DOI: 10.18372/2310-5461.42.13756

УДК 539.3:534.1

Н. С. Городецька, д-р фіз.-мат. наук, проф.
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0003-3305-522X
e-mail: nsgihm@gmail.com;

А. А. Макаренкова, канд. фіз.-мат. наук, ст. н. с.
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0001-9199-0692
e-mail: maaorama@gmail.com;

І. В. Старовойт, канд. фіз.-мат. наук
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0003-0956-7153
e-mail: inna-mail@ukr.net

ВПЛИВ СИМЕТРІЇ КОЛИВАНЬ НА РЕЗОНАНС НА НЕОДНОРІДНИХ ХВИЛЯХ В ПРУЖНОМУ ПІВШАРІ

Вступ

Хвильові поля в пружних тілах мають ряд специфічних властивостей, які не притаманні акустичним або електромагнітним хвилям. Одним з таких незвичайних ефектів — є резонанс на хвилях, які не поширюються. Експериментально така власна форма коливань була знайдена при вивченні коливань п'єзокерамічних дисків, в яких спостерігалась локалізація зони великих переміщень в околі циліндричної поверхні, тобто по краю диска. Аналогічна форма коливань експериментально спостерігалась при вивченні коливань довгих сталевих циліндрів. [1, с. 264]. Оскільки резонанс проявлявся по краю обмеженого пружного тіла, а величина переміщень зменшувалась при віддаленні від краю, то така власна форма отримала назву крайовий резонанс. На сьогодні проведено значну кількість експериментальних робіт, які підтверджують існування резонансу на хвилях, що не поширюються. Відмітимо одні з останніх публікацій [2, с. 22–27], [3, с. 689–694].

Інтерес до вивчення особливостей прояву крайового резонансу та його фізичної інтерпретації серед інженерів і математиків в значній мірі обумовлений як тим, що певні властивості крайового резонансу не мають остаточного фізичного тлумачення, так і можливістю пов'язувати резонанс на неоднорідних хвилях з інтерпретацією даних неруйнівного контролю. Відмітимо також, що аналіз крайового резонансу, поряд з іншими методами, дозволяє оцінювати фізичні характеристики матеріалів.

Крім експериментальних робіт вивченню явища крайового резонансу присвячено значну кількість чисельних і чисельно-аналітичних досліджень, у яких аналізуються різні прояви крайового резонансу. Слід зауважити, що при застосуванні чисельних або чисельно-аналітичних методів вивчення основних акустичних властивостей резонансу на хвилях, що не поширюються, використовувались спрощені моделі обмежених пружних тіл. Зокрема, напівобмежений шар і напівобмежений циліндр.

Було встановлено, що в тілах типу півшару та півциліндру частота крайового резонансу, на якій відбувається локалізація руху в околі торця, співпадає з резонансною частотою в обмежених пластинах і циліндрах, знайденою експериментально, що підтверджує правомірність використання таких моделей.

Постановка проблеми

Власна форма коливань на неоднорідних хвилях в пружних обмежених тілах виникає в результаті взаємодії хвиль Релея-Лемба з краєм пружного хвилеводу, або з дефектом всередині пружного тіла.

Оскільки кількісні характеристики неоднорідних нормальних хвиль в обмежених пружних тілах пов'язані з наявністю границь, порожнин і розмірами дефектів, то встановлення особливостей їх збудження залишається одним із перспективних напрямків досліджень засобами неруйнівного контролю. З огляду на потенційну важливість крайових ефектів при аналізі даних неруйнівного контролю, коротко проаналізуємо резонанс на неоднорідних хвилях при різних типах симетрії коливань і при зміні механічних характеристик пружного тіла.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Не дивлячись на те, що дослідження крайового резонансу продовжуються вже понад 50 років, на сьогодні інтерес до вивчення такого специфічного ефекту не втрачається. Виділимо основні напрямки досліджень резонансу на неоднорідних хвилях. Перш за все, це експериментальні роботи по визначенню резонансної частоти для різних форм і фізичних характеристик пружних хвилеводів. Зокрема, резонанс на неоднорідних хвилях для пластини з різними механічними характеристиками досліджувався в роботах [4, с. 30–31], [3, с. 691–693], для труби — в [5, с. 878]. Наступний напрямок пов'язаний з розробкою методів розв'язання відповідних граничних задач. Серед них відмітимо такі чисельно-аналітичні методи, як метод однорідних розв'язків [6, с. 650], [7, с. 18–19], [8, с.18], варіаційний підхід [9, с. 45–46], методи на основі умови узагальненої ортогональності [10, с. 31–33]. Значна кількість робіт присвячена вивченню особливостей прояву резонансу на неоднорідних хвилях [3, с. 693], [6, с. 651–659], [3, с. 35–37], [4, с. 36–39] та намаганню дати фізичне трактування такого явища [2, с. 24–26]. У зазначених роботах та в багатьох інших, присвячених вивченню резонансу на неоднорідних хвилях, розглядались симетричні коливання обмежених пружних хвилеводів, таких як шар, пластина, циліндр, труба. Існування резонансу на неоднорідних хвилях при антисиметричних коливаннях півшару вперше було встановлено в [7, с. 21–22], у якій було показано, що резонанс на неоднорідних хвилях існує не для всіх коефіцієнтів Пуассона. У праці [8, с. 19] було знайдено критичне значення коефіцієнту Пуассона, починаючи з якого проявляється резонанс на неоднорідних хвилях. Дана робота присвячена подальшому дослідженню резонансу на неоднорідних хвилях при антисиметричних коливаннях півшару та порівнянню акустичних характеристик резонансу на неоднорідних хвилях при різних типах симетрії коливань пружного хвилеводу.

