

DOI: 10.18372/2310-5461.42.13754

УДК 532.542

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
 Інститут гідромеханіки НАН України
 orcid.org/0000-0002-3878-3915
 e-mail: aobor@ukr.net

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ПРЯМОКУТНИМ РОЗШИРЕННЯМ У ЗМІННИХ ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ-ЗАВИХОРОЕНІСТЬ

Вступ

Дослідження течій у каналах актуальне у багатьох сферах людської діяльності. З-поміж іншого, значний інтерес тут пов'язаний з вивченням руху рідин у каналах з локальними розширеннями, такими, як муфти, дифузори, аневризми тощо. Пояснюється цей інтерес тим, що в околах таких геометричних неоднорідностей каналів змінюються режим і структура течії, її локальні та інтегральні характеристики тощо. А це може спричинити відповідні наслідки не лише в околі, але й за межами зазначених неоднорідностей [1, с. 59; 2, с. 293–295; 3, с. 658–659].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Аналіз відповідних наукових джерел засвідчує, що вивченню руху рідин у каналах з локальними розширеннями приділялася і продовжує приділятися значна увага. У таких роботах стінки каналів і розширень покладалися жорсткими, а форми розширень вибиралися найпростішими. Що стосується базових течій (тобто течій перед входом у розширення), то вони були ламінарними, осесиметричними і стаціонарними, а рідини при цьому вважалися однорідними, нестисливими і ньютонівськими (у даній роботі не розглядаються інші типи каналів, розширень, рідин та їхніх течій, оскільки вони значно рідше вивчалися у порівнянні із зазначеними). Це дозволяло, з одного боку, в рамках вибраних моделей та з прийнятною для потреб практики точністю з'ясувати вплив основних параметрів каналу, його розширення і базового потоку на течію як в околі розширення, так і за його межами, а з іншого — суттєво

спростувати розв'язування відповідних задач [1, с. 59; 4, с. 270, 5, с. 45–46].

Серед одержаних тут результатів велике значення мають чисельні методи, розроблені для дослідження течій в околах розширень каналів. Зокрема, в роботі [1, с. 60–66] було представлено чисельний метод розв'язування задачі про рух рідини в каналі з локальним прямокутним осесиметричним розширенням. Цей метод дозволяє вивчати течію у змінних швидкостях і має другий порядок точності по часовій та просторових координатах. У даному дослідженні розробляється альтернативний метод розв'язування цієї ж задачі у змінних функція течії-завихореність-тиск, який потребує використання менш потужного математичного апарату і має практично такий же порядок точності.

Постановка завдання

На рис. 1 зображено нерухомий плоский прямий жорсткий канал ширини D_0 із локальним прямокутним осесиметричним жорсткостінним розширенням ширини d і довжини l . У цьому каналі тече нестислива в'язка однорідна ньютонівська рідина масової густини ρ і кінематичної в'язкості ν . Її течія перед входом у розширення (базова течія) є стаціонарною ламінарною і характеризується об'ємною витратою на одиницю глибини каналу q . Необхідно дослідити течію в околі розширення, а також встановити зв'язок її локальних та інтегральних характеристик з параметрами базової течії, каналу і розширення.

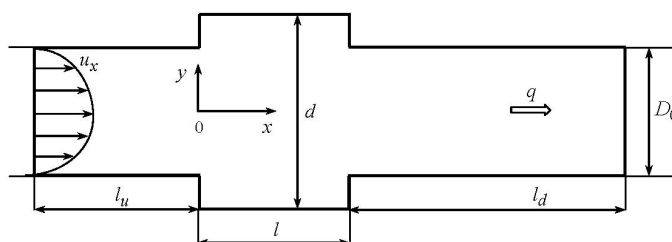


Рис. 1. Геометрія задачі та розрахункова область

Сформульована задача описується двовимірними рівняннями Нав'є–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

і нерозривності:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Граничними умовами є рівність нулеві швидкості течії на стінках каналу S_{ch} і розширення S_{exp} :

$$u_x|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0, \quad u_y|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0. \quad (3)$$

