

DOI: 10.18372/2310-5461.62.18713  
УДК 621.396.962.3(045)

**М. М. Малоєд**, канд. техн. наук  
Національний авіаційний університет, Київ  
orcid.org/ 0000-0001-5468-9729  
e-mail: maryna.maloied@npp.nau.edu.ua;

**І. П. Омельчук**, канд. техн. наук  
Національний авіаційний університет, Київ  
orcid.org/0000-0003-4549-7121  
e-mail: omelip@ukr.net;

**М. В. Омельчук**, інженер  
ТОВ «ГрадоСервіс плюс», Київ  
orcid.org/0009-0003-3359-5135  
e-mail: omelchuk.m.v@gmail.com

## АВТОРЕГРЕСІЙНА МОДЕЛЬ СИНУСОЇДИ З ДРЕЙФОМ ЧАСТОТИ

### Вступ

Для надання подальшим аналітичним дослідженням фізичного підґрунтя означимо, що із різноманітності періодичних явищ та процесів, які спостерігаються у природі, технічних об'єктах, оптичних та інших системах, достатньо розповсюдженими та інформаційно значимими є коливання синус-подібного типу (SL – sinus-like kind).

Доцільно одразу відмітити, що термін «косинусоїдальне» коливання є адекватним до загального поняття «синусоїдальне», тому надалі й приймаємо останнє як типове.

У технічних системах окрім механічних коливань варто означити також електричні синусоїдальні процеси в колах змінного струму, в електронних пристроях, зокрема, у мережі промислового електроживлення, коливальних контурах, генераторах сигналів системах зв'язку тощо [1].

У радіолокаційних системах (РЛС) також можуть спостерігатися синусоїдальні сигнали з дрейфом частоти, наприклад, лінійно частотно-модульовані [2] або доплерівський сигнал, що відбитий від маневреної цілі, швидкість якої має, як мінімум, одну похідну.

Серед можливих, надалі обмежуємося порівняльним дослідженнями двох типів SL-коливань – гармонічного (SG) з усіма постійними параметрами та синусоїди з лінійним дрейфом частоти (SD). При цьому будемо розглядати два види їхніх математичних моделей – тригонометричні (означимо T-моделі) та авторегресійні (означимо AR-моделі).

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Питання дослідження властивостей та узагальнення переходу від неперервних залежностей класів елементарних функцій до рекурентних формул задання дискретних числових послідовностей шляхом заміни неперервних параметрів дискретними, розглянуті у статті [3]. Такий перехід застосовується для дослідження та обробки синусоїдальних сигналів.

У роботі [4] запропоновано синусоїдальний метод синтезу на основі атракторів миттєвої частоти (МЧ), які відповідають гармонійним частотним траєкторіям. Оскільки безперервність атракторів МЧ чітко визначена і її легко виявити, то атрактори МЧ можна виділити з аудіосигналів без будь-яких явних обмежень або складного алгоритму; тому їх можна безпосередньо застосувати до синусоїдального синтезу.

Використовуючи синусоїдальну модель мовлення, в роботі [5] було розроблено техніку аналізу, яка характеризує мовлення з точки зору амплітуд, частот і фаз складові синусоїди. Ці параметри можна оцінити, застосувавши простий алгоритм вибору піку для короткочасного перетворення Фур'є вхідної мови.

Запропоновані в роботі [6] триплети є узагальненнями пов'язаних вейвлетів один з одним за допомогою 2-D графічних координатних перетворень у частотно-часовій площині, на відміну від вейвлетів, які пов'язані один з одним за допомогою 1-D графічних перетворень лише у часовій області.

У роботі [8] представлено транзисторний перетворювач з керуванням струмом, який використовується для збудження резонансної електромагнітної вібрації конвеєра, а також експериментальні результати які є індикатором енергоефективності. В роботі [9] представлено реалізований частотно-амплітудно-регульований перетворювач потужності для приводу електромагнітних віброприладів. За допомогою розробленої системи керування на основі мікроконтролера можна було здійснювати безперервну зміну частоти та амплітуди коливань.

У дослідженні [10] пропонується метод керування множинною синусоїдальною суперпозицією (MSWS), який генерує хвилі струму, що складаються з основної складової та гармонійних компонентів із певними амплітудами та початковими фазами. Це базується на новому точному моделюванні лінеаризації Фур'є DSM. Однак проблема синтезу AR-моделі синусоїди з лінійним дрейфом частоти дотепер не була досліджена.

### Постановка проблеми

Таким чином формується наукове завдання синтезу авторегресійної моделі синусоїди з лінійним дрейфом частоти та математичне моделювання одержаної моделі.

