

DOI 10.18372/2310-5461.50.15694

УДК 539.3:534.1

**Н. С. Городецька**, д-р фіз.-мат. наук, проф.;  
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ  
orcid.org/0000-0003-3305-522X  
e-mail: nsgihm@gmail.com;

**І. В. Старовойт**, канд. фіз.-мат. наук;  
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ  
orcid.org/0000-0003-0956-7153  
e-mail: inna-mail@ukr.net;

**Т. М. Щербак**, канд. фіз.-мат. наук.;  
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ  
orcid.org/0000-0002-3242-4698  
e-mail: mirgtanya@gmail.com

## ВІДБИТТЯ ХВИЛЬ РЕЛЕЯ–ЛЕМБА ВІД ТОРЦЯ ПІВШАРУ ЗІ ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

### Вступ

Контактна взаємодія тіл є одним із найпоширеніших видів взаємодії, як в природі, так і в техніці. Саме тому контроль якості з'єднання елементів складних конструкцій, на сьогодні залишається однією із пріоритетних проблем механіки. Іноді несправність структури зумовлена тонкою тріщиною, що розвивається на нерухомому кінці елемента. В такому випадку виникає нагальна потреба в неруйнівних методах контролю якості з'єднання. Зауважимо, що за всієї різноманітності методів неруйнівного контролю, найпоширенішими є ультразвукові методи. Для діагностики дефектів з'єднання хвилеводних елементів конструкцій, аналіз особливостей поширення хвиль Релея–Лемба, напевно, є найбільш ефективним засобом ультразвукової неруйвної діагностики дефектів. Відзначимо, що розв'язок прямих задач дифракції хвиль на дефектах є базою, як для розуміння фізичних особливостей відбитого поля, так і для коректного формулювання обернених постановок задач стосовно діагностування дефекту. Хвилі Релея–Лемба поширюються на значні відстані, що забезпечує можливість контролю якості з'єднання в областях, які недоступні для інших способів. Крім того, аналіз хвильового поля в дальній зоні дозволяє не тільки діагностувати наявність дефекту, але і оцінити його розміри і розташування. Характерною особливістю хвиль Релея–Лемба є їх дисперсійний характер, при якому швидкість поширення кожної нормальної моди залежить від частоти, тому для діагностики наявності дефекту частотний діапазон, у якому поширюються

нормальні хвилі вищих порядків, є найбільш інформативним. Для подальшого розуміння та аналізу кількісних оцінок хвильового поля розсіяного на торці півшару, на якому існує дефект з'єднання, розглядається модельна гранична задача із змішаними граничними умовами на торці. Вважаємо, що одна частина торця півшару жорстко закріплена, а інша — вільна від напружень. Проводиться порівняння акустичних характеристик поля в пружному хвилеводі з незмінними граничними умовами на торці різних типів (защемлений торець, вільний торець) та зі змішаними граничними умовами на торці.

Дослідження поширення хвиль Релея–Лемба в однорідних напівобмежених пружних хвилеводах без дефектів, за різних типів граничних умов на торці і за різних типів симетрії коливань, мають давню історію. Розглядалися, як симетричні відносно серединної площини коливання, так і антисиметричні [1]; [2], основна увага у яких була зосереджена на аналізі амплітудно-фазових характеристик нормальних хвиль і на енергетичних особливостях хвильового поля. Для розв'язання відповідної граничної задачі застосовувались різні чисельно-аналітичні методи. Якщо для кількісних оцінок хвильового поля, в напівобмеженому хвилеводі з вільним від напруження торцем, методи розв'язання відповідної граничної задачі добре відомі і їх застосування не викликає труднощів, то для защемленого торця — ситуація трохи інша. Ускладнення граничної задачі зумовлено існуванням особливості по напруженням в точці зміни типу граничних умов (для защемленого торця — це кутова точка).

Більш того при розв'язанні граничної задачі різними варіаціями методу однорідних розв'язків, коли хвильове поле представляється через суму нормальних хвиль, які можуть існувати на заданій частоті, ряди по напруженням розходяться в околі кутової точки. На сьогодні добре відомі різні методи подолання цієї проблеми. Зокрема, авторами було розвинуто метод суперпозицій, який дозволяє виділити особливість по напруженням і врахувати її через асимптотичні властивості невідомих. Це дало можливість досягти високої точності виконання як умови збереження енергії, так і точності виконання граничних умов на краю хвилеводу [2].

