DOI: 10.18372/2310-5461.44.14324

УДК 517.928 (045)

Аскеров І. М.
Лянкяранскій державний університет,
Ленкорань, Азербайджан
scopus.com/ authorId=36496564000
e-mail: idrak378@rambler.ru

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ВИРІШЕННЯ ОДНІЄЇ ОПТИМАЛЬНОЇ РЕГУЛЬОВАНОЇ ЗАДАЧІ В БЕЗПЕРЕРВНІЙ ФОРМІ

Вступ

У численних динамічних задачах у техніці, рухи різних об'єктів описуються диференційними рівняннями з малими параметрами. Наприклад, у праці [2] подано математичну модель добування нафти методом газліфта для випадку, коли обернена величина глибини свердловини являє собою малий параметр. Завдання побудови оптимального режиму (тобто побудови оптимальних програмних траєкторій і управлінь) зводиться до лінійно-квадратичної задачі оптимального управління з малим параметром. Незважаючи на те, що завдання оптимального управління з періодичними граничними умовами вивчалося в багатьох працях [3; 4], але специфіка даного завдання дозволяє вивчати її по різному. Отримані вирішення можуть бути широко застосовані для широкого класу прикладних задач. Тому дослідження задачі оптимального управління з використанням правила множників Лагранжа і принципу Лагранжа для задачі Лагранжа є актуальним.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Вирішення задач оптимального управління асимптотичними методом і системи нелінійних диференційних рівнянь вивчалися багатьма авторами. Так, наприклад, у праці [5] були досліджені вирішення нелінійних диференційних рівнянь, що описують деякі коливання асимптотичними методами. У працях [6–8] після внесення певних замін у систему спеціальних похідних рівнянь гіперболічного типу, вони були приведені в систему диференційних рівнянь, залежних від малого параметра зі спеціальними похідними, і досліджено вирішення системи, залежно від малого параметра. У праці [9] були розглянуті задачі оптимального управління асимптотичним методом деяких нелінійних механічних систем.

З іншого боку, дослідження задачі оптимального управління асимптотичним методом на основі математичної моделі, можуть бути застосовані для опису процесу експлуатації нафтових свердловин з газліфтним методом. Із цього видно, що розглянутий метод має велике значення при вирішенні ряду прикладних задач.

Мета статті — дослідити задачу оптимального управління зі змінною структурою, в особливому положенні залежною від малого параметра, а також дослідити вирішення задачі, залежно від малого параметра в множині рішень задачі, що дає мінімум певному функціоналу, описуваного диференціальними рівняннями, що залежать від малого параметра.

Постановка завдання

Розглянемо метод, який може бути застосований для знаходження вирішення задачі оптимального управління, поставленої для деякого класу задач, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Розглянута задача є задачею типу Лагранжа.

Математична модель регулювання об'єкта зі змінною структурою сформулюється таким чином [10]. Розглянемо оптимальну задачу регулювання, залежну від сімейства параметрів. Припустимо, що зазначені числа $\delta_2 > \delta_1 > 0$, неперервної функції $f_1 : R^n \times [\delta_1, \delta_2] \to R^n$, $f_2 : R^n \times [\delta_1, \delta_2] \to R^n$ і вектори $u_0, u_1, ..., u_m$, які належать R^n є крайовими і регульованими. Якщо $0 < a < b < 2a$, то відповідно до $C^1([0, a], R^n)$ і $C^1([b, 2a], R^n)$, в частинах $[0, a]$ і $[b, 2a]$ відмічається множина безперервних диференційованих n-вимірних векторних функцій.

Якщо $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in R^n$, то відповідно $yz = y_1 z_1 + \dots + y_n z_n$.

Припустимо, що вектор, записаний ліворуч від матриці буде вектор-рядок, а вектор, записаний праворуч — вектор-стовпець. $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — $n \times n$-вимірні симетричні, безперервні матриці відносно до x; $\tilde{Q}$ — $n \times n$-вимірна симетрична матриця.

Для кожного $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$, якщо u_0, $u_1,\ldots$, $u_n \in R^n$, то можна записати функціонал

$$J(u_0, u_1, \ldots, u_m, \varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2} z(2a)\tilde{Q} z(2a) + \int_0^a y(x) Q_1(x) y(x) dx +$$
$$+ \int_b^{2a} z(x) Q_2(x) z(x) dx + \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i \beta_i u_i . \quad (1)$$

Розв'язки відповідно до параметрів мають вигляд

$$\dot{y}(x) = f^1(y(x), \varepsilon), \quad (2)$$
$$y(0) = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots + \varepsilon^m u_m, \quad (3)$$
$$\dot{z}(x) = f^2(z(x), \varepsilon), \quad (4)$$
$$z(b) = \gamma y(a) + \varphi(y(a)). \quad (5)$$

Розглянемо питання мінімізації в множині вирішення задачі

$$y(\cdot) \in C^1([0, a], R^n), \ z(\cdot) \in C^1([b, 2a], R^n),$$

де γ — $n \times n$-вимірна матриця; $\varphi : R^n \to R^n$ безперервна диференційована векторна функція; β_i, $i = 1,\ldots,m$ — данні числа або ж $n \times n$-вимірні симетричні матриці.

