DOI: 10.18372/2310-5461.45.14578
УДК 656.7.071: 656.7.052.002.5 (045)

В. М. Кузьмин, канд. техн. наук
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0003-4461-9297
e-mail: kuzmin_vn@i.ua;

М. Ю. Заліський, канд. техн. наук, доц.
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0002-1535-4384
e-mail: maximus2812@ukr.net;

В. П. Климчук, канд. техн. наук, проф.
Національний авіаційний університет
orcid.org/0000-0001-8378-002X
e-mail: klimchuk@ukr.net

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІСЕГМЕНТНОЇ РЕГРЕССІЇ

Вступ

Як відомо, побудова математичних моделей є одним з найбільш розповсюджених методів наукового пізнання та може використовувати елементи теорії апроксимації, які в основному ґрунтується на використанні звичайного методу найменших квадратів.

Однак аналіз показує, що в теорії апроксимації використання звичайного методу найменших квадратів у випадках опису нестаціонарних випадкових процесів є не доцільним, оскільки це призводить з одного боку до гіршої точності апроксимації, а з іншого — до незадовільних результатів прогнозування. Причиною нестаціонарності, зокрема, може бути гетероскадичність емпіричних даних, яка характеризується різними значеннями дисперсії для різних емпіричних значень досліджуваної вибірки.

У теорії апроксимації до 80х років XX ст. досить часто застосовувалися поліноми Лагранжа, Чебишева та більш високих порядків. Однак сьогодні під час використання методу найменших квадратів поліноми вище третього порядку практично не використовуються. кріс того, у деяких дослідженнях взагалі обмежуються лінійною регресією, обґрунтовуючи це простотою математичних розрахунків.

Останнім часом зарубіжні дослідники для апроксимації емпіричних даних почали широко використовувати апарат полісегментних регресій з декількома лінійними або параболічними ділянками.

Аналіз літератури

Аналіз літератури [1–7] в сфері обробки емпіричних даних показує, що на сучасному етапі розвитку науки і техніки достатня увага приділяється питанням апроксимації. Однак під час використання полісегментних регресій виникають задачі оптимізації абсцис точок перемикання між окремими сегментами; ці питання в літературі відображені не повною мірою [8; 9].

Обчислення оптимальної абсциси точки перемикання дозволить збільшити точність апроксимації (наприклад, зменшити стандартне відхилення) і в цілому покращити прогнозні властивості і саму математичну модель.

Крім того, сьогодні під час побудови математичних моделей розглядають кілька альтернативних варіантів для можливості вибору найкращого з них [2; 10].

Ще однією важливою проблемою є урахування гетероскедастичності. Аналіз літератури показує, що хоча є достатня кількість методів виявлення гетероскедастичності [8], проте відсутня єдина чітка методика розрахунку вагових коефіцієнтів, які компенсують наявність гетероскедастичності.

Тому в цій статті розв’язується актуальна науково-технічна задача апроксимації емпіричних даних з використанням різних варіантів регресії, в тому числі і двосегментної, отримання єдиного аналітичного виразу для якої стало можливим в результаті застосування функції Хевісайда.

Постановка завдання

Виконаємо математичну постановку задачі дослідження. Припустимо, що для набору двовимірних статистичних даних (x_i, y_i) існує набір апроксимаційних функцій $\hat{y}_i = f_n(x_i, \vec{a}_{m,n})$, де $\vec{a}_{m,n}$ — вектор m параметрів для заданої апроксимаційної функції апроксимації; n — номер апроксимаційної функції. Для кожної апроксимаційної функції може бути розраховано стандартне відхилення σ між дійсними емпіричними значеннями y_i та оцінками $\hat{y}_i$. У цьому випадку відбір найкращої математичної моделі буде - здійснюватися відповідно до такого критерію

$$n = \inf\left(s \in \mathrm{N}\,\forall j : \sigma(f_s(x_i, \vec{a}_{m,s})) \leq \sigma(f_j(x_i, \vec{a}_{m,j}))\right).$$

Завдання дослідження

Метою цієї роботи є розробка методики обґрунтування доцільності використання полісегментної регресії під час побудови математичних моделей.