Метою даної роботи є:

– порівняння особливостей збудження неоднорідних хвиль при різних типах симетрії коливань пружного півшару;

– встановлення спільних рис та відмінностей в характеристиках резонансу при симетричних та антисиметричних коливаннях.

Постановка завдання

Розглядається модельна задача про збудження хвильового поля в пружному ізотропному півшарі товщиною $2H$ з геометричними характеристиками: $Y =\leq \pm H, Z \geq 0, -\infty < X < +\infty$. У подальшому використовуються нормовані величини: $y = Y/H, z = Z/H$. На бічних поверхнях $y = \pm 1, z \geq 0$ і по краю хвилеводу напруження відсутні. Фізичні властивості задаються наступним чином: ν — коефіцієнт Пуассона, c_i — швидкість поперечних хвиль. Залежність від часу для кінематичних та силових характеристик поля має вигляд $\ell^{-i\omega t}$. При вивченні резонансних ситуацій традиційним джерелом збудження коливань є задання силових або кінематичні параметрів на границі. В даній роботі, на відміну від традиційного способу збудження коливань, розглядається таке джерело, як перша нормальна хвиля, яка позначається індексом (0). Зауважимо, що у відбитому полі завжди буде існувати нормальна хвиля, що поширюється, яка формує радіаційний механізм затухання. Необхідно знайти хвильове поле $\vec{u}(y,z)$, яке задовольняє векторному рівнянню Ламе:

$$\mu\,\Delta\vec{\mathbf{u}} + (\lambda + \mu)\text{grad div}\,\vec{\mathbf{u}} = \rho\frac{\partial^2\vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

і наступним граничним умовам:

$$\sigma_{zz}(y,0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y,0) = 0,$$
$$\tau_{zy}(y,0) + \tau_{zz}^{(0)}(y,0) = 0\ |y| \leq 1,$$
$$\sigma_{zz}(\pm 1, z) = 0,\ \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0\ z \geq 0. \qquad (2)$$

Розглядаються два види симетрії хвильового поля відносно площини $y = 0$. Для симетричного хвильового поля, вираз для вектору переміщень визначається співвідношенням

$$\vec{\mathbf{u}}(y,z) = C_0\vec{\mathbf{u}}(y,\xi_1)\ell^{-i\xi_0 z} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\vec{\mathbf{u}}(y,\xi_k)\ell^{i\xi_k z}$$

$$u_z = i\xi_k\left(p_2\frac{\text{ch}\,p_2 y}{\text{sh}\,p_2} - \frac{\xi_k^2 + p_2^2}{2p_1}\frac{\text{ch}\,p_1 y}{\text{sh}\,p_1}\right) \qquad (3)$$

$$u_y = \xi_k^2\frac{\text{sh}\,p_2 y}{\text{sh}\,p_2} - \frac{\xi_k^2 + p_2^2}{2}\frac{\text{sh}\,p_1 y}{\text{sh}\,p_1}$$

$$p_j(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\xi^2 - \Omega_j^2}, & |\xi| \geq \Omega_i \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \xi^2}, & |\xi| \leq \Omega_i \end{cases}, \quad j = 1,2.$$

Індекс 0 відповідає падаючій нормальній хвилі, що поширюється, а індекси k — нормальним хвилям у відбитому полі. Величина ξ є коренем дисперсійного рівняння

$$(2\xi^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 \,\text{cth}\, p_1 - 4\xi^2 p_1^2 p_2 \,\text{cth}\, p_2 = 0. \qquad (4)$$

Напруження, що відповідають цим переміщенням, знаходяться з закону Гука:

$$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu} = \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\nu}{1-2\nu}\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right), \qquad (5)$$

$$\frac{\tau_{zy}}{2\mu}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right).$$

Для антисиметричного поля, у виразі для компоненти переміщень u_z, i змінюється на $(-)$, а $\operatorname{ch} p_j y/\operatorname{sh} p_j$ на $\operatorname{sh} p_j y/\operatorname{ch} p_j$, для компоненти u_y - $\operatorname{sh} p_j y/\operatorname{sh} p_j$ на $\operatorname{ch} p_j y/\operatorname{ch} p_j$. Дисперсійне рівняння має вигляд:

$$(2\xi^2-\Omega_2^2)^2 p_1 \operatorname{th} p_1 - 4\xi^2 p_1^2 p_2 \operatorname{th} p_2 = 0. \quad (6)$$

Введені позначення $\Omega_i=\omega H/c_i$, c_i — швидкість поздовжніх $(i=1)$ і поперечних $(i=2)$ хвиль.

Для знаходження однозначного розв'язку необхідно враховувати умови випромінювання на нескінченність.