Розв'язання завдання

Розглянута задача називається оптимальною регульованою задачею зі змінною структурою або ж задачею варіації. Ця задача за типом Лагранжа. Аналогічно до задачі Лагранжа [10], запишемо функцію Лагранжа для цього випадку:

$$\Lambda(y(\cdot), z(\cdot), u_0, u_1, \ldots, u_m, p_1(\cdot), p_2(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) =$$
$$= \int_0^a (\lambda_0 \, y(x) Q_1(x) \, y(x) + p_1(x)(f^1(y(x), \varepsilon) - \dot{y}(x))) dx +$$
$$+ \int_b^{2a} (\lambda_0 z(x) Q_2(x) z(x) + p_2(x)(f^2(z(x), \varepsilon) - \dot{z}(x))) dx +$$
$$+ \frac{1}{2} \lambda_0 z(2a) \tilde{Q} z(2a) +$$
$$+ \lambda_0 \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i \beta_i u_i + \lambda_1 (y(0) - u_0 - \varepsilon u_1 - \ldots - \varepsilon^m u_m) +$$
$$+ \lambda_2 (z(b) - \gamma y(a) - \varphi(y(a))),$$

де $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$ — n-вимірні векторні функції; $\lambda_0 \geq 0$, λ_1, λ_2 — n-вимірний вектор.

Для $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$ кожного з $(\bar{u}_0(\varepsilon), \bar{u}_1(\varepsilon)$, ..., $\bar{u}_m(\varepsilon)$ відзначимо оптимальний регульований вектор, а з $(\bar{y}(x, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon))$ відповідно йому оптимальну траєкторію. Додатково припустимо, що для кожного відміченого $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$ відображення f_y^1 і f_z^2 не перериваються в R^n.

Запишемо L_1 і L_2, Лагранжіан

$$L_1(x, y, \dot{y}, \varepsilon) = \lambda_0 y Q_1(x) y + p_1(x)(f^1(y, \varepsilon) - \dot{y}),$$
$$L_2(x, z, \dot{z}, \varepsilon) = \lambda_0 z Q_2(x) z + p_2(x)(f^2(z, \varepsilon) - \dot{z}).$$

та знайдемо детермінант

$$q(y_0, y, z_0, z, u_0, u_1, \ldots, u_m, \varepsilon) =$$
$$= \frac{1}{2} \lambda_0 z(2a) \tilde{Q} z(2a) + \lambda_0 \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i \beta_i u_i +$$
$$+ \lambda_2 (z_0 - \gamma y - \varphi(y)) + \lambda_1 (y_0 - u_0 - \varepsilon u_1 - \ldots - \varepsilon^m u_m).$$

Теорема 1. Припустимо, що $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — $n \times n$-вимірні симетричні, безперервні матриці відносно до x; $\tilde{Q}$ — $n \times n$-вимірна симетрична матриця, для кожного відміченого $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$; функції f^1, f_y^1, f^2 і f_z^2 не перериваються в R^n.

Якщо у задачі ($\bar{y}(x, \varepsilon), \bar{z}(x, \varepsilon)$, $\bar{u}_0(\varepsilon), \bar{u}_1(\varepsilon)$, ..., $\bar{u}_m(\varepsilon)$) (1)–(5) буде слабкий локальний мінімум, тоді водночас будуть такі $p_1(\cdot) \in C^1([0, a], R^n)$, $p_2(\cdot) \in C^1([b, 2a], R^n)$, $\lambda_0 \geq 0$, λ_1 і λ_2 ненульові множники Лагранжа:

a) Λ — функції Лагранжа, стаціонарні умови відносно $y(\cdot)$ і $z(\cdot)$, тобто $\Lambda_y = 0$ і $\Lambda_z = 0$ умови виконуються;

b) умова трансверсальності відносно $y(\cdot)$ і $z(\cdot)$, тобто

$$L_{1_{\dot{y}}}(0, \bar{y}(0, \varepsilon), \dot{\bar{y}}(0, \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= q_{y(0)}(\bar{y}(0), \bar{y}(a), \bar{z}(b), \bar{z}(2a), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \varepsilon),$$
$$L_{1_{\dot{y}}}(a, \bar{y}(a, \varepsilon), \dot{\bar{y}}(a, \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= -q_{y(a)}(\bar{y}(0), \bar{y}(a), \bar{z}(b), \bar{z}(2a), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \varepsilon),$$
$$L_{2_{\dot{z}}}(b, \bar{z}(b, \varepsilon), \dot{\bar{z}}(b, \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= q_{z(b)}(\bar{y}(0), \bar{y}(a), \bar{z}(b), \bar{z}(2a), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \varepsilon),$$
$$L_{2_{\dot{z}}}(2a, \bar{z}(2a, \varepsilon), \dot{\bar{z}}(2a, \varepsilon), \varepsilon) =$$
$$= -q_{z(2a)}(\bar{y}(0), \bar{y}(a), \bar{z}(b), \bar{z}(2a), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, \varepsilon).$$

