УДК 534.3

ФУНКЦІЯ ГРІНА КОНВЕКТИВНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ЖОРСТКОСТІННОЇ ТРУБИ

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.

Національний авіаційний університет

int2080@ukr.net

Побудовано функцію Гріна тривимірного хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з усередненою течією. Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної механічної конструкції і є періодичною по азимутальній координаті та симетричною відносно осьового перерізу труби, в якому розташоване одиничне точкове імпульсне джерело. Кожен член цього ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді труби вниз та вгору за течією від вказаного джерела. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти усередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу труби, де знаходиться джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу усередненої течії на функцію Гріна зменшується, проявляючись, окрім іншого, у зменшенні зазначеної її асиметрії. У випадку ж відсутності усередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно вказаного поперечного перерізу і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби.

Ключові слова: функція Гріна, конвективне хвильове рівняння, труба, усереднена течія.

Green's function of the three-dimensional wave equation for an infinite straight rigid-walled pipe of circular cross-section with mean flow is found. This function is written in terms of the series of the pipe acoustic modes, and is periodic in the azimuthal co-ordinate and symmetric about the pipe axial section of the unit point impulse source location. Each term of the series is a sum of the direct and reverse waves propagating in the corresponding pipe mode downstream and upstream of the noted source. In the found Green's function, the mean flow effects are reflected in the direct manner. The effects become more significant as the flow Mach number increases, causing, in particular, the appearance and further growth of the function asymmetry about the pipe cross-section of the source location. And vice versa, the decrease of the Mach number results in the decrease of the effects and, in particular, the decrease of the indicated asymmetry of the function. In the case of mean flow absence the obtained Green's function is symmetric about the indicated cross-section and coincides with the corresponding Green's function for the investigated pipe, which is available in the scientific literature.

Keywords: Green's function, convective wave equation, pipe, mean flow.

Вступ

Проблеми знаходження й дослідження акустичних полів у трубах становлять значний інтерес у нафтогазовій промисловості, автомобіле- та літакобудуванні, архітектурі, медицині, комунальному господарстві тощо [1–5]. Усі вони, незалежно від типу труб й акустичних джерел у них, в принципі можуть бути розв'язані за допомогою методу функцій Гріна.

Проте застосування цього методу є доцільним лише за умови існування принципової можливості побудови відповідної функції Гріна.

Ця можливість, окрім кваліфікації й мистецтва дослідника, залежить від геометрії досліджуваної труби та форми її поперечного перерізу, фізичних властивостей її стінок та умов її закріплення, акустичних умов на кінцях труби та фізичних властивостей зовнішнього і внутрішнього середовища, наявності або відсутності течії в ній тощо.

Як показує аналіз наукової літератури, серед випадків, які визначаються різними комбінаціями зазначених факторів, найбільш дослідженими є випадки нескінченної прямої жорсткостінної труби прямокутного та кругового поперечного перерізів [1; 3; 4–10]. Для цих випадків побудовано відповідні функції Гріна хвильового рівняння і рівняння Гельмгольца, а також, з їх допомогою, одержано вирази для різних характеристик акустичних полів, згенерованих відповідними джерелами в зазначених трубах.

Проте всі ці результати, як правило, обмежуються в разі відсутності течії в трубі.

Якщо ж наявність течії і береться до уваги, то її ефекти у відповідних функціях Гріна та/або кінцевих результатах проявляються лише в неявному вигляді[1] [1; 3; 5; 8].

Цей недолік частково виправляється у даній статті. Тут будується функція Гріна хвильового рівняння для нескінченної прямої жорсткостінної труби круглої форми поперечного перерізу з усередненою течією.

[1] У явному вигляді (тобто у вигляді явних математичних залежностей досліджуваних характеристик акустичних полів від параметрів течії) ці ефекти проявляються лише у відповідних масштабних законах та різного роду кількісних оцінках.

ISSN 2075-0781. Наукоємні технології, 2012. № 1 (13)

Ця функція має явну залежність від параметрів течії, а у разі її відсутності — збігається з відповідною функцією Гріна для зазначеної труби, яка наведена в працях [1; 3; 5–8; 10].