Також, унаслідок збереження маси в каналі, об'ємна витрата рідини q має бути однакою в усіх його поперечних перерізах:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = U_a D_0. \quad (4)$$

Крім того, за межами збуреної розширенням течії (тобто перед і достатньо далеко за ним) задається параболічний профіль швидкості (внаслідок ламінарного характеру базового потоку):

$$u_x|_{x=-l_u, l+l_d} = U_0 \left(1 - \frac{4y^2}{D_0^2} \right), \quad u_y|_{x=-l_u, l+l_d} = 0. \quad (5)$$

Що стосується тиску p , то вважається, що перед ($p_u = p|_{x=-l_u}$) і достатньо далеко за ($p_d = p|_{x=l+l_d}$) розширенням він є сталим, а його відповідний перепад $\Delta p = p_u - p_d = \text{const} > 0$ — таким, що відповідає заданому ламінарному характеру базового потоку. При цьому без втрати загальності величина p_d покладається рівною нулеві ($p_d = 0$), а тиск p_u (який тепер дорівнює перепаду Δp), як і тиск в усьому каналі, визначається у процесі розв'язування задачі (вибираючи значення p_d , завжди можна вибрати відповідне значення p_u так, щоби перепад тиску Δp , який визначає рух рідини в каналі, залишався незмінним). На нерухомих же жорстких поверхнях каналу і розширення нормальний градієнт тиску є нульовим:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right)_{S_{ch}} = 0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \right)_{S_{exp}} = 0. \quad (6)$$

Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в каналі в момент часу $t = 0$ [1, с. 60; 4, с. 271]:

$$u_x|_{t=0} = u_y|_{t=0} = 0; \quad \Delta p|_{t=0} = 0, \quad p_d|_{t=0} = 0 \Rightarrow p|_{t=0} = 0 \quad (7)$$

У співвідношеннях (1)–(7) x та y є прямокутними декартовими координатами, вибраними так, що вісь x направлена по осі каналу вниз за течією (рис. 1), t — часом, u_x та u_y — компонентами локальної миттєвої швидкості рідини у напрямках x та y , U_0 та

$$U_a = \frac{1}{D_0} \int_{-D_0/2}^{D_0/2} u_x|_{x=-l_u, l+l_d} dy = \frac{2}{3} U_0$$

відповідно максимальною та середньою у поперечному перерізі каналу швидкостями базового потоку, а \mathbf{n} (тут і надалі) — зовнішньою одиничною нормаллю до відповідної поверхні.

Метод розв'язування

Сформульована у попередньому розділі задача розв'язується шляхом: а) введення функції течії і завихореності та відповідного переходу від змінних швидкість-тиск до змінних функція течії-завихореність-тиск; б) обезрозмірювання одержаних у результаті зазначеного переходу співвідношень; в) вибору розрахункової області і просторово-часової обчислювальної сітки, та подальшої відповідної дискретизації безрозмірних співвідношень; г) розв'язування алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації. Розглянемо кожен із зазначених етапів.

Перехід до змінних функція течії-завихореність-тиск

Введення функції течії ψ [6, с. 167; 7, с. 181]:

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

(яка тотожно задовольняє рівняння нерозривності (2)) і завихореності ω (яка у випадку двовимірної течії має лише одну компоненту) [6, с. 159; 7, с. 181]:

$$\omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (9)$$

дозволяє перейти від рівнянь (1), (2) для швидкості і тиску до рівнянь для ψ , ω та p . Дійсно, диференціювання першого рівняння в (1) по координаті y , а другого — по координаті x , подальше віднімання від другого з одержаних співвідношень першого і врахування (9) дає рівняння переносу завихореності:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_x \frac{\partial \omega}{\partial x} + u_y \frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \nabla_{(x,y)}^2 \omega, \quad (10)$$

де

$$\nabla_{(x,y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

оператор Лапласа у змінних x, y .

Підстановка (8) у співвідношення (9) дозволяє одержати рівняння Пуассона для функції течії:

$$\nabla_{(x,y)}^2 \Psi = -\omega, \quad (11)$$

котре у явному вигляді зв'язує між собою функції Ψ та ω .