Метод розв'язання

Для розв'язку сформульованої вище граничної задачі, застосовувався метод однорідних розв'язків. В методі однорідних розв'язків хвильове поле представляється суперпозицією нормальних хвиль. Таке представлення породжує проблему повноти системи однорідних розв'язків і встановлення характеру збіжності розкладу зовнішнього навантаження по системі нормальних хвиль (частинних розв'язків відповідної граничної). Базисні властивості наборів частинних розв'язків методу однорідних розв'язків обґрунтовуються в роботах багатьох авторів і добре відомі. Ми на них зупинятися не будемо. При фактичній реалізації методу однорідних розв'язків виникають труднощі, обумовлені тим, що базисні функції не є взаємно-ортогональними, крім того, самі ці функції і відповідні їм власні значення — комплексні. Таким чином виникає задача розкладу функцій $\sigma_{zz}^{(0)}(y)$, $\tau_{zy}^{(0)}(y)$ по неортогональній системі частинних розв'язків $\sigma_{zz}(\xi_k,y)$ і $\tau_{zy}(\xi_k,y)$. На сьогодні методи точного розв'язання таких функціональних рівнянь не розроблені. Але для фактичного визначення комплексних коефіцієнтів C_k використовуються різні підходи. Зокрема, метод колокацій, метод найменшого квадратичного відхилення, метод Гальоркіна, варіаційні підходи. Всі зазначені підходи приводять до нескінченої системи алгебраїчних рівнянь. Як правило, для розв'язання такої системи застосовують метод простої редукції. В цьому випадку використовується скінченне число однорідних розв'язків, які відповідають найменшим по модулю кореням дисперсійного рівняння. Звичайно виникає питання про збіжність методу. Для ряду граничних задач можливо існування локальних особливостей по напруженням. У такому випадку не правомірна проста редукція системи. Для врахування локальної особливості, в методі однорідних розв'язків необхідно застосовувати спеціальні прийоми. Для поставленої граничної задачі, навіть при простій редукції нескінченної системи рівнянь, бажана точність розв'язку може бути одержана за рахунок врахування необхідної кількості нормальних хвиль. При цьому враховуються всі нормальні хвилі з дійсними і чисто уявними хвильовими числами, а кількість пар хвиль з комплексними хвильовими числами визначає точність розв'язку задачі, яка випливає з виконання умов (2).

Метод найменшого квадратичного відхилення використовувався для знаходження розв'язку сформульованої граничної задачі. В методі найменшого квадратичного відхилення для переходу від функціональних рівнянь до алгебраїчних, необхідно знайти таке значення коефіцієнтів C_j, для яких похибка δ^2 була б мінімальною

$$\begin{aligned}\delta^2 = \int_{-h}^{h}\left(\sigma_{zz}^{(0)}(\xi_0,y)-\sum_{k=1}^{N}C_k\,\sigma_{zz}(\xi_k,y)\right)\left(\overline{\sigma}_{zz}^{(0)}(\xi_0,y)-\sum_{k=1}^{N}\overline{C}_k\overline{\sigma}_{zz}(\xi_k,y)\right)dx\,+\\ +\int_{-h}^{h}\left(\tau_{zy}^{(0)}(\xi_0,y)-\sum_{k=1}^{N}C_k\tau_{zy}(\xi_k,y)\right)\left(\overline{\tau}_{zy}^{(0)}(\xi_0,y)-\sum_{k=1}^{N}\overline{C}_k\overline{\tau}_{zy}(\xi_j,y)\right)dx.\end{aligned} \quad (7)$$

Комплексне спряження позначається рискою. Мінімум невід'ємної функції δ^2 знаходимо виходячи із умови існування екстремуму функції багатьох змінних. Необхідно враховувати, що величини $C_k, \sigma_{zz}, \tau_{zy}$ є комплексними. Значення $C_k, k=1,..N$, для яких функція δ^2 стає мінімальною, можуть бути знайдені із системи рівнянь, отриманих прирівнюванням до нуля частинних похідних:

$$\frac{\partial\delta^2}{\partial\operatorname{Re}C_k}=\frac{\partial\delta^2}{\partial\operatorname{Im}C_k}=0, k=1,2,\ldots N. \quad (8)$$

Ці умови еквівалентні наступним

$$\frac{\partial\delta^2}{\partial C_k}=0\text{, або }\frac{\partial\delta^2}{\partial\overline{C}_k}=0 \quad (9)$$

Знайдемо диференціал, продиференціювавши функції δ^2 по $\overline{C}_k$. Отримаємо систему N лінійних рівнянь з N невідомими. Розв'язок системи знаходиться стандартним методом Гауса. Точність розв'язку оцінюється нев'язкою ε, яка визначається в рівновіддалених точках на поверхні $z = 0, |y| \le 1$ співвідношенням

$$\varepsilon_1 = \left(\sigma_{zz}^{(0)}(\xi_0, y) - \sum_{k=1}^{N} \sigma_{zz}(\xi_k, y)\right)^2 + \left(\tau_{zy}^{(0)}(\xi_0, y) - \sum_{k=1}^{N} \tau_{zy}(\xi_k, y)\right)^2, \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\max(\sigma_{zz}^{(0)}(\xi_0, y), \tau_{zy}^{(0)}(\xi_0, y))} 100\% .$$

Точність розв'язку задачі визначається похибкою (ε) виконання граничних умов (2). Похибка (ε) не перевищувала 0,5 % відносно напруження в падаючій хвилі, при врахуванні до 20 пар мод з хвильовими числами, які дорівнюють комплексним кореням дисперсійного рівняння, для частотного діапазону, який розглядався.

Аналіз результатів

Подальший аналіз ґрунтується на чисельних результатах, отриманих для різних частот і при зміні величини коефіцієнту Пуассона. Перед усім зупинимося на симетричних коливаннях.

