УДК 621.37: 621.391.519.21

ОЦІНЮВАННЯ ЧАСТОТИ ДИСКРЕТНО-ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО СИГНАЛУ НА ФОНІ КОРЕЛЬОВАНОГО ШУМУ

А. Я. Білецький, д-р техн. наук, проф.; ***Д. С. Дем'яник***

Національний авіаційний університет

demyanik1985@ukr.net

Порівняно ефективності ортогональних перетворень у базисах дискретно-експоненціальних функцій і функцій Віленкіна–Крестенсона під час оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на фоні адитивного корельованого гауссівського шуму.

Ключові слова: ортогональні перетворення, функції Віленкіна–Крестенсона, оцінка параметрів сигналу, марковський шум.

Efficiencies of orthogonal transformations in bases of discrete-exponential functions and functions of Vilenkin–Chrestenson for evaluations frequency of discrete-exponential signal that is received with additional correlated Gaussian noise were compared.

Keyworlds: orthogonal transforms, Vilenkin–Krestenson's functions, signal's parameters evaluation, Markov's noise.

Вступ

У радіолокації часто доводиться мати справу з шумом, спектральна щільність якого не рівномірна. При цифровій обробці даних у багатьох випадках такий шум задовільно описується за допомогою математичної моделі з використанням гауссівського закону розподілу і однозв'язного марковського ланцюга.

У статті мова йде про використання дискретних ортогональних перетворень для оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на фоні адитивної марковської гауссівської завади. Оцінювання частоти буде проводитись за допомогою дискретних ортогональних перетворювань у двох базисах:

1) базис дискретно-експоненціальних функцій (ДЕФ);

2) базис функцій Віленкіна–Крестенсона (ВКФ).

Постановка задачі

Мета даного дослідження — порівняння ефективності двох базисів, що були згадані раніше, під час розв'язання оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу, що приймається на фоні адитивного корельованого шуму. Модель сигналу описується таким виразом:

$$\dot{s}_g(i) = U \exp\left(j\frac{2\pi g i}{N} \right), \quad i = \overline{0\ldots N-1}, \ g \in [0, N)$$

де i — дискретний час; g — нормована частота сигналу; U — амплітуда; N — об'єм вибірки; j — уявна одиниця.

Як критерій ефективності виступає залежність імовірності правильної приблизної оцінки частоти від відношення сигнал/шум за потужністю. Під «приблизною оцінкою» мається на увазі пошук такої нормованої частоти g', щоб $\lim\left|g - g'\right| < 1$ (виявлення з перевіркою N гіпотез [1]).

Марковський гауссівський шум $\dot{\omega}_M(i)$ моделюється таким чином:

$$\dot{\omega}_M(0) = a(0) + jb(0);$$

$$\dot{\omega}_M(i) = \big(a(i) + jb(i)\big)\sqrt{1 - R^2} + \big(a(i-1) + jb(i-1)\big)R;$$

$$i = \overline{1\ldots N-1},$$

де $a(i)$ та $b(i)$ — випадкові величини (ВВ), підпорядковані нормальному закону розподілу з дисперсією $\psi = 1$ і нульовим математичним сподіванням (МС); R — коефіцієнт кореляції між двома відліками шуму, що відстоять один від одного за часом на один період дискретизації.

Таким чином, компоненти відліків шуму будуть підпорядковані нормальному закону розподілу, коефіцієнт кореляції між сусідніми компонентами буде дорівнювати R.

Послідовність, що приймається, може бути або сумішшю корисного сигналу $\dot{s}_g(i)$ з невідомою дійсною частотою g і шуму $\dot{\omega}_M(i)$:

$$\dot{x}(i) = \dot{s}_g(i) + \dot{\omega}_M(i),$$

або лише шумом $\dot{\omega}_M(i)$:

$$\dot{x}(i) = \dot{\omega}_M(i).$$

Основний матеріал статті. Спектральний аналіз шуму

Спектр послідовності в загальному вигляді визначається виразом:

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \dot{x}(i) f_k(i);$$

$$\dot{X}(k) = A(k) + jB(k),$$

де $\dot{X}(k)$ — k-й спектральний коефіцієнт; $\dot{x}(i)$ — i-й відлік послідовності, що була прийнята; $f_k(i)$ — i-й відлік k-ї базисної функції; $A(k)$ та $B(k)$ — квадратурні компоненти k-го спектрального коефіцієнта.