Диференціювання ж першого рівняння в (1) по координаті x , а другого – по координаті y , подальше додавання одержаних співвідношень і врахування (2) приводить до рівняння Пуасона для тиску:

$$\nabla_{(x,y)}^2 p = -\rho \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (12)$$

Що стосується граничних та початкових умов для змінних Ψ , ω і p , то їх можна одержати на основі умов (3)–(7). Так, співвідношення (5) дозволяють записати умови для функції течії та завихореності на вході та виході збуреної розширенням течії:

$$\Psi|_{x=-l_u, l_u+l_d} = U_0 y \left(1 - \frac{4y^2}{3D_0^2} \right), \quad \omega|_{x=-l_u, l_u+l_d} = \frac{8U_0 y}{D_0^2}. \quad (13)$$

З рівності нулю нормальної компоненти швидкості рідини на стінках каналу та розширення впливає (на основі (8)) постійність там функції Ψ :

$$\Psi|_{S_{ch}^+, S_{exp}^+} = \text{const}_+, \quad \Psi|_{S_{ch}^-, S_{exp}^-} = \text{const}_-$$

(тут S_{ch}^+ та S_{exp}^+ — верхні стінки каналу та розширення відповідно, а S_{ch}^- та S_{exp}^- — нижні).

Звідси, з урахуванням першого співвідношення в (13), одержуємо:

$$\Psi|_{S_{ch}^+, S_{exp}^+} = \frac{1}{3} U_0 D_0, \quad \Psi|_{S_{ch}^-, S_{exp}^-} = -\frac{1}{3} U_0 D_0. \quad (14)$$

Відсутність же тангенційної компоненти швидкості на поверхнях S_{ch} та S_{exp} спричиняє там рівність нулеві нормальних похідних першого порядку та змішаної похідної другого порядку від Ψ :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{S_{exp}^v} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0 \quad (15)$$

(в умовах (15) через S_{exp}^h та S_{exp}^v позначено горизонтальні та вертикальні ділянки поверхні S_{exp} відповідно).

Співвідношення (15) разом з рівнянням (11) дають також умову для завихореності на стінках каналу та розширення:

$$\omega|_{S_{ch}, S_{exp}^h} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h}, \quad \omega|_{S_{exp}^v} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Big|_{S_{exp}^v}. \quad (16)$$

Що стосується граничних умов для тиску, то, окрім (6), ще маємо:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{S_{exp}^v} = \rho \left[v \nabla_{(x,y)}^2 u_x - \frac{\partial u_x}{\partial t} \right]_{S_{exp}^v},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} = \rho \left[v \nabla_{(x,y)}^2 u_y - \frac{\partial u_y}{\partial t} \right]_{S_{ch}, S_{exp}^h}. \quad (17)$$

Співвідношення (17) одержуються з рівнянь (1) після врахування в них умов (3).

Початкові ж умови для Ψ , ω та p полягають у рівності нулю цих величин в момент часу $t = 0$ (див. (7)–(9)):

$$\Psi|_{t=0} = 0, \quad \omega|_{t=0} = 0, \quad p|_{t=0} = 0. \quad (18)$$

Безрозмірні співвідношення

При проведенні розрахунків зручно мати справу з безрозмірними аналогами наведених у попередньому підрозділі співвідношень. Для одержання цих аналогів необхідно вибрати відповідні масштаби. У даному дослідженні в якості масштабу довжини вибирається ширина каналу D_0 , в якості масштабу швидкості — її середнє у поперечному перерізі каналу значення у базовій течії $U_a = q / D_0$, масштабами часу і тиску є відповідно відношення D_0 / U_a та подвосний середній динамічний напір базової течії ρU_a^2 . Масштабом же для функції течії та об'ємної витрати служить добуток $U_a D_0$, а для завихореності — відношення U_a / D_0 .