Постановка задачі

Розглядається нескінченна пряма, нерухома жорсткостінна труба кругового поперечного перерізу радіусом a, в якій з усередненою осьовою швидкістю U тече рідина[1]. У трубі задані як завгодно розташовані акустичні джерела різної природи, які створюють у ній акустичне поле. Це поле описується специфічним типом тривимірного хвильового рівняння, яке в науковій літературі часто називають *тривимірним конвективним хвильовим рівнянням* [8, 10]:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2 p_a}{dt^2} - \nabla^2 p_a = \gamma \ , \qquad (1)$$

де p_a — акустичний тиск; c_0 — швидкість звуку в незбуреній рідині; t — час, а функція γ описує сумарний розподіл зазначених джерел). Необхідно побудувати функцію Гріна рівняння (1) для досліджуваної труби. (Наявність терміну ***конвективне*** у назві цього рівняння зумовлено тим, що воно має повну похідну по часу $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{U}\cdot\nabla$, яка містить ***конвективну*** похідну $\mathbf{U}\cdot\nabla$ (тут $\mathbf{U}$ — вектор швидкості усередненої течії в трубі, ∇ — оператор набла, а крапка означає скалярне множення цих векторів). У разі відсутності усередненої течії ($\mathbf{U}=0$) ***конвективна*** похідна в рівнянні (1) зникає, і воно збігається з класичним тривимірним хвильовим рівнянням).

Функція Гріна

Функція Гріна $\mathrm{G}(\mathbf{r},t;\mathbf{r}_0,t_0)$ рівняння (1) описує акустичний тиск у точці поля $\mathbf{r}$ у момент часу t, який генерується в трубі в момент часу t_0 одиничним точковим імпульсним джерелом, розташованим у точці $\mathbf{r}_0$. Рівняння, яке вона задовольняє, одержується з виразу (1) шляхом заміни в останньому p_a на G і γ на $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(t-t_0)$:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2\mathrm{G}}{dt^2} - \nabla^2\mathrm{G} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\delta(t-t_0). \qquad (2)$$

Тут $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ та $\delta(t-t_0)$ є відповідно просторовою тривимірною та часовою одновимірною дельта-функціями Дірака, а їхній добуток описує зазначене акустичне джерело.

У циліндричній системі координат (r,φ,z), яка вводиться для розв'язування сформульованої у попередньому розділі задачі, рівняння (2) має такий вигляд:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{d^2\mathrm{G}}{dt^2} - \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\mathrm{G}}{\partial z^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{r}\delta(r-r_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)\delta(t-t_0); \qquad (3)$$

$$0 \le r, r_0 \le a;\ 0 \le \varphi, \varphi_0 \le 2\pi;\ |z| < \infty;$$

$$|z_0| < \infty;\ |t| < \infty;\ |t_0| < \infty,$$

де друга повна похідна по часу записується таким чином:

$$\frac{d^2}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\nabla\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial t\partial z} + U^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \qquad (4)$$

Вектор швидкості усередненої течії $\mathbf{U}$ та оператор набла ∇ виглядають так:

$$\mathbf{U} = U_r\mathbf{e}_r + U_\varphi\mathbf{e}_\varphi + U_z\mathbf{e}_z = U\mathbf{e}_z;$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\mathbf{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z.$$

Крапка між векторами $\mathbf{U}$ та ∇ вказує на їх скалярне множення; $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$ та $\mathbf{e}_z$ є ортами координатних осей r, φ та z відповідно, а початок системи координат вибрано на осі труби.

Граничними умовами для функції G є умова випромінювання у нескінченність та рівність нулеві її радіальної похідної на нерухомій жорсткій стінці досліджуваної труби[2]:

$$\left.\frac{\partial\mathrm{G}}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \qquad (5)$$

Крім цього, G повинна бути симетричною відносно площини $\varphi=\varphi_0$ розташування вищезазначеного джерела:

$$\mathrm{G}\big|_{\varphi=\varphi_0+\Delta\varphi} = \mathrm{G}\big|_{\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi},\ \Delta\varphi > 0, \qquad (6)$$

періодичною по азимутальній координаті φ:

$$\mathrm{G}\big|_{\varphi=\varphi_*+2n\pi} = \mathrm{G}\big|_{\varphi=\varphi_*},\ n = \pm1, \pm2, \ldots \qquad (7)$$

і задовольняти умову причинності [6–10]:

$$\mathrm{G}\big|_{t<t_0} = 0, \qquad (8)$$

[1] Тут не вводяться в'язкість та масова густина рідини, оскільки при такій постановці задачі перша характеристика рідини взагалі не відіграє ніякої ролі (бо вважається, що згенерований звук поширюється в ідеальному стисливому середовищі [1; 3–10]), а друга відобразиться в кінцевому результаті лише у неявному вигляді (через швидкість звуку в незбуреному середовищі).

[2] Перша умова означає відсутність відбиття звуку на кінцях труби (на нескінченності), тоді як друга — рівність нулеві радіальної компоненти акустичної швидкості на її стінці.