При зміні типу граничних умов та торці, гранична задача стає ще складнішою і відноситься до класу змішаних граничних задач теорії пружності. Такі граничні задачі здебільшого розв'язуються чисельними методами [3, с. 213–214], які унеможливають проведення фізичного аналізу хвильового поля з виділенням внеску окремих складових (нормальних хвиль) поля.

### Постановка проблеми

Аналіз параметрів хвильового поля в обмежених пружних тілах, залежно від частоти, способу збудження поля, типу граничних умов і типу симетрії (симетричні або антисиметричні коливання), дає цілісну картину як про структуру пружного середовища, так і про наявність дефектів. Проведення таких досліджень дозволяє, на основі кількісних оцінок, виділити інформативні параметри для ідентифікації дефектів як всередині пружного середовища, так і на границях обмеженого тіла. Математична складність таких задач обумовлена необхідністю виконання різнотипних крайових умов. В точці зміни типу граничних умов виникає особливість по напруженням, суть якої полягає в необмеженому зростанні напружень при підході до особливої точки. Саме тому детальне вивчення ближнього поля можливо лише на основі використання методів розв'язання граничних задач, які дозволяють враховувати наявність існуючої особливості. При цьому характер граничних умов визначає вид особливості (степенева або логарифмічна), а геометрія області з особливою точкою — степінь сингулярності. Відзначимо, що характер особливості і показник степені відомі апріорно із розв'язку статичної задачі і ця інформація використовується надалі для побудови розв'язку динамічної задачі.

### Аналіз останніх досліджень і публікацій

Проблема розсіяння хвиль в обмежених пружних тілах на неоднорідностях, які породжені різноманітними причинами, зокрема зміною

фізичних або геометричних характеристик середовища, зміною типу граничних умов на границі тіла, має давню історію. В сучасній науково-технічній літературі зібрано та систематизовано багатий експериментальний матеріал про вплив різних видів неоднорідностей на хвильові поля. Це створює передумови для теоретичного вивчення особливостей розсіяння хвиль на неоднорідностях, як для їх ідентифікації, так і для поглибленого розуміння фізичних причин, які обумовлюють такі особливості. Дана робота присвячена аналізу відбиття пружних хвиль від торця півшару, на якому змінюється тип граничних умов. Поставлена гранична задача має два аспекти. По-перше, це розробка методів розв'язання відповідної змішаної граничної задачі, по-друге, це аналіз фізичних причин, які обумовлюють характерні особливості хвильових полів. Відмітимо ряд підходів, які успішно застосовуються для розв'язання змішаних граничних задач, зокрема, це чисельні методи з виділенням особливості в точці зміни типу граничних умов [4] та зведення задачі до гіперсингулярних інтегральних рівнянь з подальшим їх чисельним або чисельно-аналітичним розв'язанням [5]. При цьому основна увага направлена на вивчення поведінки коефіцієнтів концентрації напружень в особливих точках. Аналіз відбиття пружних хвиль від границі обмежених тіл типу шару, у випадку змішаних граничних задач, здебільшого проводився для SH-хвиль (поперечних хвиль горизонтальної поляризації) [6]. Аналіз відбиття пружних хвиль вертикальної поляризації (P-, SV-хвиль) від неоднорідностей, для випадку змішаних граничних задач, на сьогодні проведений недостатньо.

**Метою** даної роботи є:

- аналіз енергетичних характеристик хвильового поля, розсіяного на торці пружного півшару, одна частина якого жорстко защемлена, а інша — вільна від напружень;
- встановлення основних рис хвильового поля, які є найбільш інформативними для аналізу співвідношення довжини частини торця, який жорстко защемлений, до довжини частини торця вільного від напружень.

### Постановка завдання

Розглядається модельна задача про збудження хвильового поля в пружному ізотропному півшарі жорстко защемленому по частині торця, з іншою частиною торця - вільною від напружень. Вільна від напружень частина торця починається на відстані  $H_1$  від горизонтальної осі півшару. Геометричні характеристики півшару такі:

$$Y = \pm H, Z \geq 0, -\infty < X < +\infty,$$

де  $2H$  — товщина.