Розглянемо випадок, коли ця послідовність являє собою шум $\dot{\omega}_M(i)$.

У праці [2] показано, що під час аналізу послідовності, що являє собою реалізацію однозв'язного марковського нормального дискретного процесу, квадратурні компоненти $A(k)$ та $B(k)$ являтимуть собою ВВ, підпорядковані нормальному закону розподілу з нульовим МС та з дисперсією ψ_k, яка є функцією від R.

Також у праці [2] наведено формули для розрахунку дисперсій ψ_k компонентів відліків $A(k)$ та $B(k)$ дискретного спектра, що отримується при ортогональному перетворенні шуму в базисах ВКФ та ДЕФ:

$$\psi_k = \psi\left(N + 2\sum_{d=1}^{N-1}(N-d)\cos\left(\frac{2\pi}{N}kd\right)R^d\right) \text{ для ДЕФ},$$

$$\psi_k = \psi\left(N + 2\sum_{d=1}^{N-1}\beta_{kd}R^d\right) \text{ для ВКФ},$$

де β_{kd} — коефіцієнти, метод розрахунку яких також вказано в праці [2].

Розподіл амплітуд спектральних коефіцієнтів $\left|\dot{X}(k)\right|$ при аналізі шуму відповідає закону Релея [3]:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{\psi_k}\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\psi_k}\right), \; k = \overline{0\ldots N-1}.$$

Імовірність того, що під час аналізу послідовності, що являє собою лише шум, амплітуда якогось зі спектральних коефіцієнтів буде вищою за деяке число α, визначається виразом

$$P(\left|\dot{X}(k)\right| > \alpha) = Q(\alpha) = \exp\left(-\frac{\alpha^2}{2\psi_k}\right).$$

Взявши натуральний логарифм від цього виразу, отримаємо формулу:

$$V_k = \sqrt{-2\psi_k \ln(P_f)},$$

де V_k — поріг, при перевищенні якого амплітудою одного з відліків спектра виноситься рішення про наявність сигналу; P_f — максимально допустима ймовірність перевищення порогу рішення амплітудою одного зі спектральних коефіцієнтів під час прийому послідовності, що не містить у собі корисного сигналу.

Базис ДЕФ

Спектральні коефіцієнти прийнятої послідовності в базисі ДЕФ знаходяться таким чином:

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1}\dot{x}(i)\exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right), \; k,i = \overline{0\ldots N-1}.$$

Сам базис описується виразом

$$f_k(i) = \exp\left(-j\frac{2\pi ki}{N}\right), \; k,i = \overline{0\ldots N-1},$$

де $f_k(i)$ — i-й відлік k-ї базисної функції.

При спектральному аналізі в базисі ДЕФ послідовності, що складається з адитивної суміші сигналу й шуму, квадратурні компоненти спектральних коефіцієнтів можна подати таким чином:

$$A(k) = A'(k) + \varepsilon_1(k),$$
$$B(k) = B'(k) + \varepsilon_2(k), \; k = 0\ldots N-1,$$

де $\varepsilon_1(k)$ та $\varepsilon_2(k)$ — незалежні нормально розподілені випадкові величини з МО, що дорівнює нулю, й дисперсією, що дорівнює ψ_k, $A'(k)$ та $B'(k)$ — квадратурні компоненти k-го коефіцієнта розкладу в ряд за базисними ДЕФ чистого сигналу $\dot{s}_g(i)$.

Величина $\left|\dot{X}(k)\right| = \sqrt{A^2(k) + B^2(k)}$ за будь-яких значень k є амплітудою двовимірного вектора. Компоненти цього вектора не залежать один від одного й підпорядковуються нормальному закону розподілу. Їхні дисперсії дорівнюють між собою, а МС — ні. З цього випливає, що розподіл величин $\left|\dot{X}(k)\right|$ описується законом Релея–Райса [3]:

$$p_k(\tau) = \frac{\tau}{N}\exp\left(-\frac{\tau^2 + u_k^2}{2N}\right)I_0\left(\frac{\tau u_k}{N}\right), \qquad (1)$$

де $u_k = \sqrt{A'^2(k) + B'^2(k)}$ (амплітуда k-го спектрального коефіцієнта у спектрі чистого сигналу $\dot{s}_g(i)$); I_0 — модифікована функція Бесселя нульового порядку.