Для досягнення мети дослідження було вирішено такі завдання:

– аналіз експериментальних даних та побудова лінійної моделі з використанням звичайного методу найменших квадратів;

– побудова двосегментної лінійної моделі з використанням звичайного методу найменших квадратів;

– побудова показникової моделі з використанням звичайного методу найменших квадратів;

– оптимізація абсциси точки перемикання сегментів;

– обчислення вагових коефіцієнтів для гетероскедастичності для уточнення математичної моделі;

– оцінка числового значення показника гетероскедастичності;

– порівняння результатів різних варіантів апроксимації.

Аналіз вихідних даних

Розглянемо приклад вихідних даних, наведених у праці [1]. Ці дані характеризують залежність кількості y керівників від кількості x працівників на промислових підприємствах. При цьому дані про величину x знаходяться в межах [247; 1650].

Вихідні дані наведені в таблиці.

Слід зазначити, що для полегшення подальшого статистичного аналізу вихідні дані були перетворені в порядку зростання величини x.

Графічне зображення вихідних даних показано на рис. 1.

Таблиця 1

Залежність кількості *y* керівників від кількості *x* працівників на промислових підприємствах

x_i	247	267	294	311	358	423	438	450	534
y_i	32	37	30	49	44	47	68	56	62
x_i	615	627	630	688	697	700	709	850	980
y_i	100	97	84	80	78	106	88	128	130
x_i	999	1015	1021	1022	1025	1200	1250	1500	1650
y_i	109	117	97	114	160	180	112	210	135

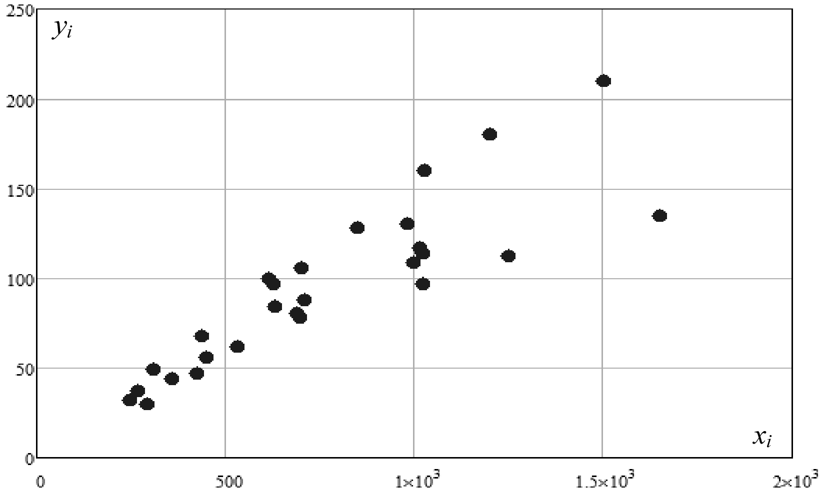

Рис. 1. Графічне представлення вихідних даних

У праці [1] ці дані були апроксимовані з використанням звичайної лінійної регресії. У результаті апроксимації було отримано таке рівняння

$$y(x) = 14.4481 + 0.1054\,x\,. \tag{1}$$

Вихідні дані та їх апроксимація з використанням лінійної регресії зображені на рис. 2. Візуальний аналіз перших восьми точок на рис. 2 показує, що шість із них знаходяться нижче отриманої регресії. Це свідчить про те, що така апроксимація незадовільно описує ліву частину кореляційного поля. При цьому у разі такої апроксимації отримаємо прогнозне значення в 14 керівників для випадку відсутності працівників. Тому виникає необхідність розглянути декілька інших варіантів апроксимації.

Лінійна регресія, яка виходить із початку системи координат

Для побудови цієї моделі використаємо в якості апроксимуючої функції рівняння такого вигляду:

$$y(x) = bx\ ,$$

де невідомий коефіцієнт розраховується за формулою

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}\ .$$

Для даних із таблиці отримаємо рівняння наступного вигляду:

$$y(x) = 0.1208x\ . \qquad (2)$$

Вихідні дані та їх апроксимація з використанням лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, зображені на рис. 3.

