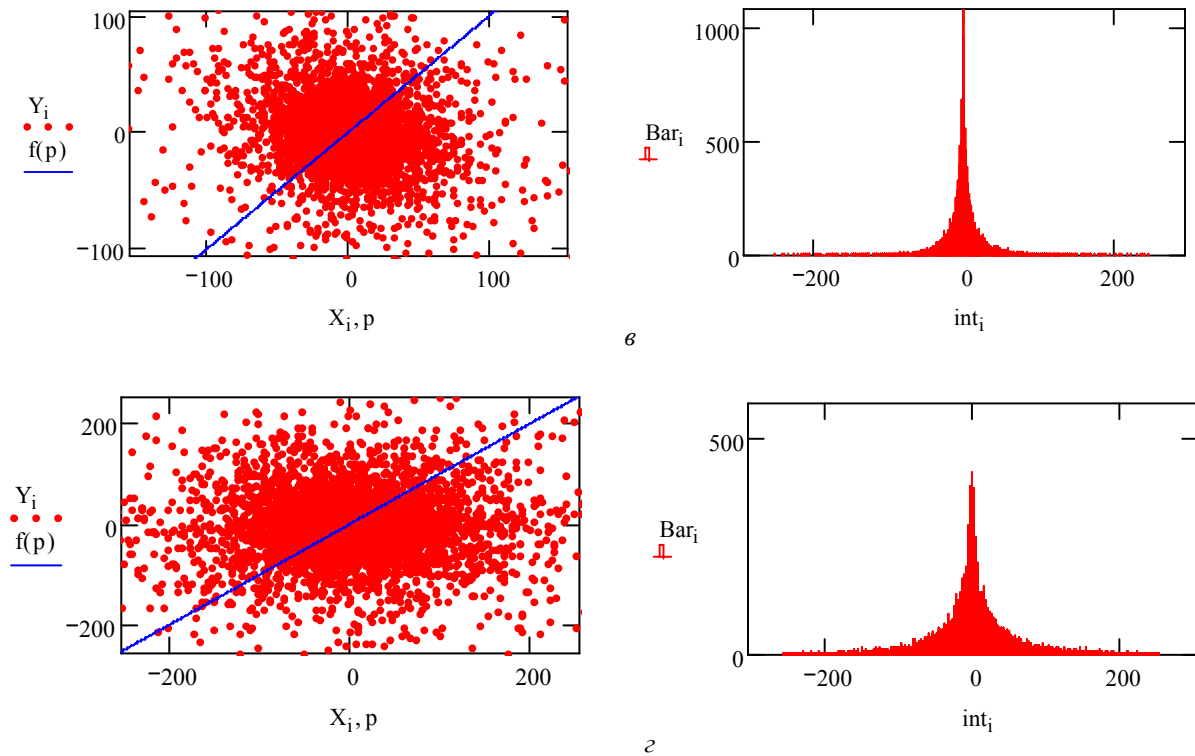


Рис. 4. Розподіл значень пікселів перетвореного тестового зображення для ДКП (а), ДВП (б), перетворення Хаара (в) та перетворення Уолша–Адамара (г)

Більшість точок перетвореної «хмари» матимуть координату y , близьку до нуля, а координата x зміниться не дуже сильно.

Оскільки координати точок відомі до i після перетворення, легко обчислити зменшення кореляції. Сума $\sum_i x_i y_i$ називається перехресною кореляцією точок (x_i, y_i) . Дана величина характеризує ефективність перетворення — чим вона менша, тим більший виграш у стисненні очікується.

Значення перехресної кореляції для точок, що описують значення пікселів для первинного та перетворених зображень, були обчислені та зведені в табл. 1.

Таблиця 1

Перехресні кореляції пікселів вихідного та перетвореного зображень

Початкове зображення	ДКП	ДВП
$1,758 \cdot 10^8$	$-2,79 \cdot 10^5$	$2,21 \cdot 10^4$
Перетворення Хаара	Перетворення Уолша–Адамара	
$7,522 \cdot 10^6$	$9,595 \cdot 10^6$	

Як видно з табл. 1, значення перехресної кореляції для перетворених зображень суттєво зменшилося порівняно з вихідним зображенням.

Згідно з отриманими величинами найбільше скорочення надмірності забезпечує ДКП.

Ще одна величина, яка характеризує виграш від перетворення зображення — це енергія розподілу пікселів.

Енергію розподілу пікселів ототожнюють з дисперсією значень координат, які описують величини пікселів зображення. Очевидно, що дисперсія нових координат y стала малою, а дисперсія коефіцієнтів x зросла.

Отже, можна зробити висновок, що перетворення концентрує енергію в координатах x , за рахунок чого досягається стиснення зображення в подальшому. Значення енергій розподілу пікселів для первинного та перетворених зображень були обчислені та зведені у табл. 2.

Таблиця 2

Дисперсії пікселів вихідного та перетвореного зображень

Класи перетворень	Дисперсія координати x	Дисперсія координати y
Початкове зображення	3394	3423
ДКП	41394	917,165
ДВП	24940	217,585
Перетворення Хаара	42410	1008
Перетворення Уолша–Адамара	333100	5209

Висновок

У праці досліджено існуючі процедури аналітичних перетворень матриці зображень з умови їх впливу на статистичну структуру даних.

Проаналізовано процедури перетворень, їх математичних моделей; побудовано програмні моделі, які реалізують аналітичні перетворення; визначено основні статистичні метрики, які описують ефективність перетворень з погляду подальшого виконання процедур стиснення даних, а також проведено оцінювання цих величин для перетвореного тестового зображення.

Отримані числові значення дають змогу зробити висновок, що з метою досягнення більшого

виграшу від подальшого кодування стандартними методами, найбільші переваги має використання ДКП-перетворень за умови зміни статистичних характеристик матриці зображення.

ЛІТЕРАТУРА

1. Селомон Д. Стиснення даних, зображень і звуку / Д. Селомон. — М. : Техносфера, 2006. — 386 с.
2. Фомин А. А. Основы сжатия информации / А. А. Фомин. — СПб. : СПбГУ, 1998. — С. 27–30.
3. Salomon D. Variable-length codes for compression methods / D. Salomon. — Springer-Verlag London Limited, 2007. — 205 p.

Стаття надійшла до редакції 23.06.2011.