Для вибраних масштабів безрозмірні аналоги представлень (8), (9) та рівнянь (10)–(12) мають відповідно такий вигляд:

$$U_x = \frac{\partial \Psi}{\partial Y}, \quad U_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial X}, \quad \Omega = \frac{\partial U_y}{\partial X} - \frac{\partial U_x}{\partial Y}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial T} + U_x \frac{\partial \Omega}{\partial X} + U_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 \Omega, \quad (20)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 \Psi = -\Omega, \quad (21)$$

$$\nabla_{(X,Y)}^2 P = -\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 - 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} - \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2. \quad (22)$$

Безрозмірні аналоги граничних умов (4), (6), (13)–(17) записуються наступним чином:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial X} &= 0, \\ Q &= 1, \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0, \\ \Psi \Big|_{X=-L_u, L+L_d} &= \frac{3}{2} Y \left(1 - \frac{4}{3} Y^2 \right), \Omega \Big|_{X=-L_u, L+L_d} = 12Y, \\ \Psi \Big|_{S_{ch}^+, S_{exp}^+} &= \frac{1}{2}, \Psi \Big|_{S_{ch}^-, S_{exp}^-} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= 0, \frac{\partial \Psi}{\partial X} \Big|_{S_{exp}^v} = 0, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0, \\ \Omega \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h}, \Omega \Big|_{S_{exp}^v} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} \Big|_{S_{exp}^v}, \\ \frac{\partial P}{\partial X} \Big|_{S_{exp}^v} &= \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_x - \frac{\partial U_x}{\partial T} \right]_{S_{exp}^v}, \\ \frac{\partial P}{\partial Y} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} &= \left[\frac{1}{\text{Re}} \nabla_{(X,Y)}^2 U_y - \frac{\partial U_y}{\partial T} \right]_{S_{ch}, S_{exp}^h}. \end{aligned} \tag{23}$$

Початкові ж умови (18) у змінних Ψ , Ω та P переписуються так:

$$\Psi \Big|_{T=0} = 0, \Omega \Big|_{T=0} = 0, P \Big|_{T=0} = 0. \tag{24}$$

У співвідношеннях (19)–(24) $X = x / D_0$ та $Y = y / D_0$ є безрозмірними координатами x та y ; $T = t U_a / D_0$ — безрозмірним часом; $U_x = u_x / U_a$ та $U_y = u_y / U_a$ — безрозмірними компонентами швидкості у напрямках x та y ; $\Psi = \psi / (D_0 U_a)$ та $\Omega = \omega D_0 / U_a$ — безрозмірними функцією течії та завихореністю відповідно; $P = p / (\rho U_a^2)$ — безрозмірним тиском; $\text{Re} = U_a D_0 / \nu$ — числом Рейнольдса осередненої по поперечному перерізу каналу базової течії; $Q = q / (U_a D_0)$ — безрозмірною об’ємною витратою рідини в каналі на одиницю його глибини; $D = d / D_0$ та $L = l / D_0$ — безрозмірними шириною та довжиною розширення відповідно; $L_u = l_u / D_0$ та $L_d = l_d / D_0$ — безрозмірними відстанями l_u та l_d ;

$$\nabla_{(X,Y)}^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2}$$

оператором Лапласа у змінних X, Y ; а також було враховано, що $U_a = 2U_0 / 3$ (див. після умов (7)).

Розрахункова область, обчислювальна сітка та дискретні співвідношення

На рис. 1 зображено область, в якій розшукується розв’язок задачі. Її ліва межа $X = -L_u$ вибирається там, де базова течія ще незбурена розширенням, а права $X = L + L_d$ — де збурення течії вже зникають, і вона стає такою, якою була при $X = -L_u$. Що стосується значень відстаней L_u та L_d , то для розглянутих у даній статті меж зміни швидкості базової течії вони вибираються у межах [4, с. 272]

$$L_u \geq 0.5, \quad L_d \leq 12.$$

У вибраній області вводиться рівномірна прямокутна сітка з малими кроками Δ_X по координаті X та Δ_Y по координаті Y (рис. 2):

$$\begin{aligned} X_n &= X_{n-1} + \Delta_X, \quad \Delta_X \ll 1; \quad Y_m = Y_{m-1} + \Delta_Y, \\ \Delta_Y &\ll 1. \end{aligned} \tag{25}$$

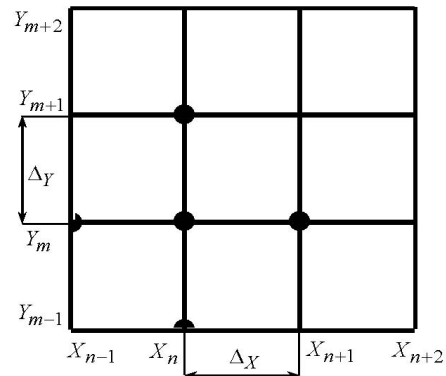


Рис. 2. Сітка розбиття розрахункової області.