У подальшому використовуються нормовані величини:  $y = Y/H, z = Z/H, h = H_1/H$ . Геометрія задачі показана на рис. 1.

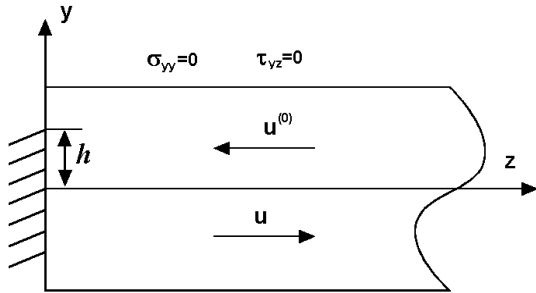


Рис. 1. Геометрія задачі

Фізичні властивості середовища задаються коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  і модулем зсуву  $\mu$ . Залежність від часу, для кінематичних та силових характеристик поля, має вигляд  $e^{-i\omega t}$ . Коливання збуджуються першою нормальною хвилею, яка поширюється з  $+\infty$  і позначається індексом (0). Необхідно знайти хвильове поле  $\vec{u}(y, z)$ , яке задовольняє векторному рівнянню Ламе:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

На торці півшару виконуються такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= 0, h \leq |y| \leq 1; \\ \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) &= 0, h \leq |y| \leq 1; \\ u_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0) &= 0, |y| \leq h; \\ u_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0) &= 0, |y| \leq h. \end{aligned} \quad (2)$$

Бічні поверхні вільні від напружень:

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0, z \geq 0. \quad (3)$$

Розглядається антисиметричне хвильове поле відносно площини  $y = 0$ .

### Метод розв'язання

У цій роботі для розв'язання поставленої граничної задачі використовувався метод суперпозицій, відповідно до якого, хвильове поле може бути представлено у вигляді:

$$\begin{aligned} u_z &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y - \\ &- \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_z(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_y &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) U_y(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \end{aligned} \quad (4)$$

Напруження, що відповідають цим переміщенням, знаходять ыз закону Гука і мають вираз

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{2\mu} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \frac{\beta_k^2 + q_1^2}{2} e^{-q_1 z} + B_k \beta_k q_2 e^{-q_2 z} \right) \sin \beta_k y + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \left[ \frac{(\tau^2 + p_2^2)(\tau^2 + \Omega_0^2)}{2p_1} \frac{\text{sh} p_1 y}{\text{ch} p_1} - \tau^2 p_2 \frac{\text{sh} p_2 y}{\text{ch} p_2} \right] \times \\ &\times e^{i\tau z} d\tau, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{yz}}{2\mu} &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left( A_k \beta_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \frac{\beta_k^2 + q_2^2}{2} q_2 e^{-q_2 z} \right) \cos \beta_k y + \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \tau \frac{\tau^2 + p_2^2}{2} \left( \frac{\text{ch} p_2 y}{\text{ch} p_2} - \frac{\text{ch} p_1 y}{\text{ch} p_1} \right) e^{i\tau z} d\tau. \end{aligned}$$

Уведені позначення  $\Omega_i = \omega H / c_i$ , де  $c_i$  — швидкість поздовжніх ( $i = 1$ ) і поперечних ( $i = 2$ ) хвиль.

$$\beta_k = \frac{2k-1}{2} \pi, \quad q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & \beta_k \geq \Omega_j; \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & \beta_k < \Omega_j; \end{cases}$$

$$p_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В представленому загальному розв'язку граничної задачі для півшару (4), (5), складова із сумами відповідає відомому розв'язку граничної задачі для періодично деформованого півпростору.

Виконання граничних умов (3) устанавлює зв'язок між невідомими сталим  $A_k, B_k (k = 1, 2, \dots)$  і функцією  $x(\tau)$ .