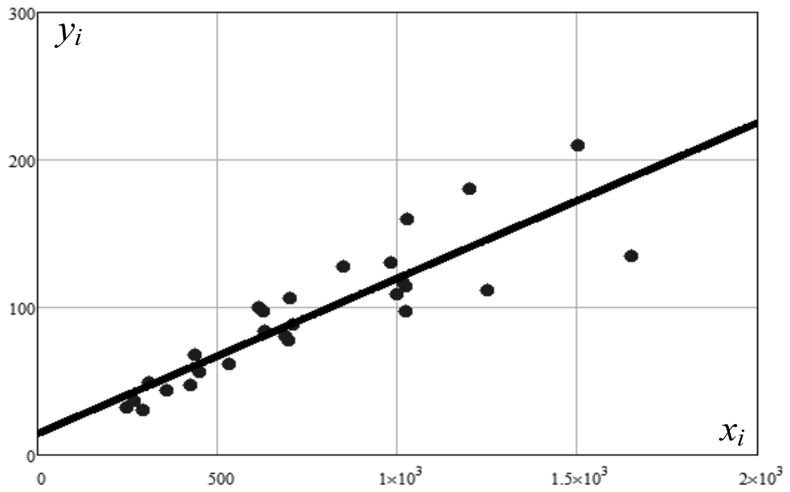

Рис. 2. Вихідні дані та їх апроксимація з використанням лінійної регресії

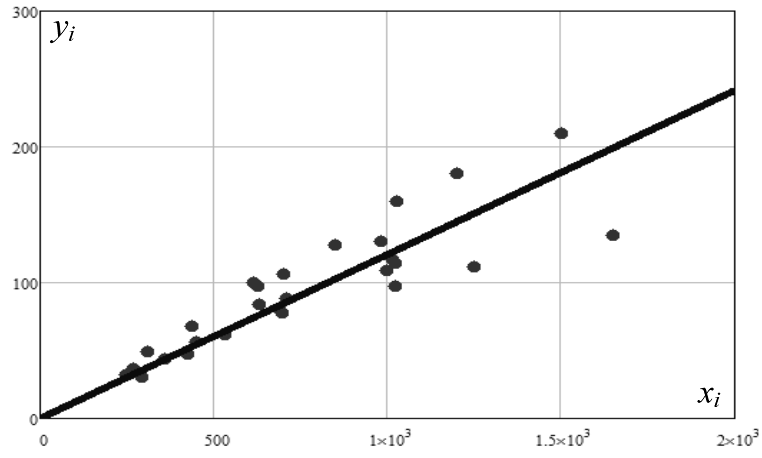

Рис. 3. Вихідні дані та їх апроксимація з використанням лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат

Візуальний аналіз даних на рис. 3 показує, що незважаючи на те, що ліва частина кореляційного поля описується краще, отримана апроксимація має суттєвий недолік у термінах дуже високого значення максимального відхилення для останньої точки (яке становить 74.3746).

Двосегментна (полігональна) лінійна регресія, яка виходить із початку системи координат

Для побудови цієї моделі використаємо як апроксимуючу функцію рівняння такого вигляду:

$$y(x) = bx + c(x - x_{\mathrm{sw}})h(x - x_{\mathrm{sw}})\ ,$$

де x_{sw} — абсциса точки перемикання, $h(x - x_{\mathrm{sw}})$ — функція Хевісайда.

Під час знаходження невідомих коефіцієнтів апроксимації вирішується система двох лінійних рівнянь. Для отримання найкращої апроксимації виникає задача оптимізації абсциси точки перемикання.

Візуальний аналіз вихідних даних дозволяє встановити первинний інтервал можливих значень оптимальної абсциси точки перемикання. Цей інтервал становить [700; 1100]. Для п'яти варіантів абсциси точки перемикання з кроком дискретизації Δ = 100 отримаємо п'ять двосегментних лінійних регресій, які виходить із початку системи координат, такого вигляду

