DOI: 10.18372/2310-5461.51.15666
УДК 519.47(045)

О. С. Охремчук
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0003-2239-0524
e-mail: eva_polskih@ukr.net;

В. А. Василенко, канд. техн. наук, доц.
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0003-4733-2953
e-mail: kit.vasilenko@nau.edu.ua

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ ТА ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ РУХУ ПОВІТРЯНИХ СУДЕН

Вступ

Розглядається система обслуговування рейсу повітряного судна (ПС) великої або середньої авіакомпанії. Вважається, що ПС здійснює політ з кількома посадками у транзитних аеровузлах. У поточний момент часу ПС знаходиться в одному з транзитних аеровузлів. Процес обслуговування є квазідетермінованим:

– обслуговування авіарейсу розглядається як певна послідовність підпроцесів (наземне обслуговування ПС, посадка пасажирів, зліт, політ, посадка і т. ін.);

– у межах планування розкладу процес представляється як одне ціле, тобто виконання наступної вимоги здійснюється безпосередньо після закінчення виконання попередньої вимоги;

– періоди обслуговування плануються з урахуванням складності та трудомісткості кожного етапу і вважаються детермінованими;

– захисні часові інтервали між обслуговуванням потоку вимог вважаються однаковими;

– вплив випадкових подій та чинників впливу враховується додаванням до періодів обслуговування та до захисних інтервалів випадкових часових інтервалів із нормальним розподілом.

Формування розкладу здійснюється шляхом складання впорядкованого списку з N завдань з відповідними пріоритетами. Ефективність формування розкладу за списком пріоритетів залежить від багатьох критеріїв;

– часові критерії (час стоянки і стиковки, час польоту за певним напрямком, переважний час виконання польоту відносно до часу доби та до паралельних рейсів у певному напрямі і т. ін.);

– критерії, пов'язані з типом ПС та його параметрами (кількість пасажирських крісел, дальність польоту, обмеження по рівню шуму для двигунів певних ПС тощо).

У найзагальнішому формулюванні проблеми складання розкладу полягають у такому — за допомогою деякої множини ресурсів або обслуговувальних пристроїв повинна бути виконана деяка фіксована система завдань. Мета полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань і ресурсів та обмеженнях, що накладені на них, знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, при застосуванні якого оптимізується бажана міра ефективності. Відмінністю представленої статті є саме врахування випадкових факторів впливу, які неможливо ні передбачити, ані усунути. Така задача у доступних нам джерелах не зустрічається.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Фундаментальним підґрунтям теорії розкладів є проблема оптимального розподілення кінцевої множини вимог, що обслуговуються детермінованими системами з одним чи декількома приладами, за різних припущеннях щодо характеру їх обслуговування [1]. Модель процесу побудови розкладу є сукупністю моделей, що описують ресурси, системи завдань, обмежень побудови та критеріїв оцінки [2]. Стосовно завдання, що розглядається, в якості ресурсів розуміються повітряні судна, а у якості завдань або вимог — рейси, що ними виконуються.

Залежно від характеру обслуговуючої системи процес обслуговування вимоги приладом повинен протікати безупинно. Якщо виникають обставини непереборної сили, можуть допускатися переривання з наступним дообслуговуванням вимоги [1]. При складанні розкладів без переривань виконання завдання, один раз почавшись, не може бути перервано, тобто виконання завдання завжди доходить до кінця. В іншому випадку — при складанні розкладів з перериваннями — дозволяється переривати завдання і вилучати їх із приладу ПС. При цьому вважається, що загальний час, необхідний для виконання завдання, залишається незмінним, а при перериваннях втрати часу обслуговування відсутні (тобто виконання перерваного завдання відновляється з того місця, у якому відбулося переривання) [2].

У монографії [3] розглядається загальна теорія розкладів, елементи якої при відповідних припущеннях та модифікаціях можуть застосовуватися для створення прийнятних розкладів руху ПС. При цьому методи практичної оптимізації розкладів у даній роботі не розглядаються.