Ці умови виконуються; стаціонарні умови відносно, тобто умова $\Lambda_{u_i} = 0$, $i = 0,1,\ldots,m$ виконується.

У першій теоремі множники $p_1(\cdot)$, $p_2(\cdot)$, λ_0, λ_1, λ_2 залежать від параметра ε. Якщо припустимо, що $\xi = (y(\cdot), z(\cdot), u_0, u_1, \ldots, u_m)$, аналогічно до задачі Лагранжа [10], виходить умова в р. 3.2.1 теореми [10], і тому на підставі самої теореми $\Lambda_\xi = 0$ виконується стаціонарна умова. Тоді точність теореми принципу Лагранжа для задачі Лагранжа

$$\Lambda(y(\cdot), \bar{z}(\cdot, \varepsilon), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, p_1(\cdot), p_2(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2),$$
$$\Lambda(\bar{y}(\cdot, \varepsilon), z(\cdot), \bar{u}_0, \bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_m, p_1(\cdot), p_2(\cdot), \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$$

функція Лагранжа і теорема Ферма виконується шляхом застосування функції

$\Lambda(\overline{y}(x,\varepsilon),\overline{z}(\cdot),u_0,u_1,...,u_m,p_1(\cdot),p_2(\cdot),\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2).$

Для задачі (1)–(5) визначимо відношення (a) — (c).

Розглянемо відношення умови (a) в теоремі 1. За принципом Лагранжа і за відношеннями $\Lambda_y=0$ і $\Lambda_z=0$ отримуємо

$$-\frac{d}{dx}L_{1_{\dot y}}+L_{1_y}=0 \quad \text{і} \quad -\frac{d}{dx}L_{2_{\dot z}}+L_{2_z}=0.$$

Еквівалент зазначеним відношенням буде

$$L_1(x,y,\dot y,\varepsilon)=\lambda_0 yQ_1(x)y+p_1(x)(f^1(y,\varepsilon)-\dot y).$$

Із попереднього співвідношення, ураховуючи $-\frac{d}{dx}L_{1_{\dot y}}+L_{1_y}=0$ і функцію $\overline{y}(x,\varepsilon)$ запишемо

$$\dot p_1(x)+2\lambda_0Q_1(x)y(x)+p_1(x)f_y^1(y(x),\varepsilon)=0.$$

Знаходимо рішення цього рівняння

$$L_2(x,z,\dot z,\varepsilon)=\lambda_0 zQ_2(x)z+p_2(x)(f^2(z,\varepsilon)-\dot z).$$

Із попереднього співвідношення, ураховуючи $-\frac{d}{dx}L_{2_{\dot z}}+L_{2_z}=0$, і функцію $\overline{z}(x,\varepsilon)$ запишемо рішення цього рівняння.

$$\dot p_2(x)+2\lambda_0Q_2(x)z(x)+p_2(x)f_z^2(z(x),\varepsilon)=0.$$

Вид відношення (*b*) з теореми 1, тобто $y(\cdot)$ і $z(\cdot)$ — відповідно до умов трансверсальності

$$-p_1(0)=\lambda_1, \quad -p_1(a)=\lambda_2\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right)$$

і враховуючи відношення:

$$-p_2(b)=\lambda_2, \quad p_2(2a)=\lambda_0\tilde Q\overline{z}(2a,\varepsilon).$$

Вид відношення (c) з теореми 1, тобто $u_0,u_1,...,u_m$ — відповідно до стаціонарних умов

$$2\lambda_0\varepsilon^i\beta_i\overline{u}_i(\varepsilon)-\lambda_1\varepsilon^i=0, \qquad i=0,1,...,m,$$

Звідси випливає, якщо $\varepsilon\neq 0$, то маємо

$$2\lambda_0\beta_i\overline{u}_i(\varepsilon)-\lambda_1=0, \qquad i=0,1,...,m,$$