Переміщення для падаючої хвилі мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_z &= i\xi_k \left( p_2 \frac{\text{ch } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_k^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{\text{ch } p_1 y}{\text{sh } p_1} \right); \\ u_y &= \xi_k^2 \frac{\text{sh } p_2 y}{\text{sh } p_2} - \frac{\xi_k^2 + p_2^2}{2} \frac{\text{sh } p_1 y}{\text{sh } p_1}, \end{aligned} \quad (6)$$

де  $\xi$  — стала поширення, яка дорівнює першому дійсному кореню дисперсійного рівняння

$$(2\xi^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 \text{cth } p_1 - 4\xi^2 p_1^2 p_2 \text{cth } p_2 = 0. \quad (7)$$

Наступним кроком в побудові розв'язку поставленої граничної задачі є виконання граничних умов на торці (2). Відмітимо, що інтервал ( $h \leq |y| \leq 1$ ), на якому задані граничні умови для напруження, і інтервал ( $0 \leq |y| \leq h$ ), на якому за-

дані граничні умови для переміщення, становлять тільки частину повного інтервалу ( $0 \leq |y| \leq 1$ ), на якому переміщення і напруження розкладені в ряди Фур'є за повною і ортогональною системами базисних функцій (перший доданок у виразі (4)).

Граничні умови (2) можуть бути представлені як змішані граничні умови на повному інтервалі [7, с. 299–305] у вигляді:

$$G_1(z) = \begin{cases} u_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0) = 0, & 0 \leq |y| \leq h; \\ \tau_{zy}(y, 0) + \tau_{zy}^{(0)}(y, 0) = 0, & h \leq |y| \leq 1. \end{cases} \quad (8)$$

Підставляючи в дану умову вирази для переміщення та напруження, отримуємо нескінченну систему функціональних рівнянь. Для переходу від функціональних рівнянь до алгебричних, рівняння (8) множимо на  $\cos(\beta_n y)$  й інтегруємо по повному інтервалу ( $0 \leq |y| \leq 1$ ). При цьому, вираз для  $u_z + u_z^{(0)} = 0$  інтегруємо на інтервалі від 0 до  $h$ , а вираз для  $\sigma_{zz} + \sigma_{zz}^{(0)} = 0$  — на інтервалі від  $h$  до 1. Таким чином, задача зводиться до нескінченної системи алгебричних рівнянь щодо коефіцієнтів розкладів  $A_n, B_n$ .

Аналогічно вчиняємо з умовами для нормального напруження і вертикального переміщення, об'єднання яких призводить до наступної змішаної граничної умови

$$G_2(z) = \begin{cases} u_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0) = 0, & 0 \leq |y| \leq h; \\ \sigma_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) = 0, & h \leq |y| \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Рівняння (9) множимо на  $\sin(\beta_n y)$  і інтегруємо по повному інтервалу ( $0 \leq |y| \leq 1$ ).

Отримана таким чином нескінченна система лінійних рівнянь, як правило, розв'язується методом простої редукції. Але за наявності особливостей по напруженням в точці зміни типу граничних умов, збіжність рядів погана, що потребує врахування більшої кількості членів ряду, тобто розмірність системи суттєво зростає. Крім того, при існуванні локальних особливостей в характеристиках хвильових полів, зазвичай виникає неоднозначність в розв'язанні граничної задачі. При цьому можлива побудова декількох розв'язків, які відповідають основним рівнянням задачі і відрізняються тільки швидкістю прагнення до нескінченності тієї чи іншої характеристики поля. Тоді для побудови єдиного розв'язку необхідно визначити характер особливості.

Для сформульованої граничної задачі, показник особливості ( $p$ ) по напруженням в околі точки зміни типу граничних умов ( $y = \pm h$ ) є розв'язком рівняння [8, с. 91]

$$\sin^2(\pi p) \beta^2 + \cos^2(\pi p) = 0, \quad \beta = \frac{2-m}{m},$$

$$m = 4(1-\nu) \text{ для плоскої деформації} \quad (10)$$

Розв'язком рівняння (10) є комплексно спряжені корені

$$p = 0,5 \pm \frac{i}{2\pi} \lg \frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Для випадку комплексного кореня рівняння (10), поле напружень, в околі точки зміни типу граничних умов при  $r \rightarrow 0$ , має особливість порядку

$$\sigma_{zz}(r) = \sigma_0 r^{1-\zeta} \cos(\eta \lg r) \text{ або} \\ \sigma_{zz}(r) = \sigma_0 r^{1-\zeta} \sin(\eta \lg r), \quad p = \zeta + i\eta \quad (11)$$

Коливальний характер особливості по напруженням в околі особливої точки був предметом дискусій тривалий період часу. Для оцінки впливу коливань на особливості поля напружень в околі особливої точки, були запропоновані різні моделі, на аналізі яких в рамках даної роботи ми зупинятися не будемо. У праці [9] було відмічено, що коливальним характером особливості в околі особливої точки можна нехтувати, оскільки розмір зони, у якій коливання необхідно враховувати, не більше атомних зв'язків. Починаючи з цієї роботи, дискусії відносно коливально характеру особливості в полі напружень були практично закінчені.