У працях [4; 5] подано абстрактну математико-логічну модель розкладу та зроблено спробу оптимізації розкладу руху ПС при обмеженнях на ресурси приладів обслуговування (на кількість та експлуатаційно-технічні характеристики ПС). Порівняльний аналіз методів оптимізації у застосуванні до проблеми, що розглядається, проведений дуже стисло.

Треба відмітити, що в усіх представлених джерелах отримані суворі та досить обґрунтовані теоретичні та практичні результати досліджень стосовно до детермінованих одно стадійних та багатостадійних систем обслуговування. Однак питань впливу випадкових факторів, стохастичної оптимізації, функціонування систем, керованих випадковими подіями, автори не торкалися.

У поданій статті зроблено спробу заповнити, хоча б частково, цю прогалину.

Постановка завдання дослідження

Як показано в праці [4], планування розкладу базується на певних критеріях, які можна об’єднати в групи та побудувати список їх пріоритетів. Ці критерії, по-перше, є умовними, а по-друге — можуть вміщувати суперечності одне одному. Вони залежать від економічної стратегії авіакомпанії та можуть змінюватись залежно від кроків конкурентів, ситуації на ринку та намірів керівництва. Тому в системі планування розкладу повинна передбачатись можливість зміни ваги пріоритетів та їх порядку.

Як правило, для врахування суперечностей у цільових установках один з критеріїв вибирають основним (в нашому випадку — критерій першого пріоритету), а інші у в певному сенсі можна розглядати як деяке обмеження. Найбільш прийнятним для умов даної конкретної задачі є метод аналізу ієрархій (МАІ) Сааті [6]. Не претендуючи на повний та всебічний аналіз особливостей даного методу, зупинимося лише на впливі випадкових помилок, зумовлених нечіткістю формулювання чисельних ваг на основі кількісних суджень експерта або експертної групи. Іншими словами, задачу визначення умов, які накладаються на шукані ваги, треба розв’язувати відносно об’єктивності отриманих суджень. Для отримання відповіді на поставлені питання розглянемо властивості матриці парних порівнянь МАІ з членами, які містять адитивні стохастичні складові.

Аналіз матриці парних порівнянь зі стохастичними складовими

Розглянемо теоретичну матрицю парних порівнянь $\left\|\mathbf{A}_{pc}\right\|$ системи, що оптимізується за кількома пріоритетами:

$$\left\|\mathbf{A}_{pc}\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

де $\left(a_{ij}\right)$, $\left(i,j=1,2,\ldots,n\right)$ — кількісні судження про перевагу у парі об’єктів $\left(C_i,C_j\right)$, такі, що $a_{ij}=1/a_{ji}$.

Як відомо [6], після представлення кількісних суджень (у чисельному виразі) про кожну з пар $\left(C_i,C_j\right)$ через a_{ij} задача зводиться до того, щоб n можливим об’єктам $C_1,C_2,\ldots,C_n$ поставити в однозначну відповідність множину вагових коефіцієнтів (числових ваг) $w_1,w_2,\ldots w_n$, які адекватно відображали б зафіксовані судження. Далі розв’язується задача пошуку найбільшого серед усіх n частинних пріоритетів.

Теоретично доведено [6], що найбільшим з частинних пріоритетів $C_{\max}$ є такий, якому відповідає максимальне за модулем власне значення матриці (1). Тут треба зробити три важливих зауваження.

1. Матриця (1) теоретично є зворотно-симетричною. У праці [7] доведено, що зворотно-симетрична матриця має визначник, що тотожно дорівнює нулю, тобто матриця є сингулярною і погано обумовленою. Для алгебричної проблеми власних значень це не є перешкодою [8], але в загальному випадку стійкість алгоритму оптимізації не гарантується, а при розв’язанні системи алгебричних рівнянь рішення взагалі не існує.

2. У праці [6] з метою оптимізації у реальному часі пропонуються приблизні оцінки власних значень та власних векторів матриці парних порівнянь, що знову ж таки для

сингулярних погано зумовлених матриць є неприйнятним. Справа в тому, що спектральні радіуси оцінок власних значень можуть перетинатися [7], і виникає (теоретичний) ризик грубих помилок у визначенні пріоритетів.