яка свідчить про те, що до початку генерації звуку джерелом акустичного поля в трубі не було.

Розв'язок початково-граничної задачі (3)–(8) шукаємо у вигляді ряду по акустичних модах досліджуваної труби $\left\{\Psi_{nm}^{(1)}, \Psi_{nm}^{(2)}\right\}$:

$$\mathrm{G} = \sum_{j=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mathrm{G}_{nm}^{(j)} \Psi_{nm}^{(j)}; \tag{9}$$

$$\Psi_{nm}^{(1)} = J_n(\alpha_{nm} r)\cos(n\varphi);$$

$$\Psi_{nm}^{(2)} = J_n(\alpha_{nm} r)\sin(n\varphi),$$

де J_n — циліндричні функції Бесселя першого роду порядку n; $\alpha_{nm} = \zeta_{nm}/a$ — радіальні хвильові числа; ζ_{nm} — корені рівняння $J_n'(\zeta_{nm}) = 0$ ($m = 1, 2, \ldots$); а $\Psi_{0m}^{(2)} \equiv 0$.

Вибрана у такому вигляді функція G тотожно задовольняє умову (5).

У формулі (9) невідомими є коефіцієнти $\mathrm{G}_{nm}^{(j)}$. Для їх визначення підставимо вираз (9) у розписане з урахуванням (4) рівняння (3), помножимо одержане при цьому співвідношення скалярно на функції $\Psi_{nm}^{(j)}$ і врахуємо ортогональність останніх:

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \Psi_{nm}^{(j)} \Psi_{sq}^{(l)} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2, (s,q,l) = (n,m,j), \\ 0, (s,q,l) \neq (n,m,j); \end{cases}$$

$$\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2 = \begin{cases} 0,\ j=2, n=0, \\ \pi a^2 J_0^2(\alpha_{0m} a),\ j=1, n=0, \\ \dfrac{\pi a^2}{2} J_n^2(\alpha_{nm} a)\left[1 - \dfrac{n^2}{\alpha_{nm}^2 a^2}\right], n \geq 1. \end{cases} \tag{10}$$

У результаті одержимо неоднорідне диференціальне рівняння для $\mathrm{G}_{nm}^{(j)}$:

$$\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t^2} + 2\frac{M}{c_0}\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial t \partial z} - \left(1 - M^2\right)\frac{\partial^2 G_{nm}^{(j)}}{\partial z^2} +$$

$$+ \alpha_{nm}^2 G_{nm}^{(j)} = \frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0, \varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\delta\left(z - z_0\right)\delta\left(t - t_0\right), \tag{11}$$

$$|z| < \infty,\quad |z_0| < \infty,\quad |t| < \infty,\quad |t_0| < \infty,$$

в якому $M = U/c_0$ є числом Маха усередненої течії в трубі, а квадрати норм її акустичних мод $\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2$ наведено в (10).

Аналіз рівняння (11) показує, що воно, за винятком доданків, які містять число M, збігається з класичним одновимірним рівнянням Кляйна–Гордона[1], розв'язок якого для нескінченної області відомий з праць [6; 7]. Щоб позбутися цих доданків і перейти, таким чином, до зазначеного рівняння, введемо нові безрозмірні змінні:

$$Z = \frac{\lambda z}{a},\quad Z_0 = \frac{\lambda z_0}{a},\quad T = \lambda^{-1}\frac{c_0 t}{a} + M\frac{\lambda z}{a},$$

$$T_0 = \lambda^{-1}\frac{c_0 t_0}{a} + M\frac{\lambda z_0}{a},\ \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}}. \tag{12}$$

У змінних (12) рівняння (11) стає зазначеним рівнянням Кляйна–Гордона:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}_{nm}^{(j)}}{\partial T^2} - \frac{\partial^2 \mathrm{G}_{nm}^{(j)}}{\partial Z^2} + \alpha_{nm}^2 a^2 \mathrm{G}_{nm}^{(j)} = a^2\frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0, \varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2} \times$$

$$\times \delta\left(\frac{a}{\lambda}(Z - Z_0)\right)\delta\left(\frac{\lambda a}{c_0}(T - T_0 - M(Z - Z_0))\right), \tag{13}$$

$$|Z| < \infty,\quad |Z_0| < \infty,\quad |T| < \infty,\quad |T_0| < \infty.$$

Розв'язком рівняння (13) у вказаній області є суперпозиція прямої та зворотної хвиль, які поширюються відповідно вправо та вліво від джерела, розташованого в точці $Z = Z_0$ [6; 7]:

$$\mathrm{G}_{nm}^{(j)} = \frac{c_0}{2}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0, \varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\Big[\mathrm{H}\left(Z_0 - Z\right)\mathrm{H}\left(T - T_0 + Z - Z_0\right) +$$

$$+ \mathrm{H}\left(Z - Z_0\right)\mathrm{H}\left(T - T_0 - (Z - Z_0)\right)\Big] \times$$

$$\times J_0\left(\alpha_{nm} a\sqrt{(T - T_0)^2 - (Z - Z_0)^2}\right). \tag{14}$$