При цьому, чим більше значення має параметр u_k, тим більше МС має амплітуда k-го спектрального коефіцієнта.

Під час аналізу в базисі ДЕФ чистого сигналу $\dot{s}_g(i)$ з цілою нормованою частотою g відмінну від нуля амплітуду має лише спектральний коефіцієнт з номером $k = g$ (оскільки в цьому випадку $\dot{s}_g(i)$ та $f_k(i)$ комплексно сполучені). При аналізі в цьому базисі сигналу $\dot{s}_g(i)$ із дрібною дійсною частотою g максимальну амплітуду буде мати той спектральний коефіцієнт, номер якого найближчий до значення g. Якщо б шум був рівномірним, то для оцінювання частоти можна було знайти номер максимального за амплітудою спектрального коефіцієнта і, якщо він перевищує поріг, заключити, що номер цього коефіцієнта відповідає частоті сигналу.

Але оскільки кожному виходу процесора ортогональних перетворювань відповідає свій поріг, амплітуда на кожному з виходів порівнюється саме зі своїм порогом. І, якщо поріг перевищується декількома амплітудами, то потрібно нормувати їхні значення і порівнювати між собою. Для нормування необхідно поділити амплітуду відгуку процесора на середньоквадратичне відхилення значень амплітуди на відповідному каналі.

Наприклад, якщо більшими за свої пороги були значення на другому й дев'ятому каналах процесора, рішення щодо частоти сигналу, що був отриманий приймається за допомогою такої нерівності:

$$\frac{U_2}{\sqrt{\psi_2}} > \frac{U_9}{\sqrt{\psi_9}}$$

де U_i — амплітуда відгуку на *і*-ім каналі.

Якщо нерівність виконується, нормовану частоту обирають рівною двом, у іншому випадку нормована частота дорівнює дев'яти.

Виходячи з цього, алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу виглядає так:

1) послідовність, що була прийнята, проходить через процесор ДПФ у базисі ДЕФ;

2) відгуки на каналах процесора ДПФ порівнюються зі своїми порогами;

3) якщо наявна лише одна амплітуда, що перевищує поріг, її номер обирається таким, що дорівнює частоті сигналу;

4) якщо жодна з амплітуд не перевищила порогу, приймається рішення про відсутність сигналу;

5) якщо декілька амплітуд перевищили пороги, вони нормуються й шукається максимальна з них. За її номером визначають частоту сигналу.

Звичайно, можна було б використовувати так зване «вибілення шуму», тобто нормалізацію амплітуд усіх каналів і порівнювання їх між собою з подальшим порівнюванням максимальної з них з нормованим порогом.

Проте, через те, що ймовірність того, що хоча б дві амплітуди перевищать свій поріг дуже мала, такий спосіб не є ефективним з погляду швидкодії.

Базис ВКФ

Базис ВКФ, що упорядковані за Адамаром, може бути описаний таким виразом [4]:

$$had_k(i) = \prod_{z=0}^{n-1} W^{k_z i_z},$$

де k — номер базисної функції системи ВКФ-Адамара; $W = \exp\left(-j\frac{2\pi}{m}\right)$ — фазовий множник, у якому m — основа системи числення (перший параметр системи ВКФ); n — показник кронекеровського ступеня (другий параметр системи ВКФ), k_z і i_z — розрядні коефіцієнти в m-ічному поданні чисел k та i.

Дискретний спектр послідовності відліків у цьому базисі знаходиться за допомогою співвідношення:

$$\dot{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \dot{x}(i) \prod_{z=0}^{n-1} W^{k_z l_z}.$$

При спектральному аналізі в базисі ВКФ послідовності, що складається з суміші сигналу й корельованого шуму, лишається правильним вираз (1), що був отриманий для базису ДЕФ.