Час же інтегрування розбивається на малі проміжки зі сталим кроком Δ_T :

$$T_k = T_{k-1} + \Delta_T = k \Delta_T, \quad \Delta_T \ll 1, \quad T_0 = 0. \tag{26}$$

Після цього у вузлах обчислювальної сітки (25), (26) проводиться дискретизація наведених у попередньому підрозділі співвідношень. При її проведенні значення довільної величини f у вузлі X_n, Y_m, T_k позначається через $f_{n,m}^k$:

$$f_{n,m}^k = f(X, Y, T) \Big|_{X=X_n, Y=Y_m, T=T_k}.$$

Дискретні аналоги безрозмірних рівнянь

Дискретні аналоги представлень (19) для компонент швидкості одержуються після застосування до останніх центральних різниць по відповідних координатах [7, с. 41]:

$$(U_x)_{n,m}^k = \frac{\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k}{2\Delta_Y},$$

$$(U_y)_{n,m}^k = -\frac{\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k}{2\Delta_X}. \quad (27)$$

Співвідношення (27) мають другий порядок точності (тут не наводиться дискретний аналог представлення (19) для завихореності через відсутність необхідності його подальшого використання).

Для дискретизації рівняння (20) використовуються односторонні різниці вперед за часом, односторонні різниці проти потоку та п'ятиточкові шаблони по відповідних координатах [8, с. 101–106]. Так, застосування до нестационарного члена у (20) односторонньої різниці вперед за часом дає його дискретний аналог першого порядку точності:

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m}^{k+1} - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_T}. \quad (28)$$

До конвективного ж члена рівняння (20) застосовуються односторонні різниці проти потоку по координатах X та Y , які мають другий порядок точності:

$$\left(U_x \frac{\partial \Omega}{\partial X}\right)_{n,m}^k = \begin{cases} (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_x)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n+1,m}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_X}; (U_x)_{n,m}^k < 0, \end{cases}$$

$$C_{n,m}^k = \begin{cases} 1 - \alpha_{XY} \left((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 - \alpha_{XY} \left((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ 1 + \alpha_{XY} \left((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ 1 + \alpha_{XY} \left((\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k - (\Delta\Psi)_{n,m,X}^k \right) - 2\alpha_X - 2\alpha_Y; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n-1,m}^k = \begin{cases} \alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n+1,m}^k = \begin{cases} \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ -\alpha_{XY} (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k + \alpha_X; (U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$\left(U_y \frac{\partial \Omega}{\partial Y}\right)_{n,m}^k = \begin{cases} (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m}^k - \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k \geq 0, \\ (U_y)_{n,m}^k \frac{\Omega_{n,m+1}^k - \Omega_{n,m}^k}{\Delta_Y}; (U_y)_{n,m}^k < 0. \end{cases} \quad (29)$$

Що стосується дифузійного члена у (20), то для одержання його дискретного аналога другого порядку точності використовується зазначений п'ятиточковий шаблон. Це дає

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial X^2}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n+1,m}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial Y^2}\right)_{n,m}^k = \frac{\Omega_{n,m+1}^k - 2\Omega_{n,m}^k + \Omega_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2}. \quad (30)$$

Наявність співвідношень (28)–(30), а також використання виразів (27) у представленнях (29) дозволяє записати дискретний аналог рівняння (20):

$$\Omega_{n,m}^{k+1} = C_{n,m}^k \Omega_{n,m}^k + C_{n-1,m}^k \Omega_{n-1,m}^k + C_{n+1,m}^k \Omega_{n+1,m}^k + C_{n,m-1}^k \Omega_{n,m-1}^k + C_{n,m+1}^k \Omega_{n,m+1}^k, \quad (31)$$