3. На щастя, реальні матриці парних порівнянь не є строго зворотно-симетричними. Порушення точної зворотної симетричності викликано як впливом випадкових чинників, які неможливо ні попередити, ані пророкувати, так і методичними похибками обчислень, зумовленими округленням арифметичних операцій в обчислювальних системах [8].

Спираючись на ці міркування, подамо математичну модель матриці парних порівнянь у такому вигляді:

$$\left\|\mathbf{A}_{pc\,\mathrm{rand}}\right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \dfrac{1}{a_{12}+r_n\left[m,\sigma\right]} & 1 & \cdots & \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_{1n}+r_n\left[m,\sigma\right]} & \dfrac{1}{a_{2n}+r_n\left[m,\sigma\right]} & \cdots & 1 \end{matrix} \right\|,$$

де $r_n\left[m,\sigma\right]$ — випадкові числа з нормальним розподілом, математичним сподіванням m та середньоквадратичним відхиленням σ.

Для ілюстрації виявлених властивостей були проведені чисельні розрахунки визначників та чисел зумовленості зворотно-симетричних матриць різних класів точності.

Для обчислення визначника використовувався метод Гауса з вибором провідного елемента по стовпчику матриці загального вигляду з дійсними елементами. Крім того, проводилося оцінювання кількісного показника $I_{R\mathrm{cond}}$ числа зумовленості R_{cond} матриці: $I_{R\mathrm{cond}} = \dfrac{1}{R_{\mathrm{cond}}}$. Цей показник відіграє важливу роль у завданні аналізу стійкості та чутливості рішень до випадкових збурень. У таблиці наведені деякі результати розрахунків.

Результати розрахунків, наведені у табл. 1, свідчать, що методичні похибки превалюють над впливом випадкових факторів навіть з середньоквадратичним відхиленням σ = 0,1. Це уповні логічно, тому що при цьому дисперсія $\sigma^2 = 0{,}01$ є величиною другого порядку малості, і нею можна знехтувати. Однак, щоб уникнути втрат стійкості алгоритму оптимізації розкладу, необхідно регулярно проводити загальний контроль інтенсивності випадкових факторів впливу.

Розрахунки визначників та чисел зумовленості зворотно-симетричних матриць різних класів точності

Матриця		$I_{R\mathrm{cond}}$	Визначник $\det\left\|\mathbf{A}_{ps}\right\|$
Строго зворотно-симетрична	$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 \\ 2 & 1 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 4 & 2 & 1 & 0{,}5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$	$I_{R\mathrm{cond}} \equiv 0$	$\det\left\|\mathbf{A}_{ps}\right\| \equiv 0$ (вироджена матриця)
Зворотно-симетрична з методичними похибками розрахунків	$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 2{,}38 & 1 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}85 & 3{,}125 & 1 & 0{,}22 \\ 1{,}515 & 2{,}27 & 4{,}545 & 1 \end{bmatrix}$	$I_{R\mathrm{cond}} \approx 0{,}39$	$\det\left\|\mathbf{A}_{ps}\right\| \approx -7{,}85$
Зворотно-симетрична з випадковими збуреннями елементів, середньоквадратичне відхилення σ = 0,1	$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 2{,}493 & 1 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}934 & 3{,}054 & 1 & 0{,}22 \\ 1{,}527 & 2{,}282 & 4{,}503 & 1 \end{bmatrix}$	$I_{R\mathrm{cond}} \approx 0{,}4$	$\det\left\|\mathbf{A}_{ps}\right\| \approx -8{,}45$
Зворотно-симетрична з випадковими збуреннями елементів, середньоквадратичне відхилення σ = 0,01	$\begin{bmatrix} 1 & 0{,}42 & 0{,}54 & 0{,}66 \\ 2{,}383 & 1 & 0{,}32 & 0{,}44 \\ 1{,}844 & 3{,}118 & 1 & 0{,}22 \\ 1{,}525 & 2{,}263 & 4{,}547 & 1 \end{bmatrix}$	$I_{R\mathrm{cond}} \approx 0{,}39$	$\det\left\|\mathbf{A}_{ps}\right\| \approx -8{,}33$

Для розрахунків при застосуванні методу аналізу ієрархій пропонується використовувати чисельні методи пошуку власних значень та власних векторів матриці загального виду, зокрема, метод QR-ітерацій Кублановської–Френсіса [9]. Алгоритм методу простий:

– матриця загального виду приводиться методом Хаусхолдера до верхньої трикутної форми Гесенберга;

– методом QR-ітерацій знаходяться власні значення приведеної матриці;

– обирається максимальне власне значення, якому відповідає найбільший частинний пріоритет.