### Виклад основного матеріалу

#### 1. Синус-подібні тригонометричні моделі

Найбільш застосованою математичною моделлю SL-коливань є тригонометрична, що базується на синус-функції загального виду як

$$S_{SL} \triangleq \rho(P, t) \sin[\Phi(P, t)], \quad (1)$$

у якій амплітуда  $\rho(\cdot)$  та поточна фазова змінна  $\Phi(\cdot)$  залежать від множини фізичних параметрів та аргументів сигналу, наприклад, просторових  $P$ , неперервного часу  $t$  чи одного з них.

З метою придання однозначності подальшим дослідженням, розглядати будемо деякі обмежені варіанти моделі (1), а саме, із постійною амплітудою  $\rho \triangleq \text{const}$  та фазовою змінною, яка залежить лише від одного аргументу  $t$ :

$$\Phi(t) \triangleq w(t)t + \varphi_e, \quad (2)$$

де  $w(t)$  – поточна циклічна частота,  $\varphi_e$  – початкова фаза. Причому, у формулі (2) замість загально прийнятого індексу початкової фази «нуль» умисно використовуємо інший індекс «e» як ознаку, саме, вступного за часом значення параметру коливання (entrance – вступний).

Означена нестационарність частоти спостерігається у багатьох радіотехнічних системах. Особливим видом частотної модуляції є лінійна час-

тотна модуляція (ЛЧМ, LFM). З метою смислового узагальнення, надалі замість терміну «модуляція» буде використовуватися більш загальний термін – лінійний частотний дрейф (ЛЧД, LFD). Динаміка частоти у цьому випадку математично записується як

$$\omega(t) \triangleq \omega_e + Dt,$$

де  $\omega_e$  – вступне значення частоти на початку спостереження,  $D$  – постійний коефіцієнт дрейфу (KD) частоти. Тобто для SD-коливання маємо модель тригонометричного виду

$$s_{TD}(t) \triangleq \rho \sin[\omega_e t + Dt^2 + \varphi_e], \quad (3)$$

де  $t$  – означає тригонометрична;  $D$  – із лінійним дрейфом частоти.

У багатьох прикладних випадках важливим є особливий SG-тип гармонічних коливань. Вони мають прості зрозумілі властивості, реальні коливання й хвилі часто є достатньо близькими до гармонічних, а будь-який складний коливальний процес, як доводить математика, можна подати у виді суперпозиції гармонічних SG-коливань.

Найбільш застосованою математичною моделлю SG-коливань є тригонометрична, яка є частковою від моделі (3) за умови  $D := 0$ :

$$s_{TG}(t) \triangleq \rho \sin(\omega t + \varphi_e), \quad (4)$$

де TG – означає «тригонометрична гармонічна».

Парадигма подання сигналів як неперервних у часі, згідно (1), має більший сенс для задач фізичного опису та математичного аналізу. У прикладних задачах цифрової обробки реальних сигналів використовуються дискретні моделі сигналів, у яких масиви значень (відліків)  $\{s_n\}$  подаються із прив'язкою до деякої множини фіксованих аргументів  $\{P_n, t_n\}$ . При цьому індекси  $n$  означають номери послідовних значень, можливі й пропуски натурального ряду чисел.

Відповідно до неперервних моделей (3, 4) дискретні моделі запишемо як:

$$s_n \triangleq s_{TD}(t_n) \triangleq \rho \sin[\omega_e t_n + Dt_n^2 + \varphi_e], \quad (5)$$

$$s_n \triangleq s_{TG}(t_n) \triangleq \rho \sin(\omega t_n + \varphi_e).$$

Звернемо увагу, що запис (5) виявляє незручність використання нульового індексу початкової фази як  $\varphi_0$ , бо вступне значення не обов'язково буде з нульовим номером.

#### 2. Моделі руху об'єкту із рівномірним прискоренням

У рамках TD-моделі (3), розглянемо особливості задачі вимірювання параметрів руху об'єкту із рівномірним прискоренням на підставі оцінюван-

ня частоти Доплера (ЧД) відбитого від нього зондуючого сигналу РЛС.

Миттєва швидкість такого об'єкту в довільний момент часу  $t$  від початку спостереження  $t_e := 0$  визначається як

$$v(t) \triangleq v_e + at, \quad (6)$$

де довільні параметри руху:  $v_e$  – початкова швидкість,  $a$  – постійне прискорення.

Тоді миттєва ЧД дорівнює

$$F(t) \triangleq 2v(t)/\lambda = 2(v_e + at)/\lambda,$$

де довжину хвилі  $\lambda$  зондуючого імпульсу РЛС вважаємо відомою.