$$y(x) = 0.1367 - 0.0507(x-700)h(x-700),$$

$$y(x) = 0.1355x - 0.0590(x-800)h(x-800),$$

$$y(x) = 0.1329x - 0.0648(x-900)h(x-900),$$

$$y(x) = 0.1290x - 0.0648(x-1000)h(x-1000),$$

$$y(x) = 0.1284x - 0.0807(x-1100)h(x-1100).$$

Для кожної регресії були розраховані значення стандартних відхилень, які становили $\sigma = \{20.8547;\ 20.6450; 20.6296;\ 20.9185; 20.7619\}$. З метою вирішення задачі оптимізації виконаємо апроксимацію розрахованих стандартних відхилень параболою другого ступеня з використанням звичайного методу найменших квадратів. Отримана парабола має вигляд:

$$\sigma(x) = 2091 - 46.941x + 0.0257x^2.$$

Мінімум цієї параболи відповідає оптимальному значенню абсциси точки перемикання: $x_{\text{sw ОПТ}} = 912.197$.

Тоді отримаємо базове рівняння для двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, такого вигляду:

$$y(x) = 0.1325x - \\ - 0.06515(x-912.197)h(x-912.197). \qquad (3)$$

Графічне представлення вихідних даних і їх апроксимація з використанням двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, наведені на рис. 4.

Урахування гетероскедастичності під час побудови математичної моделі

Аналіз кореляційного поля дозволяє виділити два кластери: перший — у межах першого сегмента, а другий — у межах другого сегмента. Дисперсії в межах двох кластерах значно відрізняються. Це свідчить про наявність гетероскедастичності в досліджуваних даних.

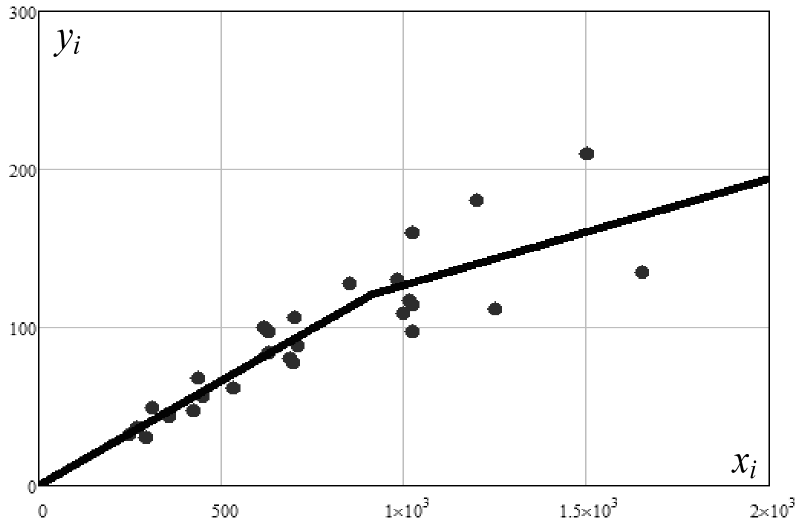

Рис. 4. Вихідні дані та їх апроксимація з використанням двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат

Розглянемо метод обчислення коефіцієнтів гетероскедастичності, описаний в праці [11]. Вагові коефіцієнти гетероскедастичності розраховуємо за формулами:

$$W_i = \left(\frac{\bar{y}}{y_b(x)} \right)^h,$$

де $\bar{y}$ — середнє значення всіх емпіричних точок, $y_b(x)$ базове рівняння (апроксимація двосегментною лінійною регресією, яка виходить із початку системи координат (3)), h — показник гетероскедастичності.

Для п'яти варіантів значень показника гетероскедастичності отримані наступні рівняння апроксимаційних функцій:

$$h = 0:\ y(x) = 0.1325x -$$

$$-0.06515(x-912.197)h(x-912.197),$$

$$h=1: \ y(x)=0.13228x-$$

$$-0.06369(x-912.197)h(x-912.197),$$

$$h=2: \ y(x)=0.13198x-$$

$$-0.06204(x-912.197)h(x-912.197),$$

$$h=3: \ y(x)=0.13152x-$$

$$-0.06000(x-912.197)h(x-912.197),$$

$$h=4: \ y(x)=0.13104x-$$

$$-0.05802(x-912.197)h(x-912.197).$$

Для кожної регресії були розраховані значення стандартних відхилень, які складали $\sigma=\{20.6516; 17.8427; 16.4699; 16.9053; 19.7892\}$.