Різниця полягає лише в тому, що для однієї нормованою частоти g, коефіцієнти u_k будуть відрізнятися для базисів ДЕФ та ВКФ.

У випадку з базисом ВКФ мінімум різниці між g та k не забезпечує максимального значення u_k, як це було для випадку з ДЕФ. Відповідно, алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу, що був пропонований для базису ДЕФ, не підходить для базису ВКФ. Крім того, при аналізі чистих сигналів з деякими цілими частотами в базисі ВКФ з параметром $m = 4$, максимальні за амплітудою відгуки наявні водночас на двох каналах процесора ДПФ. Це в свою чергу призводить до існування таких вихідних каналів, максимальні відгуки на яких спостерігаються при різних частотах вхідного сигналу.

Наприклад, під час аналізу сигналу з нормованою частотою $g = 2$ в базисі ВКФ-Адамара ($m = 4,\ n = 2$) максимальні за амплітудою відгуки спостерігаються на 9-му й 8-му частотних каналах. Якщо $g = 6$, то максимуми присутні на 9-му й 10-му каналах.

Таким чином, при аналізі суміші сигналу й шуму, якщо найбільша нормована амплітуда відгуку спостерігається на 9-му каналі, необхідно порівняти між собою нормовані амплітуди відгуків на 10-му й 8-му каналах, щоб вирішити, яку частоту має сигнал, який був прийнятий.

Тому алгоритм приблизного оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу за допомогою базису ВКФ дещо складніше, ніж алгоритм для базису ДЕФ. Реалізація цього алгоритму потребує попередньої підготовки, що полягає в складанні масивів відповідності максимумів на вихідних каналах частотам вхідних сигналів. Блок-схему цього алгоритму показано на рис. 1.