Згідно моделі швидкості (6), означимо такі характеристики частоти Доплера:

– початкова ЧД та початкова кругова ЧД:

$$F_e \triangleq F(t_e) = 2v_e / \lambda, \quad \omega_e \triangleq 2\pi F_e = 4\pi v_e / \lambda; \quad (7)$$

– постійна похідна кругової ЧД:

$$\omega' \triangleq 2\pi \frac{dF(t)}{dt} = 4\pi a / \lambda;$$

– поточна у часі миттєва кругова ЧД:

$$\omega(t) \triangleq \omega_e + \omega' t = 4\pi/\lambda (v_e + at).$$

Шлях, що проходить об'єкт за інтервал часу  $t$  визначається як

$$l(t) \triangleq v_e t + (a/2)t^2.$$

При цьому, загальний набіг фази відбитого сигналу за цей час, з урахуванням подвійного шляху розповсюдження зондуючого імпульсу, буде становити

$$\begin{aligned} \Phi(t) \triangleq 2\pi \frac{2l(t)}{\lambda} &\equiv \int_0^t \omega(t) dt = 4\pi(v_e / \lambda)t + \\ &+ 2\pi(a / \lambda)t^2 = \omega_e t + Dt^2 = (\omega_e + Dt)t, \end{aligned} \quad (8)$$

тобто коефіцієнт лінійного дрейфу частоти (КД) дорівнює

$$D \triangleq 2\pi a / \lambda. \quad (9)$$

Таким чином, у ситуації неперервного часу ми прийшли до розглянутої раніше моделі ТД-сигналу (3). При цьому, задача вимірювання параметрів руху об'єкта зводиться до першочергового оцінювання параметрів ЧД –  $\hat{\omega}_e$ ,  $\hat{D}$ , за якими розраховуються, відповідно до формул (7 та 9), параметри руху об'єкту

$$\hat{v}_e = (\lambda/4\pi)\hat{\omega}_e, \quad \hat{a} = (\lambda/2\pi)\hat{D}.$$

Модифікуємо розглянуту неперервну модель до дискретного виду із відомим постійним інтер-

валом дискретизації  $\tau$ , що є типовим у технічних пристроях цифрової обробки сигналів, зокрема РЛС. Задамо без пропусків послідовність номерів відліків у довільній загальній кількості  $N$

$$n \triangleq \overline{1, N}.$$

Номер початкового відліку обраний  $n_e := 1$ , бо для  $n_e := 0$  виникає проблема нульових номерів елементів матриць у розрахунках MatLab.

Позначимо масив моментів спостереження сигналу розміром  $\langle N \rangle$  як:

$$\{t_n\}_{n=1}^{\langle N \rangle} \triangleq \{(n-1)\tau\}_{n=1}^{\langle N \rangle},$$

де початкове значення буде  $t_e \triangleq t_1 := 0$ .

Тоді, згідно (8), множина набігів фаз відбитого сигналу в моменти  $\{t_n\}$  буде

$$\begin{aligned} \Phi_m \triangleq \Phi(t_n) &= 4\pi v_e \tau / \lambda (n-1) + 2\pi a \tau^2 / \lambda (n-1)^2 = \\ &= \gamma_e (n-1) + \mu (n-1)^2 = [\gamma_e + \mu (n-1)](n-1), \end{aligned} \quad (10)$$

де використані такі позначення параметрів динаміки набігу фаз:

– початкова нормована частота:

$$\gamma_e \triangleq 4\pi (v_e / \lambda) \tau;$$

– коефіцієнт дрейфу нормованої частоти:

$$\mu \triangleq 2\pi (a / \lambda) \tau^2.$$

Вони пов'язані із параметрами розглянутої раніше неперервної моделі як:

$$\gamma_e \equiv \omega_e \tau, \quad \mu \equiv D\tau^2.$$

На підставі формули (10) запишемо також набіги фаз наступних за  $n$  відліків:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} &= \gamma_e n + \mu n^2 = \left[ \gamma_e (n-1) + \mu (n-1)^2 \right] + \\ &+ \gamma_e + 2\mu n - \mu = \Phi_n + \gamma_e + 2\mu n - \mu, \\ \Phi_{n+2} &= \gamma_e (n+1) + \mu (n+1)^2 = \left[ \gamma_e n + \mu n^2 \right] + \\ &+ \gamma_e + 2\mu n + \mu = \Phi_{n+1} + \gamma_e + 2\mu n + \mu, \end{aligned}$$

і т. д., де праві частини виразів показують зв'язок набігу фаз із попереднім відліком.

Тобто для довільних  $n \leq N-1$  та обмежених  $1 \leq \forall k \leq N-n$  зв'язок між набігами фаз буде

$$\Phi_{n+k} - \Phi_{n+k-1} = \gamma_e + 2\mu n + (2k-3)\mu, \quad (11)$$

а для суміжних відліків ( $k=1$ ) різниця фаз:

$$\Delta_n \triangleq \Delta_n \triangleq \Phi_{n+1} - \Phi_n = \gamma_e + 2\mu n - \mu. \quad (12)$$

Причому, за відсутністю дрейфу частоти ( $\mu=0$ ) усі різниці фаз однакові та дорівнюють (назвемо її так) початковій нормованій частоті

$$\Delta_n \equiv \gamma_e, \quad n = \overline{1, N-1}. \quad (13)$$

Для подальших досліджень доцільним є оформити множину трійок відліків, кожна з котрих об'єднує фрагмент реалізації із трьох послідовних суміжних відліків

$$Ts_n \doteq \{s_n, s_{n+1}, s_{n+2}\}, \quad 1 \leq n \leq N-2. \quad (14)$$

При цьому, номер трійки формально будемо означати за першим номером відліку.