Для симетричного поля розглядається частотна область, у якій лише одна нормальна хвиля (мода) може поширюватись. У даній частотній області спостерігається явище крайового резонансу. Зауважимо, що в даній області частот не існує неоднорідних хвиль з чисто уявними хвильовими числами. Резонанс обумовлений неоднорідними хвилями з комплексними хвильовими числами. Відмітимо характерні особливості крайового резонансу для симетричного випадку. Амплітуда коливань на резонансній частоті обмежена. Існування на резонансній частоті нормальної хвилі, яка переносить енергію від торця, обумовлює радіаційного затухання, за рахунок якого амплітуди переміщень залишаються скінченими. Але в окремих випадках можливо необмежене зростання амплітуди переміщення на резонансі. Зокрема, при $\nu = 0,$ за умови збудження хвилеводу самоврівноваженим навантаженням [1, с. 268–272].

Характерною особливістю крайового резонансу при симетричних коливаннях є те, що амплітуди всіх неоднорідних хвиль з хвильовими числами, які є комплексними коренями дисперсійного рівняння, досягають своїх максимальних значень на одній і тій самій частоті. При цьому, із збільшенням номеру неоднорідної хвилі її амплітуда зменшується. Основний вклад у формування крайової моди вносить перша неоднорідна хвиля. Добре відомо, що частота крайового резонансу залежить від коефіцієнту Пуассона.

Графік на рис. 1 показує, що із збільшенням коефіцієнту Пуассона частота крайового резонансу зростає.

Наведений графік з графічною точністю співпадає з результатами [6, с. 651] і [4, с. 39].

Залежність резонансної частоти від коефіцієнту Пуассона може бути знайдена з графіку рис. 1 і представлена у вигляді.

Таке саме співвідношення було запропоновано в праці [6, с. 651].

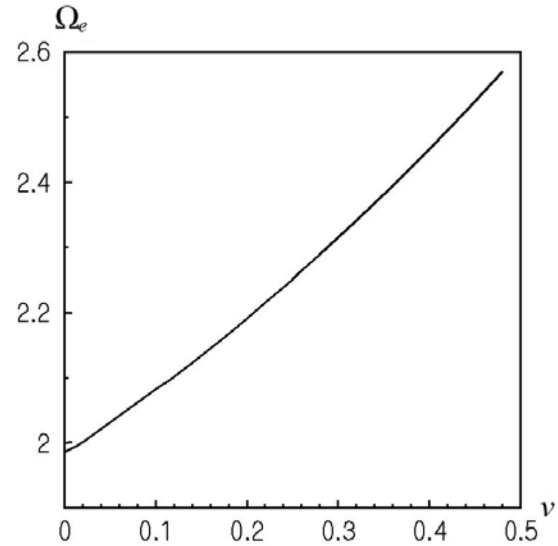


Рис.1. Залежність частоти крайового резонансу від коефіцієнту Пуассона при симетричних коливаннях

На підставі даних, приведених на рис. 2, можна судити про зміну добротності резонансу залежно від коефіцієнту Пуассона.

Криві на рис. 2 відповідають різним значенням коефіцієнту Пуассона. Зокрема, 1 побудована для $\nu = 0.24$; 2 — $\nu = 0.32$; 3 — $\nu = 0.4$; 4 — $\nu = 0.48$.

Із зростанням коефіцієнту Пуассона, максимальне значення модуля комплексної амплітуди моди з хвильовим числом, яке є першим комплексним коренем дисперсійного рівняння, зменшується і збільшується ширина резонансу, тобто добротність резонансу зменшується.

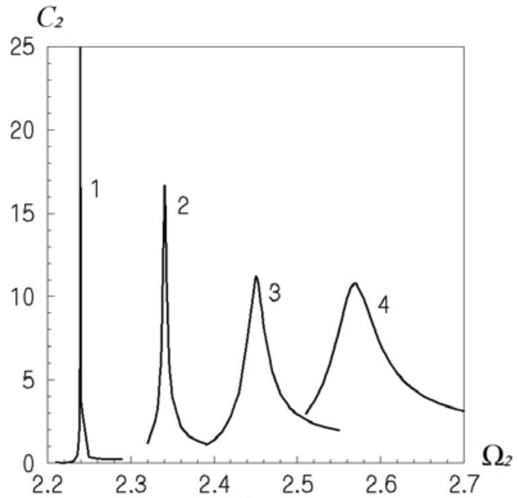


Рис. 2. Модуль комплексної амплітуди моди з першим комплексним хвильовим числом залежно від частоти

При зміні типу симетрії, тобто для антисиметричних коливань, ситуація суттєво змінюється. Резонансна ситуація має місце в області більш високих частот, вище частоти запирання для моди, що розповсюджується. Крім того, крайовий резонанс існує не для всіх значень коефіцієнту Пуассона. Значною мірою відмінності прояву резонансу на неоднорідних хвилях, залежно від типу симетрії, обумовлені різницею в спектральних характеристиках пружного шару при симетричних і антисиметричних коливаннях. Нагадаємо деякі з них. Для випадку симетричних коливань, перший комплексний корінь рівняння (4), незалежно від величини коефіцієнту Пуассона ($0 \le \nu \le 0.5$), вироджується в дійсний на частоті Ω^*. Ця частота менше частоти запирання для другої нормальної хвилі, що розповсюджується В свою чергу частота крайового резонансу лежить нижче частоти Ω^*. При антисиметричних коливаннях, в області частот, в якій поширюється тільки одна мода, крім мод з комплексними хвильовими числами існує мода з чисто уявним хвильовим числом і резонансу на хвилях, що не поширюються, не існує. На відміну від симетричних коливань, при антисиметричних коливаннях, в залежності від величини коефіцієнту Пуассона, перший комплексний корінь дисперсійного рівняння (6), може вироджуватись або в дійсний [11, с. 46], або в чисто уявний [7, с. 20]. У праці [7, с. 20] показано, що резонанс на хвилях, що не поширюються, при антисиметричних коливаннях існує, починаючи з певного значення коефіцієнту Пуассона (ν).