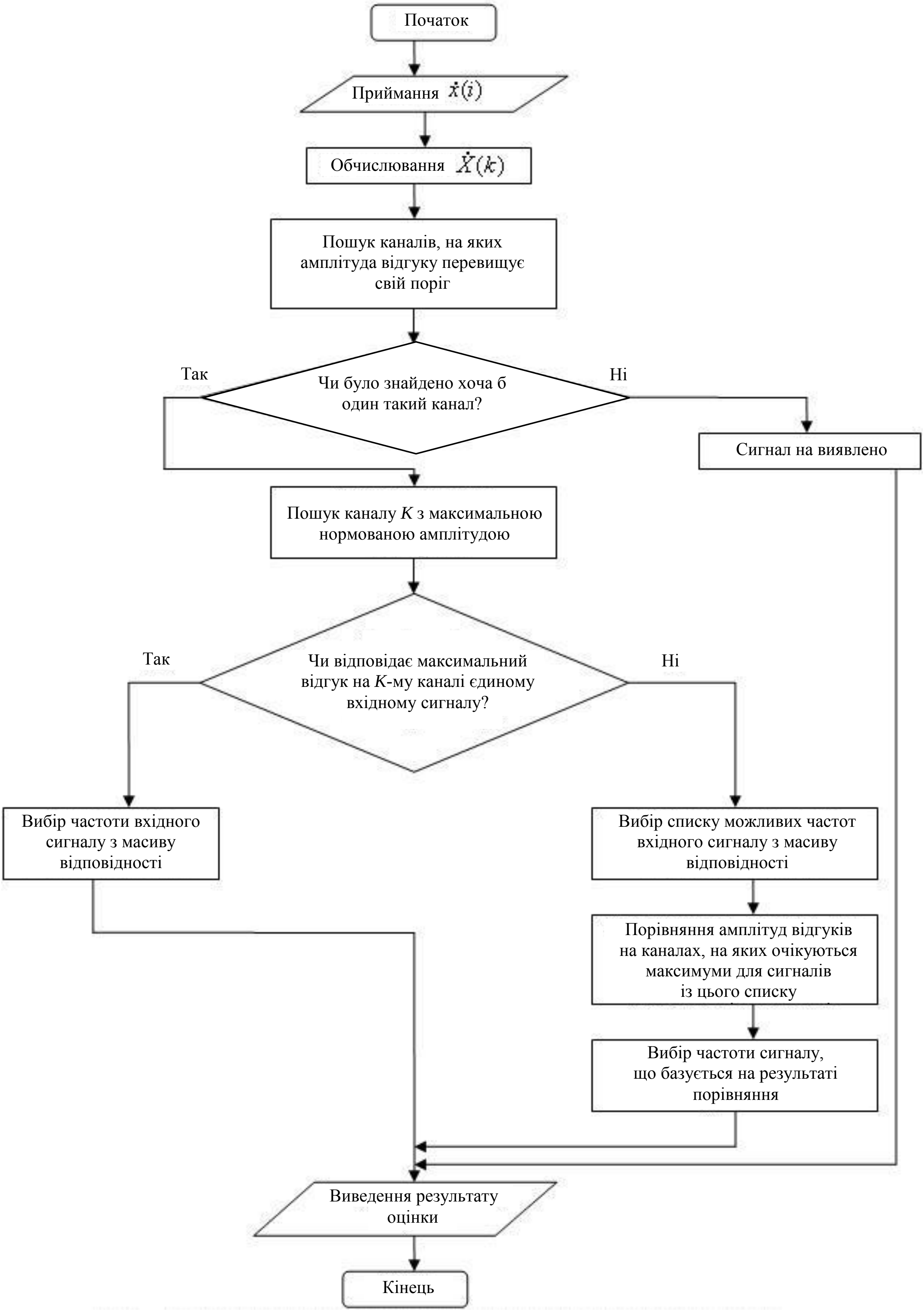

Рис. 1. Алгоритм приблизної оцінки частоти сигналу за допомогою базису ВКФ

Експеримент

Для порівняння ефективності двох базисів для оцінювання частоти дискретно-експоненціального сигналу було проведено статистичний експеримент, результати якого показано на рис. 2–4.

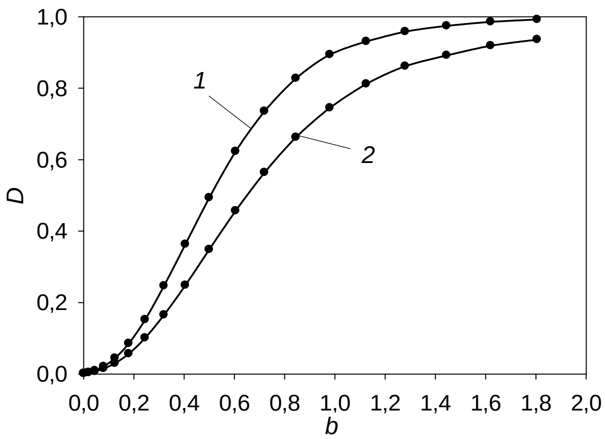

Рис. 2. Залежність імовірності правильної оцінки частоти сигналу від відношення сигнал/шум, N = 16, R = 0,2 (лінія *1* — ДЕФ, лінія *2* — ВКФ)

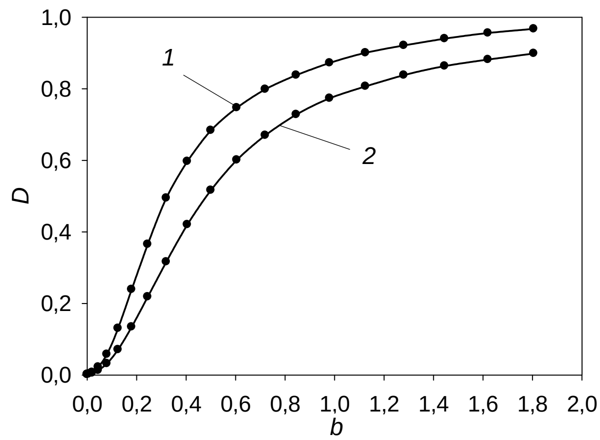

Рис. 3. Залежність ймовірності правильної оцінки частоти сигналу від відношення сигнал/шум, N = 16, R = 0,5 (лінія *1* — ДЕФ, лінія *2* — ВКФ)