Оскільки $p_1(0)=-\lambda_1$ і $i=0,1,...,m$, отримуємо рівняння

$$2\lambda_0\beta_i\overline{u}_i(\varepsilon)+p_1(0)=0.$$

Отже, в особливому випадку, отримуємо відношення

$$\lambda_0\beta_0\overline{u}_0(\varepsilon)=\lambda_0\beta_1\overline{u}_1(\varepsilon)=\lambda_0\beta_2\overline{u}_2(\varepsilon)=...=\lambda_0\beta_m\overline{u}_m(\varepsilon).$$

Якщо буде $\lambda_0=0$, то це відношення є вирішуваним. А якщо припустити $\lambda_0=1$, $\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_m$ отримуємо відношення вектора оптимального управління

$$\beta_0\overline{u}_0(\varepsilon)=\beta_1\overline{u}_1(\varepsilon)=\beta_2\overline{u}_2(\varepsilon)=...=\beta_m\overline{u}_m(\varepsilon).$$

Згідно умови (b) теореми 1, ураховуючи

$$\lambda_2=-p_2(b) \text{ і } -p_1(a)=\lambda_2\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right),$$

отримуємо:

$$p_1(a)=p_2(b)\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right).$$

Якщо припустити $\lambda_0=1$, рівняння $p_2(2a)=\lambda_0\tilde Q\overline{z}(2a,\varepsilon)$ набуває вигляду $p_2(2a)=\tilde Q\overline{z}(2a,\varepsilon)$. Таким чином, від (1) першої теореми отримуємо точність нижченаведеного результату.

Результат 1. Якщо $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — $n\times n$-вимірні відносно до x-симетричної безперервної матриці; $\tilde Q$ — $n\times n$-вимірна симетрична матриця, для кожного відміченого значення $\varepsilon\in[\delta_1,\delta_2]$ функції f^1,f_y^1,f^2 і f_z^2 безперервні в R^n і є слабким локальним мінімумом задачі $(\overline{y}(x,\varepsilon),\overline{z}(x,\varepsilon),\overline{u}_0(\varepsilon),\overline{u}_1(\varepsilon),...,\overline{u}_m(\varepsilon))$ (1)–(5), тоді водночас є такі ненульові $p_1(\cdot)\in C^1([0,a],R^n)$, $p_2(\cdot)\in C^1([b,2a],R^n)$ і $\lambda_0\geq 0$ множники Лагранжа, $(\overline{y}(x,\varepsilon),\overline{z}(x,\varepsilon),\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_m)$, що відповідають наведеним нижче відношенням:

$$\dot p_1(x)+2\lambda_0Q_1(x)\overline{y}(x,\varepsilon)+p_1(x)f_y^1(\overline{y}(x,\varepsilon))=0,$$
$$0\leq x\leq a,$$
$$\dot p_2(x)+2\lambda_0Q_2(x)\overline{z}(x,\varepsilon)+p_2(x)f_z^2(\overline{z}(x,\varepsilon),\varepsilon)=0,$$
$$b\leq x\leq 2a,$$
$$i=0,1,...,m$$

якщо справджується $2\lambda_0\beta_i\overline{u}_i(\varepsilon)+p_1(0)=0$, то

$$p_1(a)=p_2(b)\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right),$$

$$p_2(2a)=\lambda_0\tilde Q\overline{z}(2a,\varepsilon).$$

Якщо прийняти $\lambda_0=1$, то вектори оптимального управління $\overline{u}_0,\overline{u}_1,...,\overline{u}_m$ відповідають відношенню

$$\beta_0\overline{u}_0(\varepsilon)=\beta_1\overline{u}_1(\varepsilon)=\beta_2\overline{u}_2(\varepsilon)=...=\beta_m\overline{u}_m(\varepsilon)$$

і розв'язується рівність $p_2(2a)=\tilde Q\overline{z}(2a,\varepsilon)$.

Результат 2. Якщо в (1)–(5) задачі m = 0, вирішують умови 1-го результату і є слабким локальним мінімумом задачі $(\overline{y}(x,\varepsilon),\overline{z}(x,\varepsilon),\overline{u}_0(\varepsilon))$ (1)–(5), тоді водночас є такі ненульові $p_1(\cdot)\in C^1([0,a],R^n)$, $p_2(\cdot)\in C^1([b,2a],R^n)$ і $\lambda_0\geq 0$ множники Лагранжа, $(\overline{y}(x,\varepsilon),\overline{z}(x,\varepsilon),\overline{u}_0(\varepsilon))$, що відповідають наведеним нижче відношенням:

$$\dot{p}_1(x) + 2\lambda_0 Q_1(x)\overline{y}(x,\varepsilon) + p_1(x) f_y^1(\overline{y}(x,\varepsilon)) = 0,$$
$$0 \le x \le a,$$
$$\dot{p}_2(x) + 2\lambda_0 Q_2(x)\overline{z}(x,\varepsilon) + p_2(x) f_z^2(\overline{z}(x,\varepsilon),\varepsilon) = 0,$$
$$b \le x \le 2a,$$
$$p_1(0) = -2\lambda_0\beta_0\overline{u}_0(\varepsilon),$$
$$p_1(a) = p_2(b)\left(\gamma + \frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right),$$
$$p_2(2a) = \lambda_0\tilde{Q}\overline{z}(2a,\varepsilon).$$