На підставі (12), визначимо різниці фаз між відліками в трійці  $Ts_n$

$$\begin{cases} \Delta_n^{(2,1)} = \Phi_{n+2} - \Phi_{n+1} = \gamma_e + \mu + 2\mu n \\ \Delta_n^{(1,0)} = \Phi_{n+1} - \Phi_n = \gamma_e - \mu + 2\mu n \\ \Delta_n^{(2,0)} = \Phi_{n+2} - \Phi_n = 2\gamma_e + 4\mu n \end{cases} \\ 1 \leq n \leq N-2,$$

де верхній індекс означає зсуви номерів відліків трійки відносно її номеру  $n$ .

У якості власної характеристики трійки ( $1 \leq n \leq N-2$ ), яку називаємо динамічним фазовим аргументом трійки, обираємо половину різниці фаз між крайніми її відліками

$$\begin{aligned} ph_n &= 0,5\Delta_n^{(2,0)} = 0,5(\Phi_{n+2} - \Phi_n) = \\ &= 0,5(2\gamma_e + 4\mu n) = \gamma_e + 2\mu n. \end{aligned} \quad (15)$$

Слід зазначити, що такий же результат має середнє значення  $(\Delta_n^{(10)} + \Delta_n^{(21)})/2 = \gamma_e + 2\mu n$ .

Таким чином, відліки сигналу ( $n = \overline{1, N}$ ) на виході фазового детектора РЛС для розглянутої ситуації описуються TD-моделлю

$$\begin{aligned} s_n &= \rho \sin(\Phi_n + \varphi_e) = \\ &= \rho \sin\{[\gamma_e + \mu(n-1)](n-1) + \varphi_e\} \\ &= \rho \sin\{[\gamma_e + \mu(n-1)](n-1) + \varphi_e\}. \end{aligned} \quad (16)$$

з лінійним дрейфом частоти

$$\gamma_n = \gamma_e + \mu(n-1).$$

Оцінки початкової швидкості та прискорення об'єкту можуть бути визначені за оцінками параметрів описаної динаміки фаз як:

$$\hat{a} = (\lambda/2\pi\tau^2)\hat{\mu}, \quad \hat{v}_e = (\lambda/4\pi\tau)\hat{\gamma}_e.$$

Необхідно означити, що усі подальші дослідження будуть здійснюватися тільки на підставі дискретних моделей.

### 3. Синтез AR-моделей

Вочевидь, у розглянутих T-моделях поточний відлік не залежить від попередніх відліків.

У деяких випадках обробки LS-коливань в нагоді стають дискретні математичні моделі іншого виду – авторегресійні (AR). Головною їхньою особливістю є те, що поточний відлік залежить не тільки від параметрів та аргументів, а й має явний аналітичний зв'язок із деякими попередніми відліками коливання.

Одразу означимо, що універсальної AR-моделі LS-коливань не існує, тому далі синтезуються та досліджуються AR-моделі для деяких видів коливань із еквідистантною дискретизацією.

Оскільки TG-моделі (5) характеризуються незмінною частотою впродовж усього інтервалу спостереження, то можна використовувати поняття нормованої частоти (13) і записати відліки  $n$ -ї трійки  $Ts_n$  (14) як

$$\begin{cases} s_n = \rho \sin[(n-1)\gamma_e + \varphi_e] \\ s_{n+1} = \rho \sin[n\gamma_e + \varphi_e] \\ s_{n+2} = \rho \sin[(n+1)\gamma_e + \varphi_e] \end{cases}.$$

Виконаємо наступні тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= \sin[n\gamma_e + \varphi_e + \gamma_e] = \\ &= \sin[n\gamma_e + \varphi_e] \cos \gamma_e + \sin \gamma_e \cos[n\gamma_e + \varphi_e] = \\ &= s_{n+1} \cos \gamma_e + 0,5 \sin[\gamma_e + n\gamma_e + \varphi_e] + \\ &+ 0,5 \sin[\gamma_e - n\gamma_e - \varphi_e] = \\ &= 0,5s_{n+2} + s_{n+1} \cos \gamma_e - 0,5s_n. \end{aligned}$$

Тут амплітуда у лівій та правій частинах рівняння одразу скорочена. Тобто, отримано аналітичний зв'язок відліків трійки у виді:

$$s_{n+2} = 2 \cos \gamma_e \cdot s_{n+1} - s_n. \quad (17)$$

Саме цей вираз надалі називаємо ARG-моделлю (для усіх відліків  $n = \overline{1, N-2}$ ) гармонічного SG-коливання без дрейфу частоти.