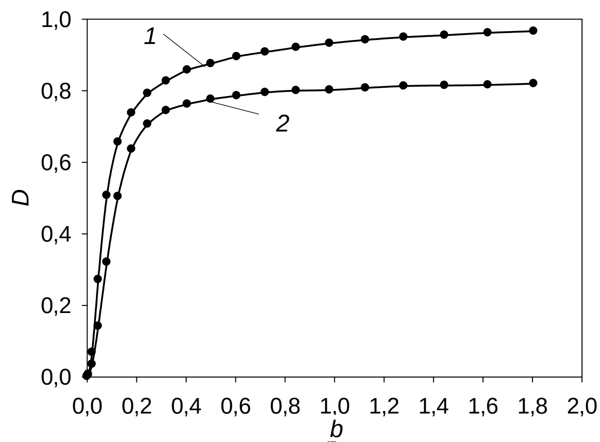

Рис. 4. Залежність ймовірності правильної оцінки частоти сигналу від відношення сигнал/шум, N = 16, R = 0,9 (лінія *1* — ДЕФ, лінія *2* — ВКФ)

Параметри експерименту

Для експерименту використовувалися такі базиси:

1) базис ДЕФ (16 точок);
2) базис ВКФ ($m = 4,\ n = 2$, 16 точок).

Пороги рішення V_k обиралися таким чином, щоб імовірність перевищення амплітудою відгуку на будь-якому з вихідних каналів процесора ортогональних перетворювань свого порогу при аналізі послідовності, що є шумом $\dot{\omega}_M(i)$, становила не більше, ніж 0.001.

Для кожної точки на графіках об’єм експерименту дорівнював 100 000.

Імовірність D знаходилась як відношення кількості правильних оцінок до об’єму експерименту. Кожна оцінка частоти сигналу проводилася таким чином:

– генерується однозв’язний марковський гауссівський шум (комплексний вектор незалежних випадкових величин з МС, що дорівнює нулю, й $\psi = 1$, розмірністю N — кількість точок ДПФ);

– генерується випадкове дійсне число g з діапазону $[0, N-1)$ (розподілення значень g — рівномірне);

– генерується дискретно-експоненціальний сигнал з частотою g (комплексний вектор розмірністю N) і складається з вектором гауссівського шуму;

– проводиться ДПФ вектора-суміші й оцінювання частоти g' за алгоритмами, що були описані вище;

– якщо $|g' - g| < 1$, оцінка вважається правильною, лічильник правильних оцінок збільшується на 1 (таким чином, якщо частота сигналу дорівнює $g = 8{,}3$, то правильними будуть вважатися як оцінка $g' = 8$, так і оцінка $g' = 9$).

Результати. На сімействі графіків (рис. 2–4) уздовж осі OX відкладені значення b — відношення сигнал/шум за потужністю $\left(b = \dfrac{U^2}{2\psi} \right)$, уздовж осі OY — значення D-імовірності правильної оцінки частоти сигналу.

Висновки

Бачимо, що ймовірність D правильної оцінки для базису ДЕФ дещо перевищує цей параметр для систем ВКФ. Проте варто зауважити, що перетворення в системі ВКФ потребують менше обчислювань, ніж перетворення в системі ДЕФ [4]. Таким чином, процесор ВКФ може мати більшу швидкодію, ніж процесор ДПФ ДЕФ (або потребувати менше апаратурних витрат).

ISSN 2075-0781. Наукоємні технології, 2012. № 1 (13)

ЛІТЕРАТУРА

1. *Ван Трис Г.* Теория обнаружений, оценок и модуляций / Г. Ван Трис; пер. с англ., под ред. проф. В. И. Тихонова. Т. 1. — Нью-Йорк, 1968. — М. : Сов. радио, 1972. — 744 с.

2. *Белецкий А. Я.* Оценка дисперсии гармоник спектра односвязного марковского гауссовского процесса в дискретных базисах Виленкина–Крестенсона функций // Системи обробки інформації / А. Я. Белецкий, Д. С. Демьяник. — 2011, № 3 (93) — С. 107–112.

3. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники / Б. Р. Левин. — 3-е изд., перераб. и доп. — М. : Радио и связь, 1989. — 656 с.

4. *Трахтман А. М.* Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах / А. М. Трахтман, В. А. Трахтман. — М. : Сов. радио, 1975. — 208 с.

Стаття надійшла до редакції 21.12.2011.