Тут

$$\mathrm{H}(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(\eta) d\eta = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$$

функція Хевісайда, а також було взято до уваги умову випромінювання в нескінченність, яку має задовольняти функція G.

Заміна у формулі (14) безрозмірних змінних $\{Z, Z_0, T, T_0\}$ розмірними $\{z, z_0, t, t_0\}$ на основі співвідношень (12) дає змогу одержати остаточні вирази для коефіцієнтів $\mathrm{G}_{nm}^{(j)}$ у виразі (9):

$$\mathrm{G}_{nm}^{(j)} = \frac{c_0}{2}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0, \varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\left[\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{a}(z_0 - z)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t - t_0) +\right.\right.$$

$$\left. + (M+1)\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) + \mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{a}(z - z_0)\right) \times$$

[1]Оскільки зазначені доданки з'являються в (11) внаслідок існування в (3) відмінної від нуля конвективної похідної $U\partial/\partial z$, то їх можна назвати *конвективними*, а саме рівняння (11) — *одновимірним конвективним рівнянням Кляйна–Гордона*.

$$\times \mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t-t_0)+(M-1)\frac{\lambda}{a}(z-z_0)\right)\Bigg]J_0\left(\alpha_{nm}a\sqrt{\theta}\right);$$

$$\theta=\frac{c_0^2}{\lambda^2 a^2}\left(t-t_0\right)^2+2\frac{c_0 M}{a^2}\left(t-t_0\right)\left(z-z_0\right)+$$

$$+\left(M^2-1\right)\frac{\lambda^2}{a^2}\left(z-z_0\right)^2. \qquad (15)$$

Тоді підставляння величин (15) у співвідношення (9) дає вираз для шуканої функції Гріна рівняння (1) для нескінченної прямої нерухомої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з усередненою течією:

$$\mathrm{G}=\frac{c_0}{2}\Bigg[\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{a}(z_0-z)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t-t_0)+(M+1)\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\lambda}{a}(z-z_0)\right)+\mathrm{H}\left(\frac{\lambda}{a}(z-z_0)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{\lambda a}(t-t_0)+\right.$$

$$\left.+(M-1)\frac{\lambda}{a}(z-z_0)\right)\Bigg]\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0,\varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\times$$

$$\times\Psi_{nm}^{(j)}\left(r,\varphi\right)J_0\left(\alpha_{nm}a\sqrt{\theta}\right), \qquad (16)$$

в якому змінна θ береться з (15), а межі зміни всіх аргументів функції G наведені в (3).

Отже, що функція Гріна (16) записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби $\Psi_{nm}^{(j)}$. Кожен член цього ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді вниз та вгору за течією від одиничного точкового імпульсного джерела, розташованого в поперечному перерізі труби $z=z_0$. При цьому (див. умови (6)–(8)), функція G є симетричною відносно площини $\varphi=\varphi_0$, періодичною по кутовій координаті φ і задовольняє умову причинності[1].

Подальший аналіз співвідношення (16) показує, що в побудованій функції Гріна у явному вигляді відображені ефекти усередненої течії (через числа M і $\lambda=\lambda(M)$). Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа M, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції G відносно площини $z=z_0$ розташування зазначеного джерела. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу усередненої течії на функцію G зменшується, проявляючись, у зменшенні вказаної її асиметрії. У випадку ж відсутності усередненої течії ($M=0$, $\lambda=1$) функція (16) стає симетричною відносно площини $z=z_0$ і збігається з функцією Гріна класичного тривимірного хвильового рівняння для досліджуваної труби, яка наведена в працях [6–10]:

$$\mathrm{G}\big|_{M=0}=\frac{c_0}{2}\Bigg[\mathrm{H}\left(\frac{1}{a}(z_0-z)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{a}(t-t_0)+\frac{1}{a}(z-z_0)\right)+$$