Для кожного зазначеного значення $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$, буде $u_0, u_1, ..., u_m \in R^n$ функціонала

$$J_1(u_0,u_1,...,u_m,\varepsilon) = \frac{1}{2} z(b)\overline{Q}z(b) + \int_0^a y(x)Q_1(x)y(x)dx +$$
$$+\int_b^{2a} z(x)Q_2(x)z(x)dx + \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i u_i \beta_i u_i, \quad (6)$$
$$\dot{y}(x) = f^1(y(x),\varepsilon), \quad (7)$$
$$y(0) = u_0 + \varepsilon u_1 + ... + \varepsilon^m u_m, \quad (8)$$
$$\dot{z}(x) = f^2(z(x),\varepsilon), \quad (9)$$
$$z(b) = \gamma y(a) + \varphi(y(a)), \quad z(b) = z(2a). \quad (10)$$

Знайдемо розв'язок задачі $y(\cdot) \in C^1([0, a], R^n)$, у множині рішення задач $z(\cdot) \in C^1([b, 2a], R^n)$ [8].

Ця функція Лагранж-задачі у вигляді

$$\Lambda(y(\cdot),z(\cdot),u_0,u_1,...,u_m,\ p_1(\cdot),\ p_2(\cdot),\ \lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3) =$$
$$= \int_0^a (\lambda_0 y(x)Q_1(x)y(x) + p_1(x)(f^1(y(x),\varepsilon) - \dot{y}(x)))dx +$$
$$+\int_b^{2a} (\lambda_0 z(x)Q_2(x)z(x) + p_2(x)(f^2(z(x),\varepsilon) - \dot{z}(\varepsilon)))dx +$$
$$+\frac{1}{2}\lambda_0 z(b)\overline{Q}z(b) + \lambda_0\sum_{i=0}^{m}\varepsilon^i u_i\beta_i u_i +$$
$$+\lambda_1(y(0) - u_0 - \varepsilon u_1 - ... - \varepsilon^m u_m + \lambda_2(z(b) -$$
$$-\gamma y(a) - \varphi(y(a)) + \lambda_3(z(b) - z(2a)),$$

де $\lambda_0 \ge 0$ число, $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ n-вимірні вектори.

Для кожного вектору $\varepsilon \in [\delta_1, \delta_2]$ (6)–(10) задачі оптимального управління, з $(\overline{u}_0(\varepsilon), \overline{u}_1(\varepsilon), ..., \overline{u}_m(\varepsilon))$. Визначимо відповідну йому оптимальну траєкторію з $(\overline{y}(x,\varepsilon), \overline{z}(x,\varepsilon))$.

$$L_1(x,y,\dot{y},\varepsilon) = \lambda_0 y Q_1(x) y + p_1(x)(f^1(y,\varepsilon) - \dot{y}),$$
$$L_2(x,z,\dot{z},\varepsilon) = \lambda_0 z Q_2(x) z + p_2(x)(f^2(z,\varepsilon) - \dot{z})$$

і

$$q(y_0, y,\ z_0, z, u_0, u_1, ..., u_m, \varepsilon) = \frac{1}{2}\lambda_0 z\overline{Q}z +$$
$$+\lambda_0\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^i u_i\beta_i u_i + \lambda_1(y_0 - u_0 - \varepsilon u_1 - ... - \varepsilon^m u_m) +$$
$$+\lambda_2(z_0 - \gamma y - \varphi(y)) + \lambda_3(z_0 - z).$$

Якщо попередній вираз справедливий, тоді він буде справедливим і для першої теореми. Навіть якщо в випадку першої теореми, коли розглядаємо умову (a) , $\overline{y}(x,\varepsilon)$ і $\overline{z}(x,\varepsilon)$ відповідно до функцій належить вирішення цих рівнянь

$$\dot{p}_1(x) + 2\lambda_0 Q_1(x)y(x) + p_1(x) f_y^1(y,\varepsilon) = 0,$$
$$0 \le x \le a,$$
$$\dot{p}_2(x) + 2\lambda_0 Q_2(x)z(x) + p_2(x) f_z^2(z,\varepsilon) = 0,$$
$$b \le x \le 2a.$$

Із відношення (b) першої теореми, тобто по відношенню до $y(\cdot)$ і $z(\cdot)$ — з умов трансверсальності отримуємо співвідношення

$$-p_1(0) = \lambda_1,$$
$$-p_1(a) = \lambda_2\left(\gamma + \frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right) \quad (11)$$