З метою вирішення задачі оптимізації виконаємо апроксимацію розрахованих стандартних відхилень параболою другого ступеня з використанням звичайного методу найменших квадратів. Отримана парабола має вигляд:

$$\sigma(x)=20.663-3.980x+0.908x^2.$$

Мінімум цієї параболи відповідає оптимальному значенню показника гетероскедастичності: $h_{\text{ОПТ}}=2.192$.

Тоді отримаємо фінальне рівняння для двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, з урахуванням гетероскедастичності:

$$y(x)=0.13198x-$$

$$-0.06160(x-912.197)h(x-912.197). \qquad (4)$$

Графічне представлення вихідних даних і їх апроксимація з використанням двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, з урахуванням гетероскедастичності наведені на рис. 5.

Аналіз максимальних відхилень для випадків використання звичайного методу найменших квадратів та урахування гетероскедастичності дозволив отримати такі чисельні значення: 49.585 і 48.366, відповідно. Як видно, урахування гетероскедастичності дозволило поліпшити точність апроксимації.

Використання показникової апроксимації

Для вирішення задач довгострокового прогнозування необхідно мати дані для підприємств з великою кількістю працівників. Оскільки таких даних немає в наявності, раціональніше було б побудувати математичну модель з використанням логарифмічної шкали. В цьому випадку використовуємо показникову функцію. Після перетворення вихідних даних рівняння апроксимуючої функції матиме вигляд:

$$\ln y(x)=a+b\ln x.$$

Для даних із таблиці отримаємо рівняння такого виду:

$$\ln y(x)=-1.4846+0.9092\ln x. \qquad (5)$$

Логарифми вихідних даних і їх апроксимація за допомогою отриманого рівняння зображені на рис. 6. Порівняння двосегментної оптимальної і показникової регресій в напівлогарифмічному масштабі зображено на рис. 7.

Для кількісного порівняння двосегментної оптимальної і показникової регресій був використаний тест на лінійність, запропонований у праці [12]. У досліджуваному випадку цей тест використовується для оцінки міри адекватності запропонованих математичних моделей. Під час використання цього тесту були розраховані кумулятивні криві залишків і знайдені їх розмахи, які склали: для двосегментної оптимальної регресії — 91.039, а для показникової — 117.347. Це доводить адекватність (кращу точність апроксимації) двосегментної оптимальної регресії порівняно з показниковою.

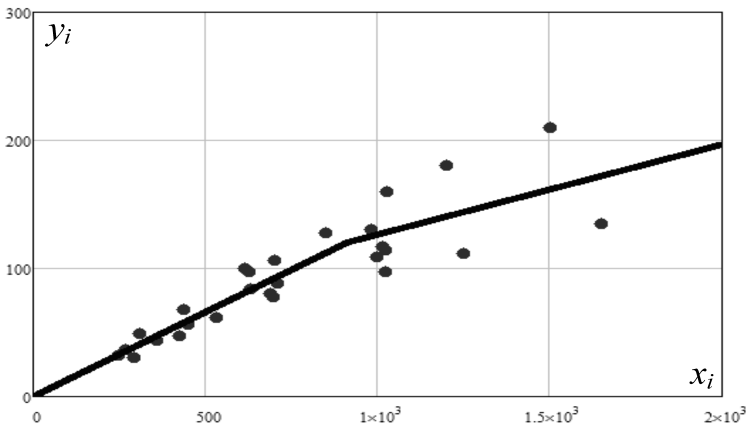

Рис. 5. Вихідні дані та їх апроксимація з використанням двосегментної лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, з урахуванням гетероскедастичності