Починаючи з даної величини (ν), перший комплексній корінь дисперсійного рівняння вироджується в чисто уявний.

Критичне значення ν [8, с. 19], починаючи з якого перший комплексний корінь вироджується в чисто уявний, знаходиться із рівняння:

$$1+\frac{16}{3\pi}x\,\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}x\right)=0, \quad x=\sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}. \qquad (11)$$

Шуканий розв'язок $\nu = 0.32014$.

На рис. 3 представлена залежність модуля комплексної амплітуди неоднорідної моди з першим комплексним хвильовим числом від частоти при зміні величини коефіцієнту Пуассона.

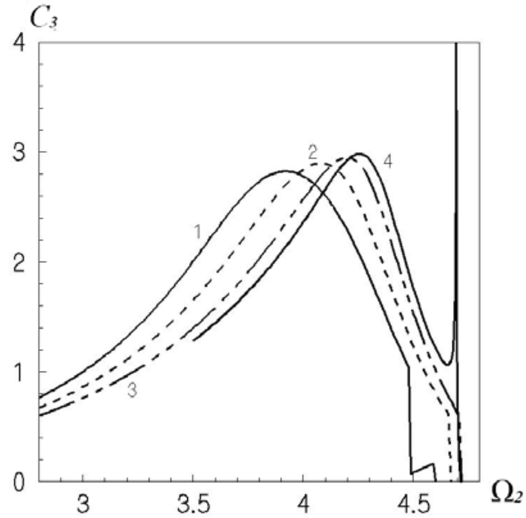
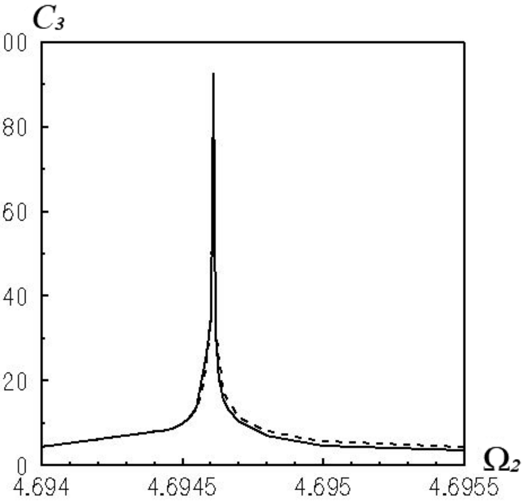


Рис. 3 Модуль амплітуди першої неоднорідної моди залежно від частоти для різних значень коефіцієнту Пуассона

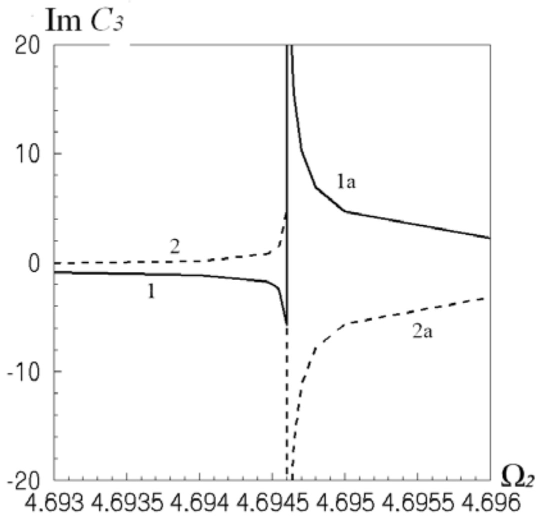
Номер кривої відповідає різним значенням коефіцієнту Пуассона. Зокрема, 1 — $\nu = 0.14$; 2 — $\nu = 0.24$; 3 — $\nu = 0.32$; 4 — $\nu = 0.36$.

Як випливає з рис. 3, спільним для кривих 1–3 є наявність лише одного амплітудного максимуму. Порівнюючи рис. 3 та рис. 2 (криві з однаковими величинами коефіцієнту Пуассона) зауважимо, що ступінь збудження моди з першим комплексним хвильовим числом суттєво залежить від типу симетрії. Зокрема, при симетричних коливаннях, модуль амплітуди неоднорідної хвилі перевищує амплітуду падаючої в десятки разів. При антисиметричних коливаннях, амплітуда неоднорідної хвилі перевищує амплітуду падаючої не більше ніж у 3,5 рази. Крім того, зростання частоти, на якій цей максимум спостерігається, також незначне, добротності так само збільшується незначно. При антисиметричних коливаннях, на частоті, на якій модуль амплітуди неоднорідної хвилі має максимальне значення (криві 1–3 рис. 3), фаза не міняє знак. Оскільки резонанс характеризується не тільки максимумом модуля амплітудних характеристик, але і зміною знаку фазових характеристик, то для $\nu = 0.14$, $\nu = 0.24$, $\nu = 0.32$, на частоті, на якій амплітуда має максимум, фаза не змінює знак, що говорить про те, що ця частота не є резонансною. Ситуація кардинально змінюється, починаючи з коефіцієнту Пуассона $\nu = 0.32014$.