$$+\mathrm{H}\left(\frac{1}{a}(z-z_0)\right)\mathrm{H}\left(\frac{c_0}{a}(t-t_0)-\frac{1}{a}(z-z_0)\right)\Bigg]\times$$

$$\times\sum_{j=1}^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Psi_{nm}^{(j)}\left(r_0,\varphi_0\right)}{\left\|\Psi_{nm}^{(j)}\right\|^2}\Psi_{nm}^{(j)}\left(r,\varphi\right)J_0\left(\alpha_{nm}\sqrt{\theta_0}\right);$$

$$\theta_0=c_0^2(t-t_0)^2-(z-z_0)^2.$$

Висновки

1. Побудовано функцію Гріна тривимірного хвильового рівняння (див. формули (16)) для нескінченної прямої нерухомої жорсткостінної труби кругового поперечного перерізу з усередненою течією.

Ця функція записується у вигляді ряду по акустичних модах зазначеної труби, є періодичною по азимутальній координаті φ, симетричною відносно площини $\varphi=\varphi_0$ розташування одиничного точкового імпульсного джерела і задовольняє умову причинності.

2. У функції Гріна (16) кожен член ряду являє собою суму прямої та зворотної хвиль, які поширюються на відповідній моді труби вниз та вгору за течією від зазначеного джерела.

3. У побудованій функції Гріна в явному вигляді відображені ефекти усередненої течії. Ці ефекти стають вагомішими зі збільшенням числа Маха течії, зумовлюючи, зокрема, появу і подальше збільшення асиметрії функції відносно поперечного перерізу труби $z=z_0$, в якому розміщене вищевказане джерело. І навпаки, зі зменшенням числа Маха вагомість впливу усередненої течії на функцію Гріна (16) зменшується, проявляючись, у зменшенні зазначеної її асиметрії.

4. У випадку відсутності усередненої течії побудована функція Гріна є симетричною відносно перерізу $z=z_0$ і збігається з відповідною функцією Гріна для досліджуваної труби, яка наведена в науковій літературі.

5. У процесі побудови функції Гріна запропоновано перетворення (12), котре дає можливість зводити одновимірне конвективне рівняння Кляйна–Гордона (11) до його класичного одновимірного аналогу (13), і на основі відомого розв’язку останнього одержувати розв’язок першого рівняння.

[1] Раніше вже було показано (див. коментарі після формул (9) та (14)), що функція (16) задовольняє також умову (5) на стінці досліджуваної труби та умову випромінювання у нескінченність.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Борисюк А. О.* Генерація шуму обмеженою областю турбулентної течії в жорсткостінному каналі кругового поперечного перерізу / А. О. Борисюк // Вісн. Донецьк. нац. ун-ту. Сер. А. Природничі науки. — 2010. — № 1. — С. 35–41.

2. *Вовк И. В.* Особенности движения среды в каналах со стенозами / И. В. Вовк, В. Т. Гринченко, В. С. Малюга // Прикл. гідромеханіка. — 2009. — 11, №4. — С. 17–30.

3. *Davies H. G.* Aerodynamic sound generation in a pipe / H. G. Davies, J. E. Ffowcs Williams // J. Fluid Mech. — 1968. — 32, № 4. — P. 765–778.

4. *Doak P. E.* Excitation, transmission and radiation of sound from source distributions in hard-walled ducts of finite length (1): the effects of duct cross-section geometry and source distribution space-time pattern / P. E. Doak // J. Sound Vibr. — 1973. — 31, № 1. — P. 1–72.

5. *Blake W. K.* Mechanics of flow-induced sound and vibration / W. K. Blake. — New York: Acad. Press Inc., 1986. — Vol. 1, 2. — 974 p.

6. *Morse P. M.* Methods of theoretical physics / P. M. Morse, H. Feshbach. — New York : McGraw-Hill, 1953. — Vol. 1. — 997 p.

7. *Morse P. M.* Theoretical acoustics / P. M. Morse, K. U. Ingard. — New York : McGraw-Hill, 1968. — 927 p.

8. *Howe M. S.* Acoustics of fluid-structure interactions / M. S. Howe. — Cambridge : Cambridge Univ. Press, 1998. — 560 p.

9. *Crighton D. G.* Modern methods in analytical acoustics. Lecture Notes / D. G. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, M. Heckl, F. G. Leppington. — London: Springer-Verlag, 1992. — 738 p.

10. *Грінченко В. Т.* Основи акустики / В. Т. Грінченко, І. В. Вовк, В. Т. Маципура. — К. : Наук. думка, 2007. — 640 с.

Стаття надійшла до редакції 05.12.2011.