коефіцієнти якого мають такий вигляд:

$$C_{n,m-1}^k = \begin{cases} -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ -\alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

$$C_{n,m+1}^k = \begin{cases} \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k \geq 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \\ \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k \geq 0; \\ \alpha_{XY}(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k + \alpha_Y;(U_x)_{n,m}^k < 0, (U_y)_{n,m}^k < 0; \end{cases}$$

Тут величини $\alpha_X, \alpha_Y, \alpha_{XY}$ є відповідними відношеннями кроків просторово-часової решітки (25), (26):

$$\alpha_X = \frac{1}{\text{Re } \Delta_X^2}, \alpha_Y = \frac{1}{\text{Re } \Delta_Y^2}, \alpha_{XY} = \frac{\Delta_T}{2\Delta_X\Delta_Y},$$

а $(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k$ і $(\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k$ - приростами функції Ψ у напрямках X та Y цієї решітки відповідно:

$$(\Delta\Psi)_{n,m,X}^k = \Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k, (\Delta\Psi)_{n,m,Y}^k = \Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k.$$

Що стосується дискретних аналогів рівнянь Пуассона (21) для функції течії і (22) для тиску, то вони мають подібний вигляд:

$$\frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = -\Omega_{n,m}^k, \tag{32}$$

$$\frac{P_{n+1,m}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{P_{n,m+1}^k - 2P_{n,m}^k + P_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} = -\left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k. \tag{33}$$

Співвідношення (32), (33) мають другий порядок точності і одержуються після застосування до рівнянь (21), (22) п'ятиточкового шаблону по координатах X та Y .

Дискретні аналоги безрозмірних граничних умов та їх застосування до рівнянь (27), (31)-(33)

Дискретні аналоги безрозмірних граничних умов для функції течії Ψ і завихореності Ω зі співвідношень (23) записуються наступним чином:

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L+L_d} = \frac{3}{2} Y \left(1 - \frac{4}{3} Y^2 \right),$$

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}^+, S_{exp}^+} = \frac{1}{2}, \quad \Psi_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}^-, S_{exp}^-} = -\frac{1}{2},$$

$$\left(\Psi_{n,m+1}^k - \Psi_{n,m-1}^k \right)_{S_{ch}, S_{exp}^h} = 0,$$

$$\left(\Psi_{n+1,m}^k - \Psi_{n-1,m}^k \right)_{S_{exp}^v} = 0,$$

$$\Omega_{n,m}^k \Big|_{X=-L_u, L+L_d} = 12Y,$$

$$\Omega_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} = -\frac{\Psi_{n,m+1}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h},$$

$$\Omega_{n,m}^k \Big|_{S_{exp}^v} = -\frac{\Psi_{n+1,m}^k - 2\Psi_{n,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} \Big|_{S_{exp}^v}.$$

Для тиску ж P дискретний аналог граничних умов з (23) виглядає так:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)_{n,m} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial X} \right)_{n,m} \Big|_{S_{exp}^v} = \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{(U_x)_{n+1,m}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{(U_x)_{n,m+1}^k - 2(U_x)_{n,m}^k + (U_x)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_x)_{n,m+1}^k - (U_x)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_{exp}^v},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)_{n,m}^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}^h} = \left[\frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{(U_y)_{n+1,m}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n-1,m}^k}{\Delta_X^2} + \frac{(U_y)_{n,m+1}^k - 2(U_y)_{n,m}^k + (U_y)_{n,m-1}^k}{\Delta_Y^2} \right) - \frac{(U_y)_{n,m}^{k+1} - (U_y)_{n,m}^k}{\Delta_T} \right]_{S_{ch}, S_{exp}^h}$$

(для компонент швидкості тут треба використовувати представлення (27)).

Наведені співвідношення дають можливість вираховувати значення всіх членів рівнянь (27), (31)–(33) на границі розрахункової області.