На рис. 3 для кривої 4 (коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.36$) модуль амплітуди має два локальних максимуми. На рис. 4 представлена залежність комплексної амплітуди нормальної хвилі з першим комплексним хвильовим числом від частоти. Рис. 4, *а* відповідає модулю комплексної амплітуди, а рис. 4, *б* — фазовим характеристикам.



а



б

Рис. 4 Комплексна амплітуда моди з першим комплексним хвильовим числом залежно від частоти: 4, *а* — модуль амплітуди неоднорідної моди; 4, *б* — фаза неоднорідної моди)

У пружному хвилеводі нормальні хвилі з комплексними хвильовими числами враховуються парами $(\pm \operatorname{Re}\xi + i \operatorname{Im}\xi)$, таким чином формується стояча хвиля з експоненціально-спадаючою амплітудою. Стояча хвиля енергії не переносить, тому такий розв'язок не суперечить фізичному змісту задачі. Залежність від частоти для модуля комплексної амплітуди хвилі з комплексного кореня $+\operatorname{Re}\xi + i \operatorname{Im}\xi$ дисперсійного рівняння (6) відображає суцільна крива на рис. 4, *а*, а фазові характеристики представлені кривими 1 і 1а на рис. 4, *б*. Відповідно $-\operatorname{Re}\xi + i \operatorname{Im}\xi$ — штрихова крива на рис. 4, *а* і криві 2 і 2а на рис. 4, *б* ($\operatorname{Im} C_3$).

При антисиметричних коливаннях, крайовий резонанс спостерігається на частоті, на якій перша пара комплексного кореня $(\pm \operatorname{Re}\xi + i \operatorname{Im}\xi)$ дисперсійного рівняння (6), вироджується в два чисто уявні корені. Це відбувається для коефіцієнтів Пуассона вище критичного значення ($\nu = 0.32014$). Із зростанням частоти, резонанс обумовлений тільки чисто уявними коренями дисперсійного рівняння. Пара комплексних коренів різняться тільки знаком при дійсній частині, в той же час два чисто уявних кореня мають різні значення і різниці між ними зростає при збільшенні частоти. Як видно з рис. 4, *а*, починаючи з частоти $\Omega_2 = 4.6947$, резонансні криві (суцільна і штрихова криві) відрізняються.

Для обох типів симетрії (симетричні або антисиметричні коливання) частота резонансу на неоднорідних хвилях залежить від коефіцієнту Пуассона. Характер такої залежності різний для різних типів симетрії. При симетричних коливаннях, резонансна частота зростає із збільшенням ν, при антисиметричних коливаннях — падає. Це підтверджує графік на рис. 5.

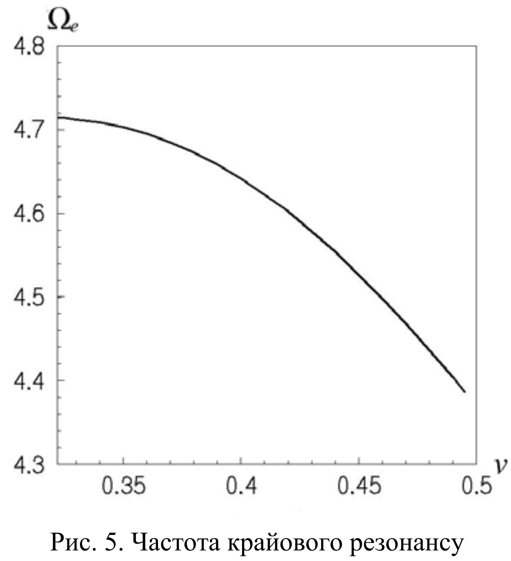


Рис. 5. Частота крайового резонансу залежно від коефіцієнту Пуассона при антисиметричних коливаннях

Емпірична залежність резонансної частоти крайової моди від коефіцієнту Пуассона може бути представлена у вигляді $\Omega_R = (-0.019\nu^2 - 0.08\nu + 4.6)$. Як видно з рис. 5, на відміну від симетричного випадку, частота крайового резонансу зменшується при збільшенні коефіцієнту Пуассона.

Відмітимо ще ряд відмінностей крайового резонансу для різних типів симетрії коливань. Для симетричного випадку на частоті крайового резонансу існують тільки неоднорідні моди з комплексними хвильовими числами.

Модулі амплітуд усіх неоднорідних мод на резонансній частоті досягають своїх максимальних значень, при цьому величина амплітуди зменшується із збільшенням номеру нормальної хвилі.

Для антисиметричного випадку тільки модуль амплітуда неоднорідної моди з першим комплексним хвильовим числом досягає свого максимального значення. Максимуми амплітуди неоднорідних мод вищих порядків не співпадають по частоті.

Висновки

Таким чином, незалежно від типу симетрії коливань пружного обмеженого тіла (випадок плоскої деформації) існує резонанс на неоднорідних хвилях (крайовий резонанс).

В обох випадках крайовий резонанс обумовлений значним збудженням неоднорідних хвиль і частота крайового резонансу залежить від коефіцієнтів Пуассона.

При симетричних коливаннях резонанс існує на частоті, на який тільки одна нормальна хвиля поширюється. При антисиметричних коливаннях резонансна частота значно вища і лежить в діапазоні, коли у відбитому полі поширюється дві нормальні хвилі. При симетричних коливаннях на частоті крайового резонансу всі неоднорідні хвилі мають максимуми амплітуд, при цьому рівень збудження хвилі спадає із збільшенням номеру нормальної неоднорідної хвилі.