Важливою особливістю синтезованої ARG-моделі є той факт, що в ній фігурує лише один параметр тригонометричної моделі (5) – нормована частота  $\gamma_e \equiv \Delta_n$ , яка дорівнює постійній різниці фаз між суміжними відліками.

Відсутність у формулі (17) амплітуди  $\rho$  та початкової фази  $\varphi_e$  означає інваріантність ARG-моделі до значень цих параметрів. Таке дозволило за наявності гаусівського шуму синтезувати в роботі [4] оцінку частоти  $\hat{\gamma}_e$  в явному (замкненому) виді.

Для подальших досліджень введемо додаткову характеристику трійки  $Ts_n$ , яку назвемо числовим фактором трійки, у такому виді:

$$ft_n \triangleq \frac{s_{n+2} + s_n}{2s_{n+1}} = \cos \gamma_e, \quad n := \overline{1, N-2}. \quad (18)$$

Вочевидь, у ARG-моделі значення факторів усіх трійок є однаковими.

Надалі для AR-моделей із лінійним дрейфом частоти приймаємо аббревіатуру ARD. Спочатку утворимо спрощену ARD-модель, замінивши у ARG-моделі (17) різниці фаз трійок  $\gamma_e$  на динамічний фазовий аргумент (15):

$$\begin{aligned} s_{n+2} &\approx 2 \cos(ph_n) \cdot s_{n+1} - s_n = \\ &= 2 \cos(\gamma_e + 2\mu n) \cdot s_{n+1} - s_n. \end{aligned} \quad (19)$$

Особливо означимо суттєву позитивну властивість спрощеної ARD-моделі – це залежність тільки від двох параметрів – початкової частоти  $\gamma_e$  і КД  $\mu$  – та інваріантність до початкової фази і амплітуди.

Використавши поняття фактору трійки (18), запишемо його для моделі (19)

$$ft_n = \frac{s_{n+2} + s_n}{2s_{n+1}} = \cos(\gamma_e + 2\mu n).$$

На відміну від (18), за наявності дрейфу частоти, значення факторів  $ft_n$  не однакові, бо вже залежать від номеру трійки  $n$ .

Відлік  $(n+2)$  TD-моделі (16), на підставі формули (11) з  $k = 2$ , подамо як

$$\begin{aligned} s_{n+2} &\triangleq \rho \sin(\Phi_{n+2} + \varphi_e) = \\ &= \rho \sin(\Phi_{n+1} + \gamma_e + \mu + 2\mu n + \varphi_e) = \\ &= \rho \sin(\Phi_{n+1} + \varphi_e) \cos(\gamma_e + \mu + 2\mu n) + \\ &+ \rho \cos(\Phi_{n+1} + \varphi_e) \sin(\gamma_e + \mu + 2\mu n). \end{aligned} \quad (20)$$

Перетворимо другу компоненту формули (20)

$$\begin{aligned} C2 &\triangleq \rho \sin(\gamma_e + \mu + 2\mu n) \cos(\Phi_{n+1} + \varphi_e) = \\ &= 0,5\rho \sin(\Phi_{n+1} + \gamma_e + \mu + 2\mu n + \varphi_e) - \\ &- 0,5\rho \sin(\Phi_{n+1} - \gamma_e - \mu - 2\mu n + \varphi_e). \end{aligned} \quad (21)$$

Згідно (11), модифікуємо у (21) аргументи:

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1} + \gamma_e + \mu + 2\mu n + \varphi_e &= \Phi_{n+2} + \varphi_e, \\ \Phi_{n+1} - \gamma_e - \mu - 2\mu n + \varphi_e &= \\ &= (\Phi_n + \gamma_e - \mu + 2\mu n + \varphi_e) - \\ &- \gamma_e - \mu - 2\mu n = \Phi_n + \varphi_e - 2\mu, \end{aligned}$$

де використана тотожність

$$\Phi_{n+1} \equiv \Phi_n + \gamma_e - \mu + 2\mu n + \varphi_e.$$

Із цим формула (21) приймає вид

$$C2 = 0,5\rho \sin(\Phi_{n+2} + \varphi_e) - 0,5\rho \sin(\Phi_n + \varphi_e - 2\mu).$$

На її підставі та враховуючи позначення

$$\begin{aligned} s_n &\triangleq \rho \sin(\Phi_n + \varphi_e), \quad s_{n+1} \triangleq \rho \sin(\Phi_{n+1} + \varphi_e), \\ s_{n+2} &\triangleq \rho \sin(\Phi_{n+2} + \varphi_e), \end{aligned}$$

вираз (20) запишемо як:

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= s_{n+1} \cos(\gamma_e + \mu + 2\mu n) + 0,5s_{n+2} - \\ &- 0,5s_n \cos(2\mu) + 0,5\rho \cos(\Phi_n + \varphi_e) \sin(2\mu). \end{aligned}$$

Після елементарних перетворень останнього отримаємо точну ARD-модель у наступному виді

$$\begin{aligned} s_{n+2} &= 2s_{n+1} \cos(\gamma_e + \mu + 2\mu n) - s_n \cos(2\mu) + \\ &+ \rho \cos(\Phi_n + \varphi_e) \sin(2\mu), \quad n = \overline{1, N-2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Основний недолік такої моделі – це наявність невідомих амплітуди  $\rho$  та початкової фази  $\varphi_e$ .