При цьому забезпечуються як швидкість, притаманна методу Хаусхолдера, так і універсальність методу QR-ітерацій. Для зменшення методичних похибок метод QR-ітерацій доцільно коригувати шляхом покрокової корекції рішення.

Очікується, що, окрім підвищення точності поточних рішень, це даватиме зниження чутливості остаточного рішення до випадкових похибок задавання початкових даних (у випадку, що розглядається — до випадкових похибок індексу узгодженості суджень). Дослідження у цьому науковому напрямі планується продовжити у подальшому.

Висновки

На нашу думку, практична важливість аналізу стійкості в теорії розкладу повітряного руху не викликає сумнівів. Стійкість рішення, у першу чергу, залежить від точності чисельних методів та розрахунків. Крім того, для уникнення втрат стійкості алгоритму оптимізації розкладу необхідно регулярно проводити загальний контроль інтенсивності випадкових факторів впливу. При цьому для теорії розкладів не менше значення має й швидкість розрахунків: якщо результати будуть представлені, коли ПС вже знаходиться у польоті, вони взагалі не будуть мати будь-якої користі.

Запропонований алгоритм, модифікований шляхом уведення покрокової корекції рішення, вважається вельми корисним, оскільки він поєднує потрібну точність та швидкість отриманих розрахунків.

У подальшому планується дослідити вплив випадкових похибок індексу узгодженості на зумовленість матриці парних порівнянь та випливаючих звідси стійкості отриманих рішень і чутливості до похибок задавання початкових даних.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Танаев В. С., Сотсков Ю. Н., Струсевич В. А. Теория расписаний. Многостадийные системы. М.: Наука, 1989. 328 с.

[2] Bruno J. L., Coffman R. G., Jr., Graham R. L., Kohler W. H., Sethi R., Steiglitz K., Ullman J.D. Computer and job-shop scheduling theory. John Wiley & Sons, Inc., 1976. 299 pp.

[3] Pinedo M. L. Scheduling: Theory, Algorithms, and Systems. Fifth ed. Springer Science+Business Media, LLC 2016. 674 pp.

[4] Okhremchuk O. Scheduling optimisation under contradictions in criteria functions – *Наукоємні технології*. 2019. Т.42. №2. С. 184–188. DOI: https://doi.org/10.18372/2310-5461.42.13750

[5] Охремчук О. С. Математико-логічна модель типового розкладу руху повітряних суден. *Науковий збірник «Вісник Університету «Україна». Серія: Інформатика, обчислювальна техніка та кібернетика»*. 2019. Том 2. № 23.

[6] Saaty T. L. The analytic hierarchy process. McGraw Hill, N.-Y., 1980, 288 pp.

[7] Nick Vinogradov, Vladimir Drovovozov, Alina Savchenko, Inna Kudzinovskaya. An analysis of singularity of the matrices of priorities and sensibility of decisions as key performance indicators of the analytic hierarchies process. *Journal of Qafqaz University* (Mathematics and Computer Sciences), 2011. Nr. 32, P. 40–48.

[8] Wilkinson J. H. The Algebraic Eigenvalue Problem. Clarendon Press, 1988. 680 pp.

[9] Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.

Охремчук О. С., Василенко В. А.