і

$$-p_2(b) = \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_0\overline{Q}\overline{z}(b,\varepsilon),$$
$$p_2(2a) = -\lambda_3. \quad (12)$$

Із умови (c) теореми 1 відношення, тобто по відношенню до u_i, $i = 0,1,...,m$ із стаціонарної умови випливає

$$2\lambda_0\varepsilon^i\beta_i\overline{u}_i - \lambda_1\varepsilon^i = 0, \qquad i = 0,1,...,m.$$

Якщо буде $\varepsilon \ne 0$ то, отримуємо

$$2\lambda_0\beta_i\overline{u}_i - \lambda_1 = 0, \quad i = 0,1,...,m.$$

Якщо припустити $p_1(0) = -\lambda_1$ і якщо $i = 0,1,...,m$, отримуємо рівність

$$2\lambda_0\beta_i\overline{u}_i + p_1(0) = 0.$$

Звідси запишемо рівність

$$\lambda_0\beta_0\overline{U}_0 = \lambda_0\beta_1\overline{U}_1 = \lambda_0\beta_2\overline{U}_2 = ... = \lambda_0\beta_m\overline{U}_m.$$

Якщо припустити $\lambda_0 = 0$, це відношення вирішується.

Якщо буде $\lambda_0 = 1$, отримуємо рішення рівності $\overline{u}_0, \overline{u}_1, ..., \overline{u}_m$ векторів оптимального управління $\beta_0\overline{u}_0 = \beta_1\overline{u}_1 = \beta_2\overline{u}_2 = ... = \beta_m\overline{u}_m$.

Із рівняння (12) отримуємо $-p_2(b) = \lambda_2 - p_2(2a) + \lambda_0\overline{Q}\overline{z}(b,\varepsilon)$ або ж $\lambda_2 = p_2(2a) - p_2(b) - \lambda_0\overline{Q}\overline{z}(b,\varepsilon)$. Тоді за другим відношенням (11) вирішується рівність.

$$p_1(a) =$$
$$= (p_2(b) - p_2(2a) + \lambda_0\overline{Q}\overline{z}(b,\varepsilon))\left(\gamma + \frac{\partial\varphi(\overline{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right).$$

Результат 3. Якщо $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ — $n\times n$-вимірні відносно до x, симетричні безперервні матриці; $\bar{Q}$ $n\times n$-вимірна симетрична матриця, для кожного відміченого значення $\varepsilon\in[\delta_1,\delta_2]$ функції f^1, f_y^1, f^2 і f_z^2 безперервні в R^n і $(\bar{y}(x,\varepsilon), \bar{z}(x,\varepsilon), \bar{u}_0(\varepsilon), \bar{u}_1(\varepsilon),...,\bar{u}_m(\varepsilon))$ є слабким локальним мінімумом задачі (6)–(10), тоді водночас є такі ненульові множники Лагранжа та рішення цих відношень

$$p_1(\cdot)\in C^1\left(\left[0,a\right],\, R^n\right),\quad p_2(\cdot)\in C^1\left(\left[b,2a\right],\, R^n\right) \text{ і } \lambda_0\geq 0,$$

$$\dot{p}_1(x)+2\lambda_0 Q_1(x)\bar{y}(x,\varepsilon)+p_1(x)f_y^1(\bar{y}(x,\varepsilon))=0,\quad 0\leq x\leq a,$$

$$\dot{p}_2(x)+2\lambda_0 Q_2(x)\bar{z}(x,\varepsilon)+p_2(x)f_z^2(\bar{z}(x,\varepsilon),\varepsilon)=0,\quad b\leq x\leq 2a,$$

$$p_1(0)=-2\lambda_0\beta_i\bar{u}_i,\qquad i=0,1,...,m,$$

$$p_1(a)=(p_2(b)-p_2(2a)+ +\lambda_0\,\bar{Q}\bar{z}(b,\,\varepsilon))\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\bar{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right),$$

$$\lambda_0\beta_0\bar{u}_0=\lambda_0\beta_1\bar{u}_1=\lambda_0\beta_2\bar{u}_2=...=\lambda_0\beta_m\bar{u}_m.$$

Припустимо, що

$$f^1(y,\,\varepsilon)=f_0^1(y)+\varepsilon f_1^1(y)\varepsilon+...+f_{k_1}^1\varepsilon^{k_1} \text{ і}$$

$$f^2(z,\,\varepsilon)=f_0^2(y)+\varepsilon f_1^2(y)\varepsilon+...+f_{k_1}^2\varepsilon^{k_2}$$

в формі зазначеній у працях [6; 7].