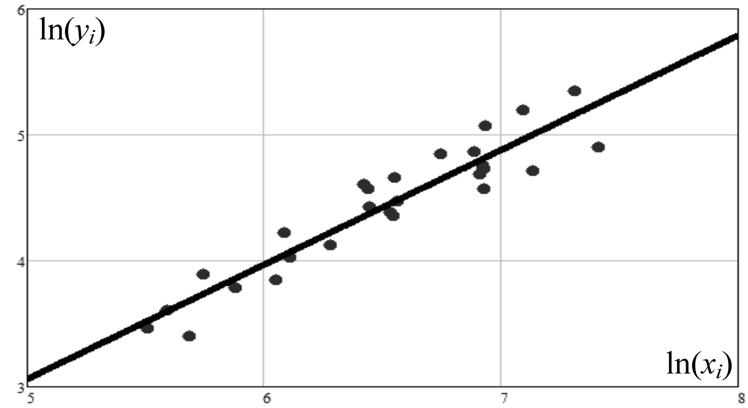

Рис. 6. Логарифми вихідних даних і їх апроксимація показниковою функцією

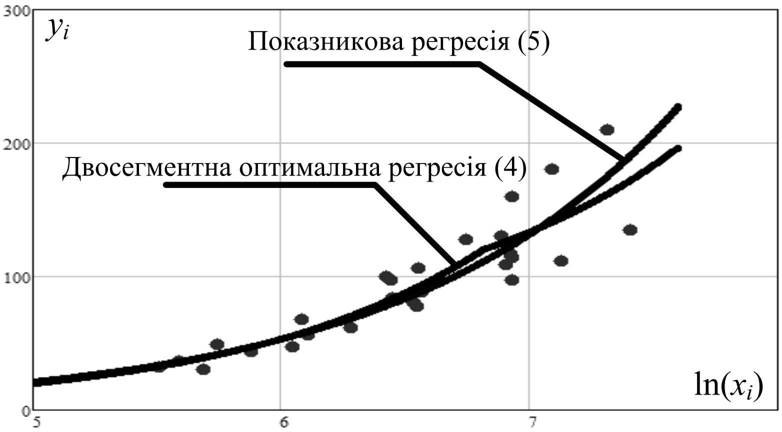

Рис. 7. Порівняння двосегментної оптимальної і показниковою регресій в напівлогарифмічному масштабі

Висновки

Стаття присвячена методам побудови математичних моделей з використанням регресійного аналізу та з урахуванням гетероскедастичності.

Емпіричні дані були апроксимовані лінійною, лінійною, яка виходить із початку системи координат, двосегментною лінійною і показниковою регресіями.

Незадовільні результати апроксимації з використанням звичайної лінійної регресії (1) та лінійної, яка виходить із початку системи координат (2), є передумовою для застосування інших більш точних апроксимаційних функцій: двосегментної звичайної (3), двосегментної з урахуванням гетероскедастичності (4) та показникової (5). Під час використання двосегментної регресії на першому етапі була визначена оптимальна абсциса точки перемикання, а на другому етапі — визначено числове значення показника гетероскедастичності. Обчислена таким чином оптимальна двосегментна регресія є більш адекватною в порівнянні з показниковою регресією за критерієм мінімуму розмаху кумулятивної кривої залишків. Результати дослідження можуть бути використані в якості методологічного інструменту під час побудови та вибору найкращої математичної моделі.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Chatterjee S.,** Hadi S.A. Regression analysis by examples. New York: John Wiley and Sons, 2012. 394 p.

2. **Himmelblau D. M.** Process analysis by statistical methods. New York: John Wiley and Sons, 1970. 958 p.

3. **Миллс Ф.** Статистические методы. М.: Государственное статистическое издательство, 1958. 800 с.

4. **Mordecai Ezekiel**, Karl A. Fox. Method of correlation and regression analysis. Linear and curvilinear. New York: John Wiley and Sons, 1959. 548 p.

5. **Reklaitis G.V.,** Ravindran A., Ragsdell K.M. Engineering optimization. Methods and applications. New York: John Wiley and Sons, 1983. 688 p.

6. **Демиденко Е. З.** Линейная и нелинейная регрессии. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.

7. **Вучков И.,** Бояджиева Л., Солаков Е. Прикладной линейный регрессионный анализ. Финансы и статистика, 1987. 240 с.

8. **Johnston J.** Econometric methods. New York: McGraw Hill, 1984. 568 p.

9. **Kuzmyn V. M.,** Zaliskyi M. Yu., Kozhokhina O. V., Kaminskyi Ye. O. Approximation of time series with multiple switching points. *Новітні технології*. 2019. № 1 (8). С. 6–13.