При антисиметричних коливаннях амплітуда тільки першої неоднорідної хвилі на резонансній частоті досягає максимальних значень Неоднорідні хвилі вищих порядків на резонансній частоті екстремуму не мають.

Крайовий резонанс при симетричних коливаннях існує для всіх значень коефіцієнту Пуассона, а при антисиметричних коливаннях для $\nu \geq 0.32014$.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Гринченко В. Т.**, Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. К: Наук. думка, 1981. 284 с. (рос.)
2. **Грінченко В. Т.**, Городецька Н. С. Про особливості спектра власних частот пружних тіл. *Доповіді Національної академії наук України.* 2018. № 5. С. 22-27. DOI: 10.15407/dopovidi2018.05.022 (укр).
3. **Cees M.**, Clorennec D., Royer D., Prada C. Edge resonance and zero group velocity Lamb modes in a free elastic plate. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2011. Vol. 130. №2. P. 689–694. DOI: 10.1121/1.3607417 (eng).
4. **Le Clezio E.**, Predoi M. V., Castaings M., Hosten B. and Rousseau M. Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode. *Ultrasonics.* 2003. Vol. 41. №1. P. 25-40. DOI:10.1016/S0041-624X(02)00391-8 (eng).
5. **Ratassepp M.**, Klauson A., Chati F., Léon F., Maze G. Edge resonances in semi-infinite thick pipe: theoretical predictions and measurements. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2008. Vol. 124. №2. P. 875-885. DOI: 10.1121/1.2945163 (eng).
6. **Pagneux V.** Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semiinfinite plate. *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2006. Vol. 120. №2. P. 649–656. DOI: 10.1121/1.2214153 (eng)
7. **Гринченко В. Т.**, Городецкая Н. С., Старовойт И. В. Антисимметричные колебания полуслоя. Неоднородные волны. *Акустичний вісник.* 2009. Т. 12. №2. С. 16-24 (рос).
8. **Гринченко В. Т.**, Городецкая Н. С. Резонанс на неоднородных волнах при изгибных колебаниях полуслоя. *Акустичний вісник*. 2010. Т. 13. №4. С. 15–22. (рос.)
9. **Feng F**., Lin S., Shen Z. Edge resonances of circular cylinders. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 915–916. P. 45–48. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.915-916.45 (eng).
10. **Pagneux V.** Trapped Modes and Edge Resonances in Acoustics and Elasticity. *Dynamic localization phenomena in Elasticity, Acoustic and Electromagnetism CISM Inter*. Centre for Mechanical Sciences. 2013. Vol. 547. P. 181–223. DOI: 10.1007/978-3-7091-1619-7_5 (eng).
11. **Городецкая Н. С.**, Гринченко В. Т., Старовойт И. В. Особенности возбуждения нормальных волн при изгибных колебаниях полуслоя. *Акустичний вісник.* 2007. Т. 10. №3. С. 42–54. (рос.)

Городецька Н. С., Макаренкова А. А., Старовойт І. В.

ВПЛИВ СИМЕТРІЇ КОЛИВАНЬ НА РЕЗОНАНС НА НЕОДНОРІДНИХ ХВИЛЯХ В ПРУЖНОМУ ПІВШАРІ

Проведено порівняння резонансу на неоднорідних хвилях при симетричних та антисиметричних коливаннях півшару з вільними бічними поверхнями і вільним торцем. Хвильове поле в півшарі збуджується першою нормальною хвилею, що поширюється з нескінченності. Показано, що явище резонансу на неоднорідних хвилях в пружному півшарі існує для обох видів симетрії, частота резонансу в обох випадках залежить від коефіцієнту Пуассона. При цьому, при симетричних коливаннях частота резонансу зростає із збільшенням коефіцієнту

Пуассона, а при антисиметричних коливаннях падає. При симетричних коливаннях резонанс існує для всього діапазону можливих змін коефіцієнту Пуассона. При антисиметричних коливаннях резонанс спостерігається починаючи з коефіцієнту Пуассона $\nu = 0.32014$ *. При симетричних коливаннях резонанс на неоднорідних хвилях існує в частотному діапазоні, в якому лише одна нормальна хвиля є поширювальною. На резонансній частоті всі хвилі з комплексними хвильовими числами мають максимум амплітуд. Визначальною є хвиля з першим комплексним хвильовим числом. Із зростанням номеру нормальної хвилі, її вклад в формування власної формі на резонансі падає. На частоті резонансу при симетричних коливаннях, у хвильовому полі не існує нормальних хвиль з чисто уявним хвильовим числом. При антисиметричних коливаннях ситуація суттєво інша. Резонанс проявляється в області частот, в якій поширюються дві нормальні хвилі. При цьому перша нормальна поширювальна хвиля є домінуючою, тобто переносить максимум енергії відбитого поля. Як і в симетричному випадку, резонанс на неоднорідних хвилях обумовлений значним збудженням нормальної хвилі з першим комплексним хвильовим числом. На відміну від симетричних коливань, амплітуди неоднорідних хвиль вищих порядків на резонансній частоті не досягають своїх максимальних значень. Починаючи з резонансної частоти, у відбитому полі з'являються дві неоднорідні хвилі з чисто уявним хвильовим числом. Амплітуди цих хвиль значно перевищують амплітуду падаючої хвилі і їх величини різняться. Із збільшенням частоти різниця між хвильовими числами даних неоднорідних хвиль зростає і відповідно збільшується різниця між їх амплітудами. Таким чином резонанс на неоднорідних хвилях при антисиметричних коливанням обумовлений не тільки неоднорідною хвилею з комплексним хвильовим числом, але і неоднорідними хвилями з чисто уявним хвильовим числом.*

Ключові слова: резонанс; неоднорідні хвилі; пружний хвилевід.