Якщо функції f_i^1, $i=0,1,...,k_1$ і f_j^2, $i=0,1,...,k_2$ в R^n будуть безперервними диференційованими функціями $(\bar{y}(x,\varepsilon), \bar{z}(x,\varepsilon), \bar{u}_0(\varepsilon), \bar{u}_1(\varepsilon),...,\bar{u}_m(\varepsilon))$, $\varepsilon\in[\delta_1,\delta_2]$, слабким мінімумом задачі (6)–(10), тоді водночас є такі ненульові вирішення рівняння

$$p_1(\cdot)\in C^1\left(\left[0,a\right],\, R^n\right),\quad p_2(\cdot)\in C^1\left(\left[b,2a\right],\, R^n\right) \text{ і } \lambda_0\geq 0,$$

$$\dot{p}_1(x)+2\lambda_0 Q_1(x)\bar{y}(x,\varepsilon)+p_1(x)\sum_{i=0}^{k_1}f_{iy}^1(\bar{y}(x,\varepsilon))\varepsilon^i=0,\quad 0\leq x\leq a,$$

$$\dot{p}_2(x)+2\lambda_0 Q_2(x)\bar{z}(x,\varepsilon)+p_2(x)\sum_{j=0}^{k_2}f_{jz}^2(\bar{z}(x,\varepsilon))\varepsilon^i=0,\quad b\leq x\leq 2a,$$

$$p_1(0)=-2\lambda_0\beta_i\bar{u}_i,\qquad i=0,1,...,m,$$

$$p_1(a)=(p_2(b)-p_2(2a)+ +\lambda_0\,\tilde{Q}\bar{z}(b,\varepsilon))\left(\gamma+\frac{\partial\varphi(\bar{y}(a,\varepsilon))}{\partial y(a)}\right),$$

$$\lambda_0\beta_0\bar{u}_0=\lambda_0\beta_1\bar{u}_1=\lambda_0\beta_2\bar{u}_2=...=\lambda_0\beta_m\bar{u}_m.$$

Висновки

У статті розглядається задача оптимального управління зі змінною структурою, в особливому положенні залежною від малого параметра. Досліджено вирішення задачі, залежне від малого параметра в множині рішень задачі, що дає мінімум певному функціоналу, описувані диференціальними рівняннями, які залежать від малого параметра.

Розглянута задача є задачею типу Лагранжа. Записавши відповідну функцію задачі Лагранжа, було розглянуто вирішення поставленої задачі з використанням правил множників Лагранжа і принципу Лагранжа для задачі Лагранжа. У той же час розглянута задача досліджується і при додаткових умовах. У підсумку для обох випадків були отримані необхідні умови для оптимальності рішення. У статті отримані нові результати з урахуванням специфіки задачі, що розглядається.

Отримані в роботі результати можуть бути використані при вирішенні задачі оптимального управління, поставлених для класу задач, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Крім цього, результати можуть бути використані при вирішенні задач оптимального управління асимптотичним методом, поставленої в процесі газліфта з умовою періодичної границі. Водночас, запропонований метод може служити для спрощення методів чисельного вирішення деяких задач і відповідних комп'ютерних розрахунків.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Eser E.,** Koç H., Mamedov B. A., Askerov I. M. Estimation of the Heat Capacity of Some Semiconductor Compounds Using n—Dimensional Debye Functions. *International Journal of Thermophysics.* 2011. Vol. 32. P. 2163–2169. DOI:10.1007/s10765–011–1068-x.
2. **Mamedov B. A.,** Somuncu E., Askerov I.M. Evaluation of Speed of Sound and Specific Heat Capacities of Real Gases. 2018. DOI:10.2514/1.t5285.
3. **Ащепков Л. Т.** Оптимальное управление системой с промежуточными условиями. *Прикладная математика и механика*. 1981. Том 45. Вып. 2. С. 215–222.
4. **Зубова С. П.** Решение задачи управления для линейной дескрипторной системы с прямоугольно-матричными коэффициентами. *Математические заметки*. 2010. Т. 88. Вып. 6. С. 885–896.
5. **Мищенко Е. Ф.,** Розов Н.Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. М.: Наука, 1975. 247 с.
6. **Муталлимов М. М.,** Аскеров И. М., Исмайлов Н. А., Использование асимптотического метода для создания оптимального регулятора в

газлифтных скважинах. *Известия Национальной Академии Наук Азербайджана*. 2011. Том XXXI. № 6. С. 14–19.

7. **Aliev F. A.,** Mutallimov M. M., Askerov I. M., Raguimov I. S. Asymptotic Method of Solution for a Problem of Construction of Optimal Gas—Lift Process Modes. *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering.* 2010. Article ID 191053. 10 pages. DOI:10.1155/2010/191053.

8. **Askerov I. M.,** Ismailov N. A. Asymptotic method for solution of the optimization problem with periodic boundary conditions and control in gaslift process. *TWMS J. Pure and Appl. Math*. 2013. V.4. N2. Pp. 237–241.