Зазначимо, що введене у (18) поняття фактору тут зовсім втрачає сенс.

У ситуації малого прискорення  $\mu \rightarrow 0$  можемо вважати  $\cos(2\mu) \cong 1$ ,  $\sin(2\mu) \cong 0$ . Зберігаючи у аргументі косинуса величини  $\mu$  та  $2\mu n$ , отримаємо із точної (22) наближену ARD-модель виду:

$$s_{n+2} \cong 2s_{n+1} \cos(\gamma_e + \mu + 2\mu n) - s_n. \quad (23)$$

Відрізняються моделі (19) та (23) лише відсутністю або наявністю складової  $\mu$  у фазовому аргументі. Одразу визначити перевагу якоїсь із приблизних моделей не є можливим, бо вони отримані за різних евристичних припущень. Зробити висновки можна буде за допомогою моделювання методом Монте-Карло для різних пар параметрів  $(\gamma_e, \mu)$  та за наявності шуму.

З метою уніфікації подальших порівняльних досліджень обох моделей (19) та (23) доцільно привести їх до універсального виду

$$s_{n+2} \cong 2s_{n+1} \cos(\gamma_e + h_\mu \mu + 2\mu n) - s_n,$$

де  $h_\mu$  – двозначний прапор типу  $(0/1)$ , який показує наявність чи ні параметра  $\mu$  у моделі. За таких спрощень є можливість використовувати поняття фактору трійки як

$$ft_n = \frac{s_{n+2} + s_n}{2s_{n+1}} = \cos(\gamma_e + h_\mu \mu + 2\mu n). \quad (24)$$

Вочевидь, основна перевага синтезованих спрощеної та наближеної ARD-моделей полягає у їх інваріантності до амплітуди та початкової фази синусоїдального сигналу. Це знижує параметричну розмірність задачі оцінювання з чотирьох до двох параметрів, що сприяє суттєвому покращенню швидкості розрахунків.

#### 4. Оцінювання швидкості та прискорення маневреної цілі

Таким чином, отримане співвідношення (24) у окремій трійці («триплеті») пов'язує три величини: фактор –  $ft_n$  та два параметри SL-сигналу –  $\gamma_e, \mu$ . На його підставі, для деяких двох довільних триплетів  $n$  та  $n+k$  можна записати таку систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими оцінками  $\hat{\gamma}_e, \hat{\mu}$

$$\begin{cases} \hat{\gamma}_e + \hat{\mu}(h_\mu + 2n) = \arccos(ft_n) \\ \hat{\gamma}_e + \hat{\mu}(h_\mu + 2n + 2k) = \arccos(ft_{n+k}). \end{cases} \quad (25)$$

Її розв'язок здійснюється елементарно за методом Крамера. Але треба зазначити суттєве обмеження: значення факторів повинні бути лише у межах першого та другого квадрантів синусоїди, інакше виникає неоднозначність оцінок параметрів.

Більш детальне дослідження похибок оцінок параметрів вимагають два принципових моменти.

По-перше, для синтезу оцінок параметрів використовувалася наближена модель (23). При цьому, навіть без шуму, будуть спостерігатися помилки оцінок параметрів. Як приклад, Методом Монте-Карло були отримані статистичні похибки для різних інтервалів дискретизації у триплеті та розміру вибірки. Ймовірнісним тут був вибір пар триплетів. Розрахунки показують, що похибка одержаної моделі не перевищує 8 %.

По-друге, величина похибок збільшується за наявності шуму у реалізації.

На рис. 1. як приклад подано синусоїду з шумом та без нього, яка є вихідним сигналом для розрахунків. На рис. 2–3 продемонстровано оцінки, розраховані за допомогою системи лінійних рівнянь (25) на основі математичного моделювання.