10. **Кузьмин В. М.,** Заліський М. Ю. Статистичний аналіз даних з використанням двосегментної параболічної регресії. *Наукоємні технології*. 2018. № 2 (38). С. 173–177.

11. **Kuzmin V. M.,** Zaliskyi M. Yu., Petrova Yu. V., Cheked I. V. Comparative analysis of two methods for taking into account heteroskedasticity during mathematical models building. *Наукоємні технології*. 2019. № 4 (44). С. 449–456.

12. **Kuzmin V. N.** New Statistical Method for Identification of Nonlinearity of Empirical Data. *Computer data analysis and modeling*. Proceedings of the Fifth International Conference. (June, 8–12, 1998, Minsk). 1998. Vol 1: A-M. Pp. 159–164.

Кузьмин В. М., Заліський М. Ю., Климчук В. П.

ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ З ВИКОРИСТАННЯМ ПОЛІСЕГМЕНТНОЇ РЕГРЕССІЇ

Стаття присвячена питанням апроксимації емпіричних даних і побудови математичних моделей. Побудова математичних моделей є важливою задачею наукових досліджень, оскільки вона дозволяє вирішувати завдання довгострокового прогнозування. У теорії апроксимації найчастіше використовується звичайний метод найменших квадратів. При цьому найчастіше використовуються єдині апроксимуючі функції навіть у випадках, коли сукупність досліджуваних даних змінює геометричну структуру. У цій роботі автори розглянули такі апроксимуючі функції: лінійну; лінійну, яка виходить із початку системи координат; двосегментній лінійну, яка виходить із початку системи координат; показникову. Вибір таких апроксимуючих функцій виконувався виходячи із візуального аналізу структури статистичних даних. Незадовільні результати апроксимації з використанням звичайної лінійної регресії та лінійної регресії, яка виходить із початку системи координат, є передумовою для застосування інших більш точних апроксимуючих функцій: двосегментної звичайної, двосегментної з урахуванням гетероскедастичності і показникової. Отримання аналітичного виразу для двосегментної лінійної регресії стало можливим в результаті використання функції Хевісайда. При цьому для знаходження найкращого варіанту апроксимації була виконана оптимізація абсциси точки перемикання двох сегментів. Для вирішення завдання оптимізації були розраховані стандартні відхилення для декількох варіантів можливих значень абсциси точки перемикання. Розраховані стандартні відхилення були апроксимовані з використанням параболи другого ступеня, мінімум якої відповідає оптимальній абсцисі точки перемикання сегментів. Для підвищення точності апроксимації під час побудови двосегментної регресії було виконано урахування гетероскедастичності. Гетероскедастичність характеризує властивість вибірки, при якій різні відлікові значення мають різну дисперсію. Існують різноманітні тести для виявлення та урахування гетероскедастичності. У цьому дослідженні урахування гетероскедастичності виконувалося відповідно до наступної послідовності операцій: 1) для декількох варіантів можливих значень індексу гетероскедастичності розраховувались відповідні апроксимуючі функції; 2) для кожної отриманої функції розраховувалася зважена сума квадратів відхилень; 3) визначався індекс гетероскедастичності, для якого зважена сума квадратів відхилень є мінімальною. Порівняльний аналіз показав перевагу двосегментної регресії з точки зору точності апроксимації та надійності прогнозування. Результати дослідження можуть бути використані в якості методологічного інструменту під час побудови та вибору найкращої математичної моделі.

Ключові слова: апроксимація; метод найменших квадратів; двосегментна регресія; оптимізація абсциси точки перемикання; гетероскедастичність.

Kuzmin V., Zaliskyi M., Klimchuk V.