МАТЕМАТИЧНІ АСПЕКТИ ТА ОСОБЛИВОСТІ РОЗРАХУНКУ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗКЛАДУ РУХУ ПОВІТРЯНИХ СУДЕН

У роботі продовжується цикл досліджень з методів формування розкладу руху повітряних суден (ПС) на основі класичної теорії розкладів як теорії багатостадійних систем. Показано, що рух ПС є процесом без переривань, оскільки кожен конкретний рейс в певний момент часу виконується тільки одним повітряним судном. На відміну від попередніх робіт з теорії розкладів у даному дослідженні враховані випадкові фактори впливу, зумовлені метеорологічними умовами на трасі польоту. Відповідно до теорії розкладів розглянуто задачу стохастичної оптимізації кінцевої послідовності вимог, що обслуговуються системами з декількома приладами, при різних припущеннях про випадковий характер їх обслуговування.

Показано, що найбільш слабким припущенням щодо можливості реалізації узагальненого оператору, який теоретично переводить безліч вимог в безліч узгоджених і виконаних планів, є монотонність і унімодальність відповідного функціоналу сформованих планів при малих випадкових впливах. Досліджено потенціальні можливості теорії багатостадійний систем при створенні оптимального розкладу руху для середніх або великих авіакомпаній як систем критичного застосування. Висунуто основні вимоги до побудови математичної розкладу у вигляді процесу, керованого випадковими подіями. З використанням математичних моделей розкладу на підґрунті базових даних поточного руху повітряних суден в районі аеропорту або аеровузла встановлено, що коли базові аеропорти змінюють своє призначення і виступають в якості термінальних аеропортів прибуття, відповідні елементи матриці є обернено-симетричними. Проведено додаткові дослідження властивостей обернено-симетричних матриць та впливу адитивних випадкових складових на стійкість оптимальних рішень. На основі методу аналізу ієрархій Сааті вибрані й обґрунтовані найбільш придатні показники ефективності формування оптимального розкладу при випадковостях в індексах узгодженості частинних пріоритетів з урахуванням переваг часу прибуття і відправлення пасажирських рейсів. Виведено вираз для результуючого функціоналу ефективності розкладу як розв'язку завдання багатокритеріальної оптимізації методом квазілінійної згортки критеріїв.

Ключові слова: Теорія розкладів; теорія багатостадійних систем; метод аналізу ієрархій; просторово-поверхнева матриця розміщення; індекси узгодженості.

Okhremchuk O., Vasilenko V.

MATHEMATICAL ASPECTS AND FEATURES OF CALCULATION OF THE OPTIMAL SCHEDULE OF AIRCRAFT MOVEMENT

The cycle of researches on methods of formation of the schedule of movement of aircrafts (PS) on the basis of the classical theory of schedules as the theory of multistage systems proceeds in work. It is shown that the movement of the aircraft is a process without interruptions, because each specific flight at a given time is performed by only one aircraft. In contrast to previous work on the theory of schedules, this study takes into account random factors of influence due to meteorological conditions on the flight path. According to the theory of schedules, the problem of stochastic optimisation of the final sequence of requirements serviced by systems with several devices, with different assumptions about the random nature of their maintenance. It is shown that the weakest assumption about the possibility of implementing a generalized operator, which theoretically translates many requirements into many agreed and executed plans, is the monotonic and unimodal kind of the corresponding functionality of the generated plans under small random influences. The potential of the theory of multistage systems in creating an optimal schedule for medium or large airlines as systems of critical application is researched. The basic requirements for the construction of a mathematical schedule in the form of a process controlled by random events are established. Using mathematical models of scheduling based on the basic data of the current movement of aircraft in the area of the airport or air cluster, we established that when the base airports change their purpose and act as terminal airports of arrival, the corresponding elements of the matrix are inversely symmetric. Additional studies of the properties of inversely symmetric matrices and the influence of additive random components on the stability of optimal solutions are carried out. Based on the method of Saaty analytic hierarchy process, the most suitable indicators of the efficiency of forming the optimal schedule in case of coincidences in the consistency indices of partial priorities, taking into account the advantages of arrival and departure times of passenger flights, are selected and substantiated. The expression for the resulting decomposition efficiency functional as a solution of the problem of multi criteria optimisation by the method of quasi-linear convolution of criteria is derived.

Keywords: Schedule theory, theory of multistage systems, analytic hierarchy process, spatial-surface placement matrix, consistency indices.

Стаття надійшла до редакції 01.09.2021 р.
Прийнято до друку 18.10.2021 р.