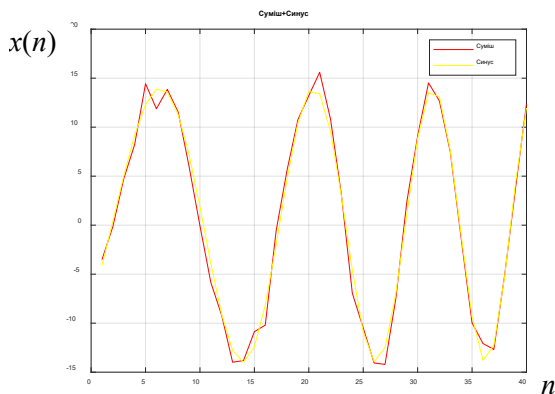


Рис. 1. Вхідна реалізація

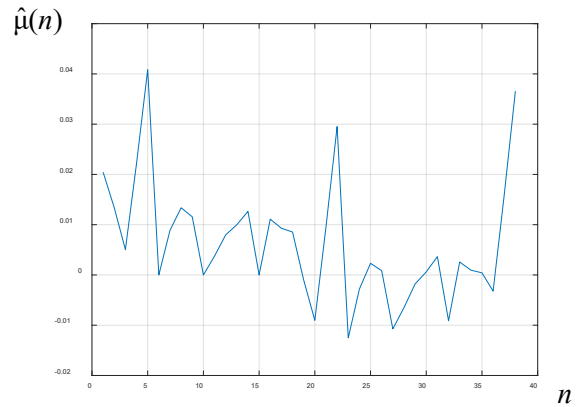


Рис. 2. Оцінка коефіцієнту дрейфу  $\hat{\mu}$  для однієї реалізації

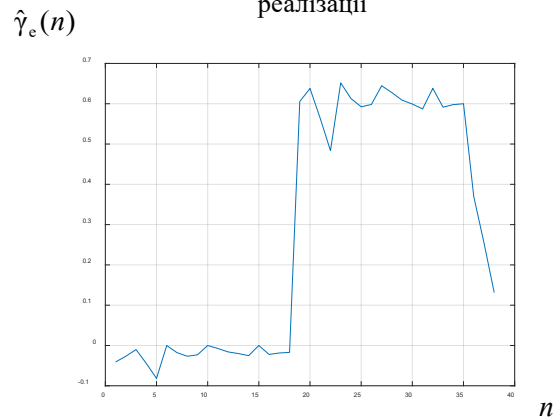


Рис. 3. Оцінка початкової частоти  $\hat{\gamma}_e$  для однієї реалізації

#### Висновки

У роботі проведено аналіз синус-подібних тригонометричних моделей та особливості їх застосування. Розглянуто особливості задачі вимірювання параметрів руху об'єкту із рівномірним прискоренням на підставі оцінювання частоти Допплера відбитого від нього зондуючого сигналу РЛС.

Проведено синтез спрощеної та наближеної ARD-моделей. Основна гідність синтезованих спрощеної та наближеної ARD-моделей полягає у їх інваріантності до амплітуди та початкової фази синусоїдального сигналу. Це знижує параметричну розмірність задачі оцінювання з чотирьох до двох параметрів, що сприяє суттєвому покращенню швидкості розрахунків.

На основі математичного моделювання були отримані статистичні похибки для різних інтервалів дискретизації у триплеті та розміру вибірки. Ймовірнісним був вибір пар триплетів. Розрахунки показують, що похибка одержаної моделі не перевищує 8 %.



## ЛІТЕРАТУРА

- [1] Малоєд М. М. Оптимізація стабілізуючого управління математичним маятником. *Електроніка та системи управління*, 2011, № 1(27). С. 78–83.
- [2] Omelchuk I., Chyrka A. Closed-Form ARMA-Based ML-Estimator of a Single-Tone Frequency. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2018. V. 37 (8). P. 3441–3456.
- [3] Воронцов О. В. Замена непрерывных форм элементарных функциональных зависимостей рекуррентными формулами задания дискретных числовых последовательностей. Геометричне та комп'ютерне моделювання: Зб. наук. праць. Харків: ХДУХТ, 2010. Вип. 27. С. 57–62.
- [4] Abe T. and Honda M. Sinusoidal model based on instantaneous frequency attractors. *IEEE Trans. on Audio, Speech and Language Processing*, July 2006, 14(4), P. 1292–300.
- [5] R. J. Mc. Aulay and T.F. Quatieri. Speech Analysis/Synthesis Based on a Sinusoidal Representation. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. August 1986, V. 34 (4). P. 744–754.
- [6] S. Mann and S. Haykin. The chirplet transform: Physical considerations, *IEEE Trans. Signal Process.*, 1995, V. 43, No. 11, 2745 p.
- [7] M. F. Ferreira. *Dissipative Optical Solitons*, Springer, 2022, 364 p.
- [8] Z. Despotovic A. R. The increasing energy efficiency of the vibratory conveying drives with electromagnetic excitation, *International Journal of Electrical and Power Engineering*, 2012, № 6 (1), P. 38–42.
- [9] V. Sinik, Z. Despotovic, I. Palinkas. Optimization of the operation and frequency control of electromagnetic vibratory feeders, *Elektronika ir Elektrotechnika*, 2016, № 1, V. 22, P. 24–30.
- [10] Y. Yang, Q. Wang, Y. Hu, and others. Multiple Sine-Wave Superposition Drive for the Doubly Salient Motor Based on Fourier Linearization Modeling. *IEEE Transactions on Power Electronics*, April 2022, V. 37 (4). P. 4419–4430.
- [11] H. Chen, L. Liu, Y. Amirat, Z. Zhou. Model-Free Control for Doubly Salient Permanent Magnet-Generator-Based Tidal Stream Turbine Considering Flux-Weakening Operation. *Journal of Marine Science and Engineering*, 2023. V. 11(2). P. 1–26. doi:10.3390/jmse11122276