Оцінимо величину  $r$  у виразі (11), при якій  $\cos(\eta \lg r)$  перший раз змінює знак. При  $r = 1$ ,  $\lg(r) = 0$ ,  $\cos(\eta \lg r) = 1$ .

Для  $\nu = 0,3$ ,  $\eta = -0,093$ ,  $\lg(r) = -16,79$ . Тобто, тільки починаючи з величин  $r \leq 10^{-16,79}$  проявляється коливальний характер особливості по напруженням. У даній роботі будемо враховувати лише амплітуду особливості в полі напружень.

У роботі, для покращення збіжності рядів, пропонується метод поліпшеної редукції, який полягає у використанні асимптотичних подань для коефіцієнтів  $A_k, B_k$  для великих значень  $k$ . Асимптотика невідомих визначається конкретним видом сингулярності, яка характерна для поставленої граничної задачі. Для даного типу задач характерно існування локальних особливостей по напруженням, які описують поле в околі точки зміни типу граничних умов через доданок, пропорційний  $r^{-0,5}$  (11). Тоді поведінка, зокрема, нормального напруження в околі особливої точки, описується залежністю

$$\sigma_{zz}(y)|_{z=0} = \frac{\sigma_0}{(h^2 - y^2)^{1/2}} \text{ при } y \rightarrow h-0.$$

Припускаючи, що за великих значень  $k$  (більших деякого  $N$ ) характер коефіцієнтів  $A_k$ ,  $B_k$  визначається поведінкою напружень в околі точки зміни типу граничних умов і враховуючи граничні умови для напружень (9), можна записати

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \left( A_k \frac{\beta_k^2 + q_1^2}{2} + B_k \beta_k q_2 \right) \sin \beta_k y = \frac{\sigma_0}{\sqrt{h^2 - y^2}}, \quad (12)$$

де  $\sigma_0$  — константа, яка підлягає визначенню.

Для знаходження асимптотики коефіцієнтів  $A_k$ ,  $B_k$  помножимо вираз (12) на  $\sin \beta_n y$  та проінтегруємо від 0 до 1. Необхідно врахувати, що на інтервалі від  $h$  до 1 нормальне напруження дорівнює нулю (9).

Аналогічно вчиняємо з дотичними напруженнями. Далі, використовуючи табличні інтеграли [10, ст. 382.]

$$\int_0^a (a^2 - t^2)^{\beta-1} \begin{cases} \sin bt \\ \cos bt \end{cases} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{2a}{b} \right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \begin{cases} H_{\beta-1/2}(ab) \\ J_{\beta-1/2}(ab) \end{cases},$$

де  $\Gamma(\beta)$  — гамма-функція;  $H_{\beta-1/2}(ab)$  — модифікована функція Струве;  $J_{\beta-1/2}(ab)$  — функція Бесселя першого роду, отримуємо систему двох рівнянь з двома невідомими  $A_k$ ,  $B_k$  ( $k > N$ ), розв'язок якої визначає асимптотичну поведінку невідомих.

Після виконання граничних умов (8), (9), отримуємо систему  $2N$  алгебричних рівнянь для  $2N + 2$  невідомих коефіцієнтів, де є два невизначені коефіцієнта  $\sigma_0$  та  $\tau_0$ . Для замикання системи використовуємо два рівняння для визначення асимптотичної поведінки невідомих.

Критерієм правильності розв'язку поставленої граничної задачі був контроль точності виконання закону збереження енергії, який виконувався з похибкою до 2% енергії падаючої хвилі для всього частотного діапазону за умови використання 30 членів в рядах.