Gorodetska N., Makarenkova A., Starovoit I.

INFLUENCE OF THE SYMMETRY OF VIBRATIONS ON THE RESONANCE ON INHOMOGENEOUS WAVES IN ELASTIC HALF-LAYER

A comparison of the resonance on inhomogeneous waves with symmetric and antisymmetric oscillations of a semiinfinite strip with free surfaces and a free edge is made. The field of wave in the semiinfinite strip is excited by the first normal wave propagating from infinity. It is shown that the resonance phenomenon on inhomogeneous waves in an elastic half-strip exists for both types of symmetry, the resonance frequency in both cases depends on the Poisson's coefficient. In this case, with symmetric oscillations, the frequency of resonance increases with increasing Poisson's coefficient, while with antisymmetric oscillations, it decreases. At symmetric oscillations, a resonance exists for the entire range of possible changes in the Poisson's coefficient. With antisymmetric oscillations, resonance is observed starting with the Poisson coefficient $\nu = 0.32014$*. In symmetric oscillations, resonance in inhomogeneous waves exists in the frequency range in which only one normal wave is propagated. At the resonant frequency, all waves with complex wave numbers have a maximum of amplitudes. The wave is determined with the first complex-wave number. As the frequency of a normal wave grows, its contribution to the formation of its own form at the resonance decreases. At the resonance frequency at symmetric oscillations, there are no normal waves in a wave field with a purely imaginary wave number. With antisymmetric fluctuations, the situation is substantially different. The resonance manifests itself in the frequency range in which two normal waves propagate. In this case, the first normal distribution wave is dominant, that is, it transmits the maximum of the energy of the reflected field. As in the symmetric case, the resonance on inhomogeneous waves is due to a significant excitation of a normal wave with the first complex wave number. Unlike symmetric oscillations, the amplitudes of nonhomogeneous waves of higher orders at the resonant frequency do not reach their maximum values. Beginning with the resonance frequency, two inhomogeneous waves with a purely imaginary wave number appear in the reflected field. The amplitudes of these waves significantly exceed the amplitude of the incident wave and vary in size. As the frequency increases, the difference between the wave numbers of the data of the heterogeneous waves increases and, accordingly, the difference between their amplitudes increases. Thus, the resonance on inhomogeneous waves with antisymmetric oscillations is due not only to an inhomogeneous wave with a complex wave number but also to heterogeneous waves with a purely imaginary wave number.*

Keywords: resonance; inhomogeneous waves; elastic waveguide.

Городецкая Н. С., Макаренкова А. А., Старовойт И. В.

ВЛИЯНИЕ СИММЕТРИИ КОЛЕБАНИЙ НА РЕЗОНАНС НА НЕОДНОРОДНЫХ ВОЛНАХ В УПРУГОМ ПОЛУСЛОЕ

Проведено сравнение резонанса на неоднородных волнах при симметричных и антисимметричных колебаниях полуслоя со свободными боковыми поверхностями и свободным торцом. Волновое поле в полуслое возбуждается первой нормальной волной, распространяющейся из бесконечности. Показано, что явление резонанса на неоднородных волнах в упругом полуслое существует для обоих видов симметрии, частота резонанса в обоих случаях зависит от коэффициента Пуассона. При этом, при симметричных колебаниях частота резонанса возрастает с увеличением коэффициента Пуассона, а при антисимметричных – падает.

При симметричных колебаниях резонанс существует для всего диапазона возможных изменений коэффициента Пуассона. При антисимметричных колебаниях резонанс наблюдается, начиная с коэффициента Пуассона $\nu = 0.32014$. *При симметричных колебаниях резонанс на неоднородных волнах существует в частотном диапазоне, в котором только одна нормальная волна распространяющаяся. На резонансной частоте все волны с комплексными волновыми числами имеют максимум амплитуд. Определяющей является волна с первым комплексным волновым числом. С увеличением номера нормальной волны, ее вклад в формирование собственной формы на резонансе падает. На частоте резонанса при симметричных колебаниях в волновом поле не существует нормальных волн с чисто мнимым волновым числом. При антисимметричных колебаниях ситуация существенно другая. Резонанс проявляется в области частот, в которой распространяются две нормальные волны. При этом первая нормальная распространяющаяся волна является доминирующей, то есть переносит максимум энергии отраженного поля. Как и в симметричном случае, резонанс на неоднородных волнах обусловлен значительным возбуждением нормальной волны с первым комплексным волновым числом. В отличии от симметричных колебаний, амплитуды неоднородных волн высших порядков на резонансной частоте не достигают своих максимальных значений. Начиная с резонансной частоты, в отраженном поле появляются две неоднородные волны с чисто мнимым волновым числом. Амплитуды этих волн значительно превышают амплитуду падающей волны и их величины разнятся. С увеличением частоты, разница между волновыми числами данных неоднородных волн увеличивается и соответственно увеличивается разность между их амплитудами. Таким образом резонанс на неоднородных волнах при антисимметричных колебаниях обусловлен не только неоднородной волной с комплексным волновым числом, но и неоднородными волнами с чисто мнимым волновым числом.*

Ключевые слова: резонанс; неоднородные волны; упругий волновод.

Стаття надійшла до редакції 06.03.2019 р.
Прийнято до друку 07.05.2019 р.