**Малоєд М. М., Омельчук І. П., Омельчук М. В.**

### АВТОРЕГРЕСІЙНА МОДЕЛЬ СИНУСОЇДИ З ДРЕЙФОМ ЧАСТОТИ

У технічних системах окрім механічних коливань варто означити також електричні синусоїдальні процеси в колах змінного струму, в електронних пристроях, зокрема, у мережі промислового електроживлення, коливальних контурах, генераторах сигналів системах зв'язку тощо. У радіолокаційних системах також можуть спостерігатися синусоїдальні сигнали з дрейфом частоти, наприклад, лінійно частотно-модульовані або доплерівський сигнал, що відбитий від маневреної цілі, швидкість якої має, як мінімум, одну похідну. Серед можливих, надалі обмежуємося порівняльним дослідженнями двох типів SL-коливань – гармонічного (SG) з усіма постійними параметрами та синусоїди з лінійним дрейфом частоти (SD). При цьому будемо розглядати два види їхніх математичних моделей – тригонометричні (Т-моделі) та авторегресійні (AR-моделі).

У роботі проведено аналіз синус-подібних тригонометричних моделей та особливості їх застосування. Розглянуто особливості задачі вимірювання параметрів руху об'єкту із рівномірним прискоренням на підставі оцінювання частоти Доплера відбитого від нього зондуємого сигналу РЛС. Проведено синтез спрощеної та наближеної ARD-моделей. Важливою особливістю синтезованої ARG-моделі є той факт, що в ній фігурує лише один параметр тригонометричної моделі – нормована частота. Основна гідність синтезованих спрощеної та наближеної ARD-моделей полягає у їх інваріантності до амплітуди та початкової фази синусоїдального сигналу. Це занижує параметричну розмірність задачі оцінювання з чотирьох до двох параметрів, що сприяє суттєвому покращенню швидкості розрахунків. На основі математичного моделювання були отримані статистичні похибки для різних інтервалів дискретизації у триплеті та розміру вибірки. На основі математичного моделювання були отримані статистичні похибки для різних інтервалів дискретизації у триплеті та розміру вибірки. Ймовірнісним був вибір пар триплетів. Розрахунки показують, що похибка одержаної моделі не перевищує 8 %.

**Ключові слова:** авторегресійна модель, синусоїдальне коливання, радіолокаційна система, дрейф частоти.

**Maloied M., Omelchuk I., Omelchuk M.**

### AUTOREGRESSIVE SINESOID MODEL WITH FREQUENCY DRIFT

In technical systems, in addition to mechanical oscillations, it is also worth noting electrical sinusoidal processes in alternating current circuits, in electronic devices, in particular, in the industrial power supply network, oscillatory circuits, signal generators, communication systems, etc. In radar systems, sinusoidal signals with frequency drift can also be observed, for example, linear frequency-modulated or Doppler signal reflected from a maneuvering target, the speed of which has at least one derivative. Among the possible ones, in the future we limit ourselves to comparative studies of two types of SL-oscillations - harmonic (SG) with all constant parameters and sinusoid with linear frequency drift (SD). At the same time, we will consider two types of their mathematical models - trigonometric (T-models) and autoregressive (AR-models).

*The paper analyzes sine-like trigonometric models and features of their application. The peculiarities of the task of measuring the parameters of the movement of an object with uniform acceleration based on the estimation of the Doppler frequency of the radar probing signal reflected from it are considered. A synthesis of simplified and approximate ARD models was carried out. An important feature of the synthesized ARG model is the fact that only one parameter of the trigonometric model appears in it - the normalized frequency. The main merit of the synthesized simplified and approximate ARD models is their invariance to the amplitude and initial phase of the sinusoidal signal. This reduces the parametric dimension of the estimation problem from four to two parameters, which contributes to a significant improvement in the speed of calculations. Based on mathematical modeling, statistical errors were obtained for different sampling intervals in the triplet and sample size. Based on mathematical modeling, statistical errors were obtained for different sampling intervals in the triplet and sample size. The selection of pairs of triplets was probabilistic. Calculations show that the error of the obtained model does not exceed 8%.*

**Keywords:** autoregressive model, sinusoidal oscillation, radar system, frequency drift.

Стаття надійшла до редакції 16.05.2024 р.

Прийнято до друку 12.06.2024 р.