### Аналіз результатів

Подальший аналіз ґрунтується на чисельних результатах, які були отримані при зміні значень  $h$ . Розрахунки проводились для матеріалу із  $\nu = 0,3$  в частотному діапазоні нижче критичної частоти, для хвилі з третім дійсним коренем (7). Добре відомо, що як для силових граничних умов, так і для кінематичних, характерна виражена частотна залежність коефіцієнтів відбиття і, відповідно, енергії різних мод, що поширюються. При цьому, для антисиметричних коливань характер частотної залежності енергії, яку переносить перша відбита нормальна хвиля, для вільного і заземленого торця значно різняться. Зокрема, для вільного торця можлива ситуація, коли на певних частотах відбувається повна трансформація падаючої хвилі в хвилю іншого порядку. Для коефіцієнту Пуассона  $\nu = 0,3$  — це частота  $\Omega_2 = 1,85$ .

Для кінематичних граничних умов, в діапазоні частот, який розглядається, перша нормальна хвиля залишається домінуючою з точки зору місткості енергії.

Така суттєва різниця в частотних залежностях коефіцієнтів відбиття двох різних нормальних хвиль, що поширюються, для крайніх випадків граничних умов на торці хвилеводу, дозволяє сподіватися на принципову можливість діагностики величини  $h$  по аналізу енергетичних характеристик відбитих хвиль.

Чисельні результати, які представлені на рис. 2, підтверджують дане припущення.

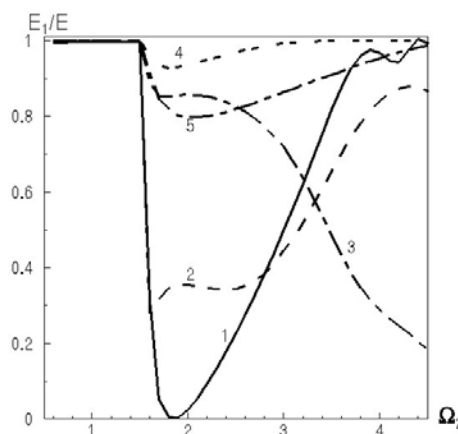


Рис. 2. Частотна залежність нормованої енергії першої відбитої хвилі:

крива 1 — вільний торець; 2 —  $h = 0.25$ ; 3 —  $h = 0.5$ ; 4 —  $h = 0.75$ ; 5 — заземлений торець

На рис. 2 представлено частотні залежності енергії, яку переносить перша відбита нормальна хвиля, нормовані на енергії падаючої хвилі, для різних величин  $h$ . Для кривої 1  $h=1$ , що відповідає випадку вільного краю хвилеводу, а для кривої 5 величина  $h=1$  — це повністю защемлений край. Крива 2 —  $h=0.25$ , 3 —  $h=0.5$ , 4 —  $h=0.75$ . До частоти  $\Omega_2 < \pi/2$  у відбитому полі може поширюватись тільки одна нормальна хвиля, яка переносить в дальнє поле всю енергію падаючої хвилі. Цей діапазон частот є неінформативним для оцінки впливу величини  $h$  через коефіцієнти відбиття нормальної хвилі в дальньому полі. Із збільшенням частоти ситуація змінюється. Починаючи з частоти  $\Omega_2 = \pi/2$ , у розсіяному полі друга нормальна хвиля стає такою, що поширюється, і відбувається перерозподіл енергії падаючої хвилі між двома відбитими хвилями, які переносять енергію в дальнє поле. Аналізуючи дані, наведені на рис. 2, відмітимо, що для всіх величин  $h$  величина енергії, яку переносить перша відбита хвиля, залежить від частоти. При цьому характер частотної залежності енергії першої хвилі змінюється при зміні  $h$ .

Зауважимо, що на різних частотах різниця між енергією першої відбитої хвилі для різних величин  $h$  варіює.

На рис. 3 наведено результати розрахунку енергії першої відбитої хвилі як функції величини  $h$  для частот  $\Omega_2 = 2,0$  (крива 1) та для  $\Omega_2 = 3,0$  (крива 2). Як видно з рисунку, для різних частот різняться не тільки величини енергії першої відбитої хвилі для різних  $h$ , але змінюється і характер залежності від  $h$ .