MATHEMATICAL MODELS BUILDING WITH POLYSEGMENTED REGRESSION USAGE

The article deals with the approximation of empirical data and the mathematical models building. The mathematical models building is an important task of scientific research, since it allows us to solve the problems of long-term forecasting. In approximation theory, the ordinary least squares method is most often used. In this case, single approximating functions are often used even in cases when the statistical data set changes the geometric structure. In this paper, the authors considered such approximating functions: linear; linear that starts from the origin of the coordinate system; two segmented linear that starts from the origin of the coordinate system; exponential. The selection of such approximating functions was performed based on a visual analysis of the structure of statistical data. Unsatisfactory approximation results using the usual linear regression and linear regression that starts from the origin of the coordinate system are a background for the application of other more accurate approximating functions: two segmented usual and two segmented with taking into account heteroskedasticity and exponential. Obtaining an analytical expression for a two segmented linear regression became possible as a result of using the Heaviside step function. In order to find the best approximation option, the abscissa of the switching point between segments was optimized. To solve the optimization problem, standard deviations were calculated for several options of the abscissa of the switching point. The calculated standard deviations were approximated by a parabola of the second degree, the minimum of which corresponds to the optimal abscissa of the switching point. To improve the accuracy of the approximation during constructing the two segmented regression, heteroskedasticity was taken into account. Heteroskedasticity characterizes the property of the sample, in which different values have different variances. There are various tests for detecting heteroskedasticity. In this article, heteroskedasticity was taken into account in accordance with the following sequence of operations: 1) for *several options of possible values of the heteroskedasticity index, the corresponding approximating functions were calculated; 2) the weighted sum of squared deviations was calculated for each obtained function; 3) the heteroskedasticity index was determined for which the weighted sum of squared deviations is minimal. A comparative analysis showed the advantage of two segmented regressions in terms of approximation accuracy and prediction veracity. The research results can be used as a methodological tool during mathematical models building and selection of the best one.*

Keywords: approximation; ordinary least squares method; two segmented regressions; optimization of the abscissa of the switching point; heteroskedasticity.

Кузмин В. Н., Залисский М. Ю., Климчук В. П.

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИСЕГМЕНТНОЙ РЕГРЕССИИ

Статья посвящена вопросам аппроксимации эмпирических данных и построения математических моделей. Построение математических моделей является важной задачей научных исследований, поскольку позволяет решать проблемы долгосрочного прогнозирования. В теории аппроксимации чаще всего используется обычный метод наименьших квадратов. При этом зачастую используются единые аппроксимирующие функции даже в случаях, когда совокупность исследуемых данных меняет геометрическую структуру. В этой работе авторы рассмотрели такие аппроксимирующей функции: линейную; линейную, исходящую из нуля; двухсегментную линейную, исходящую из нуля; показательную. Выбор таких аппроксимирующих функций выполнялся исходя из визуального анализа структуры статистических данных. Неудовлетворительные результаты аппроксимации с использованием обычной линейной регрессии и линейной, исходящая из начала системы координат, являются предпосылкой для применения других более точных аппроксимирующих функций: двухсегментной обычной, двухсегментной с учетом гетероскедастичности и показательной. Получение аналитического выражения для двухсегментной линейной регрессии стало возможным в результате использования функции Хевисайда. При этом для нахождения наилучшего варианта аппроксимации выполнялась оптимизация абсциссы точки переключения сегментов. Для решения задачи оптимизации были рассчитаны стандартные отклонения для нескольких вариантов значения абсциссы точки переключения. Рассчитанные стандартные отклонения были аппроксимированы параболой второй степени, минимум которой соответствует оптимальной абсциссе точки переключения. Для улучшения точности аппроксимации при построении двухсегментной регрессии выполнен учет гетероскедастичности. Гетероскедастичность характеризует свойства выборки, при котором различные отсчеты имеют различную дисперсию. Существуют различные тесты для обнаружения гетероскедастичности. В этой статье учет гетероскедастичности выполнялся в соответствии со следующей последовательностью: 1) для нескольких вариантов возможных значений индекса гетероскедастичности рассчитывались соответствующие аппроксимирующие функции; 2) для каждой полученной функции рассчитывалась взвешенная сумму квадратов отклонений; 3) определялся индекс гетероскедастичности, для которого взвешенная сумма квадратов отклонений является минимальной. Сравнительный анализ показал преимущество двухсегментной регрессии с точки зрения точности аппроксимации и надежности прогнозирования. Результаты исследования могут быть использованы в качестве методологического инструмента при построении и выбора лучшей математической модели.

Ключевые слова: аппроксимация; метод наименьших квадратов; двухсегментная регрессия; оптимизация абсциссы точки переключения; гетероскедастичность.

Стаття надійшла до редакції 28.01.2020 р.
Прийнято до друку 05.03.2020 р.