9. **Моисеев Н. Н.** Асимптотические методы нелинейной механики М.: Наука, 1969. 400 с.

10. **Алексєєв В. М.,** Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 430 с.

Аскеров І. М.

АСИМПТОТИЧНИЙ МЕТОД ВИРІШЕННЯ ОДНІЄЇ ОПТИМАЛЬНОЇ РЕГУЛЬОВАНОЇ ЗАДАЧІ В БЕЗПЕРЕРВНІЙ ФОРМІ

У статті розглядається задача оптимального управління зі змінною структурою, залежно від параметра в особливому вигляді. У розглянутій задачі рівняння руху об'єкта описуються двома диференційними рівняннями, залежними від малого параметра, які пов'язані один з одним певними умовами. В роботі досліджено рішення задачі, залежні від малого параметра в множині рішень задачі, описуваної диференційними рівняннями, що призводить до мінімуму визначеного функціоналу. Знайдено рішення, залежні від малого параметра, і отримані необхідні умови для оптимальності рішення. В роботі була доведена точність отриманих теорем шляхом застосування принципу Лагранжа для задачі Лагранжа, функціям Лагранжа і теоремі Ферма.

У статті в той же час досліджується задача оптимального управління з періодичними граничними умовами. Це також може бути застосовано при вирішенні широкого кола прикладних задач. Розглянута задача досліджується з використанням правила множників Лагранжа і принципу Лагранжа для задачі Лагранжа.

Розглянутий метод може бути застосований для знаходження рішення задачі, оптимального управління, поставлене для деяких задач, що описуються нелінійними диференційними рівняннями.

Ключові слова: оптимальне регулювання; асимптотичний метод; задача Лагранжа.

Askerov I. M.

ASYMPTOTİC METHOD SOLUTİON TO AN OPTİMAL MANAGEMENT PROBLEM İN CONTİNUOUS CONDİTİON

The problem of optimal control with a variable structure depending on the particular way on the parameter is described in the article. In the considered issue, the object's motion equations are described by two differential equations depending on the small parameter and these equations are bound to each other. The study investigated the solution of the problem depending on the small parameter that gives a certain functional minimum in the range of solutions described by differential equations, with a small parameter and the necessary conditions for the optimization of the solution are given.

The validity of the theorems obtained in this study was proved by applying the Lagrangian principle to the Lagrangian functions and the application of the Farm Theorem to the Lagrangian problem. At the same time, the problem of optimal control with periodic boundary conditions is also explored. It can also be used extensively in solving some practical issues, for example, model in oil extraction by gas—lift method for the case when the reciprocal value of well's depth represents a small parameter is considered.

Problem of optimal mode construction (i.e., construction of optimal program trajectories and controls) is reduced to the linear—quadratic optimal control problem with a small parameter. This issue is investigated using the Lagrange coefficient and the Lagrange principle for the Lagrange problem. Although this issue has been studied in numerous works, the specificity of the issue under consideration makes it possible to investigate it differently. The considered method can be applied to the solution of optimal control problems for the problems described by some nonlinear differential equations.

Keywords: optimal control; asymptotic method; Lagrange problem.

Аскеров И. М.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕГУЛИРОВАННОЙ ЗАДАЧИ В НЕПРЕРЫВНОЙ ФОРМЕ

В статье рассматривается задача оптимального управления с переменной структурой, зависимой от параметра в особом виде. В рассматриваемой задаче уравнения движения объекта описываются двумя дифференциальными уравнениями, зависимыми от малого параметра. Уравнения связаны друг с другом определенными условиями. В работе исследовано решение задачи, зависимые от малого параметра во множестве решений задачи, описываемой дифференциальными уравнениями, приводящей к минимуму определенного функционала.

Найдены решения, зависимые от малого параметра, и получены необходимые условия для оптимальности решения. В работе доказана точность полученных теорем путем применения принципа Лагранжа для задачи Лагранжа, функциям Лагранжа и теоремы Ферма. В работе также исследуется задача оптимального управления с периодическими граничными условиями. Применение предложенного метода может быть при решении некоторых прикладных задач. Например, построения математической модель добычи нефти методом газлифта для случая, когда обратная величина глубины скважины представляет собой небольшой параметр, или для случая, когда задача построения оптимального режима (т. е. построения оптимальных программных траекторий и управлений), сводится к линейно-квадратичной задаче оптимального управления с малым параметром. Рассматриваемая задача исследована с использованием правила множителей Лагранжа и принципа Лагранжа для задачи Лагранжа.

Рассмотренный метод может быть применен для нахождения решение задачи оптимального управления, представленного для некоторого класса, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями.

Ключевые слова: оптимальное регулирование; асимптотический метод; задача Лагранжа.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2019 р.
Прийнято до друку 24.12.2019 р.