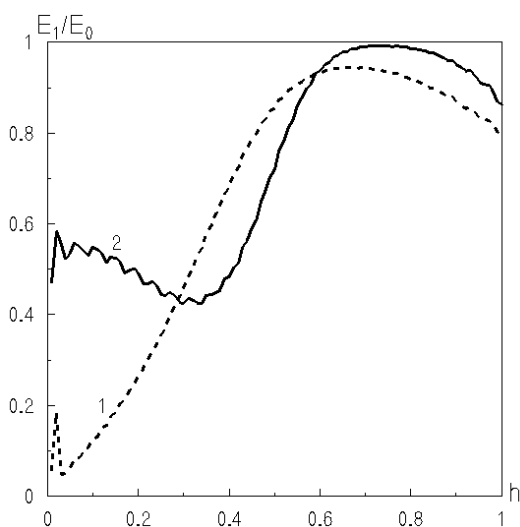


Рис. 3. Залежність енергії першої хвилі в розсіяному полі від величини  $h$  для різних частот:  
крива 1 — частота  $\Omega_2 = 2,0$ ;  
крива 2 — частота  $\Omega_2 = 3,0$

Таким чином, кількісний аналіз енергії, яку переносить перша, відбита від частково защемленого торця хвилі, на різних частотах може слугувати критерієм оцінки довжини  $h$ , на якій умови жорсткого защемлення не виконуються.

### Висновки

У статті розв'язана змішана гранична задача про відбиття першої нормальної хвилі, що поширюється, від краю хвилеводу, на частині якого задані кінематичні граничні умови, а на частині динамічні. Запропоновано чисельно-аналітичний метод розв'язання поставленої граничної задачі із урахуванням локальної особливості фізичного поля в точці зміни типу граничних умов.

Були отримані частотні залежності енергії, яку переносить перша, відбита від частково защемленого торця, нормальна хвиля для антисиметричних коливань півшару.

Показано, що енергія першої хвилі суттєво залежить не тільки від частоти, але і від співвідношення довжини, на якій задані кінематичні граничні умови, до довжини, на якій задані динамічні граничні умови. При зміні величини  $h$  на різних частотах змінюються не тільки кількісні величини енергії, але і характер залежності енергії від  $h$ .

### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Городецкая Н. С., Гринченко В. Т., Старовойт И. В. Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуслоя. *Акустичний вісник*. 2007. Т. 10, № 3. С. 42–54.
- [2] Гринченко В. Т., Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Антисимметричные колебания полуслоя с заземленным торцом. *Акустичний вісник*. 2009. Т. 12, № 1. С. 32–42.
- [3] Shen Wang, Songling Huang, Wei Zhao, Xue Wang. Approach to Lamb wave lateral crack quantification in elastic plate based on reflection and transmission coefficients surfaces. *Research in nondestructive evaluation*. 2010. Vol. 21. P. 213–223. DOI: 10.1080/09349847.2010.516060
- [4] Sinclair G. B., Beisheim J. R., Kardak A. A. On the detection of stress singularities in finite element analysis. *Journal of applied mechanics*. 2019. Vol. 86, №2. P. 021005 (18 pages). DOI: 10.1115/1.4041766
- [5] Bostrom A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation. *Applied Mechanics Reviews*. July 2003. Vol. 56. №4. P. 383–405. DOI: 10.1115/1.1574522
- [6] Deng-How Tsaur, Kao-Hao Chang, Ming-Sheng Hsu. A series solution for the diffraction of SH waves by a vertical edge crack. *Journal of applied mechanics*. July 2011. Vol. 78. P. 044502 (4 pages). DOI: 10.1115/1.4003745

- [7] Gorodetska N.S., Nikishov V.I., Shcherbak T.M. On the scattering of surface waves by underwater obstacles. *International journal of fluid mechanic's research*. 2019. Vol.46. №1. P. 295–308. DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.v46.i4.20
- [8] Боджи Д. Действие поверхностных нагрузок на систему из двух соединенных вдоль одной из граней упругих клиньев, изготовленных из различных материалов и имеющих произвольные углы раствора. *Труды американского общества инженеров-механиков*. 1971. Том 38. №2. С.87–96.
- [9] Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial crack. 1988. *Journal of applied mechanics*. Vol. 55, P. 98–103. DOI: 10.1115/1.3173668
- [10] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Москва: Наука, 1981. 798 с.

**Городецка Н. С., Старовойт І. В., Щербак Т. М.**

## **ВІДБИТТЯ ХВИЛЬ РЕЛЕЯ–ЛЕМБА ВІД ТОРЦЯ ПІВШАРУ ЗІ ЗМІШАНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ**

Стаття присвячена аналізу хвильового поля, яке збуджується при відбитті першої нормальної хвилі, що поширюється, від торця пружного півшару, частина якого жорстко зацемлена, а частина — вільна від напружень. Поставлена гранична задача відноситься до класу змішаних граничних задач, характерною особливістю яких є наявність локальної особливості по напруженням в точці зміни типу граничних умов. Для розв'язання поставленої граничної задачі, в роботі запропоновано метод суперпозиції, який дозволяє врахувати особливість по напруженням через асимптотичні властивості невідомих. Асимптотичні залежності для невідомих визначаються характером особливості, який відомий з розв'язку статичної задачі. Критерієм правильності отриманих результатів був контроль точності виконання закону збереження енергії. Похибка виконання закону збереження енергії не перевищувала 2 % енергії падаючої хвилі для всього частотного діапазону, у якому проводились дослідження, за умови врахування 30 членів в рядах, через які представлені напруження. Аналіз хвильового поля проводився для антисиметричних коливань. У статті показано, що починаючи з частоти запирання, для другої нормальної хвилі, енергія, яку переносить перша і друга відбита хвилі, суттєво залежить від частоти. При цьому можливі випадки, коли у відбитому полі відсутня хвиля того самого порядку, що і падаюча. Крім частоти, енергія, яку переносять відбиті від торця нормальні хвилі, залежить від величини співвідношення довжини, на якій торець півшару жорстко зацемлений, до довжини вільного торця. В роботі показано, що для конкретної частоти залежність енергії від  $h$  дуже складна і одна й та сама енергія в дальньому полі відповідає різним значенням  $h$ . Оскільки для різних частот залежність енергії від  $h$  різна, то критерієм оцінки величини  $h$  по величині енергії (при перерахунку величини переміщення) може слугувати різниця енергії на різних частотах.

**Ключові слова:** пружні хвилі; змішана гранична задача; енергетичний аналіз.

**Gorodetskaya N., Starovoit I., Shcherbak T.**

## **REFLECTION OF RELAY-LEMB WAVES FROM THE END OF THE HEMISPHERE WITH MIXED BOUNDARY CONDITIONS**

The article is devoted to the analysis of the wave field, which is excited when the first normal propagating wave is reflected from the end of the elastic hemisphere, part of which is rigidly clamped, and part is free from stresses. The boundary value problem belongs to the class of mixed boundary value problems, the characteristic feature of which is the presence of a local feature of stresses at the point of change of the type of boundary conditions. In order to solve this boundary value problem, it was proposed in the article a method of superposition, which allows taking into account the peculiarity of stresses due to the asymptotic properties of the unknowns. Asymptotic dependences for unknowns are determined by the nature of the feature, which is known from the solution of the static problem. The criterion for the correctness of the results was the control of the accuracy of the law of conservation of energy. The error of the law of conservation of energy did not exceed 2 % of the energy of the incident wave for the entire frequency range in which the research was conducted, provided that 30 members in the series through which the voltages are represented are taken into account. The analysis of the wave field was performed for antisymmetric oscillations. It is shown in the article that starting from the locking frequency for the second normal wave, the energy transferred by the first and second reflected waves depends significantly on the frequency. While there may be cases when there is no wave of the same order as the incident wave in the reflected field. In addition to the frequency, the energy transferred by the normal waves reflected from the end depends on the value of the ratio to the length at which the end of the hemisphere is rigidly clamped, to the length of the free end. The article shows that for a specific frequency the dependence of energy on  $h$  is very complex and the same energy in the far field corresponds to different values  $h$ . Since the dependence of energy on  $h$  for various frequencies is different, the criterion for estimating the value of  $h$  related to the amount of energy (when calculating the amount of displacement) can be the distinction in energy at different frequencies.

**Keywords:** elastic waves; mixed boundary conditions; energy analysis.

Стаття надійшла до редакції 03.04.2021 р.

Прийнято до друку 09.06.2021 р.