Дискретні аналоги безрозмірних початкових умов та їх застосування до рівнянь (27), (31)–(33)

Дискретні аналоги безрозмірних початкових умов (24) мають такий вигляд:

$$\Psi_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad \Omega_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0, \quad P_{n,m}^k \Big|_{k=0} = 0.$$

Вони дозволяють визначати значення всіх членів рівнянь (27), (31)–(33) у початковий момент часу в усій розрахунковій області.

Розв’язування рівнянь (27), (31)–(33)

Аналіз алгебричних рівнянь (31), (32) показує, що

- через нелінійність членів правої частини (31) (які залежать від добутків $\Psi\Omega$ у відповідних точках просторово-часової решітки (25), (26)), це рівняння є нелінійним;
- рівняння (31) і (32) є зв’язаними.

Проте при детальнішому вивченні рівняння (31) неважко помітити, що всі доданки у його правій частині є відомими величинами (бо вони визначаються на попередньому часовому етапі $T = T_k$, а в початковий момент часу вони задані

$$\Psi_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)\Psi_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} \left(\Psi_{n+1,m}^k + \Psi_{n-1,m}^k + \beta^2\Psi_{n,m+1}^k + \beta^2\Psi_{n,m-1}^k + \Delta_X^2\Omega_{n,m}^k \right) \quad (34)$$

(тут γ — параметр релаксації ($1 < \gamma \leq 2$), а $\beta = \Delta_X / \Delta_Y$ — відношення кроків решітки (25)).

Як і у випадку співвідношення (31), у схемі (34) всі величини справа відомі. А тому значення $\Psi_{n,m}^{k+1}$ у відповідних вузлах сітки (25), (26) визначаються шляхом виконання операцій, передбачених схемою (34).

Далі вираховані значення функції Ψ дають можливість знайти (на основі (27)) відповідні значення компонент швидкості U_x, U_y і підставити їх у праву частину системи рівнянь (33). Після цього для розв’язування СЛАР (33) (яка відрізняється від СЛАР (32) лише виглядом правої частини) застосовується той же ітераційний метод послідовної верхньої релаксації:

$$P_{n,m}^{k+1} = (1-\gamma)P_{n,m}^k + \frac{\gamma}{2(1+\beta^2)} \left(P_{n+1,m}^k + P_{n-1,m}^k + \beta^2P_{n,m+1}^k + \beta^2P_{n,m-1}^k + \Delta_X^2S_{n,m}^k \right), \quad (35)$$

$$S_{n,m}^k = \left[\left(\frac{\partial U_x}{\partial X} \right)^2 + 2 \frac{\partial U_x}{\partial Y} \frac{\partial U_y}{\partial X} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial Y} \right)^2 \right]_{n,m}^k.$$

(див. вище)). Відтак (31) є не рівнянням, а чисельною схемою для безпосереднього визначення значень завихореності $\Omega_{n,m}^{k+1}$ на основі відомої правої частини. Система ж (31), (32) відповідно не є системою зв’язаних алгебраїчних рівнянь.

Наявність одержаних на основі схеми (31) значень Ω в усіх вузлах сітки інтегрування (25), (26) дозволяє перейти до розв’язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) (32) з відомою правою частиною.

Для розв’язування СЛАР в літературі застосовуються прямі та ітераційні методи. Перші з них використовуються у разі СЛАР невеликої розмірності і дають добрі результати. Якщо системи рівнянь мають велику розмірність, а їхні матриці є ще й розрідженими, то в цьому разі прямі методи потребують великих об’ємів пам’яті комп’ютера і приводять до величезних затрат часу. Відтак їхнє використання тут недоцільне. Натомість для ітераційних методів при роботі зі СЛАР великої розмірності необхідно набагато менше комп’ютерної пам’яті і часу. При цьому вони зберігають розрідженість матриць СЛАР (у разі такої властивості перших) і дають задовільні результати [1, с. 66].

Беручи до уваги щойно зазначене, а також розмір та ступінь розрідженості матриці системи рівнянь (32) (яка є блочно-трюхдіагональною), для її розв’язування у даній роботі вибирається ітераційний метод послідовної верхньої релаксації [7, с. 100–101; 8, с. 182–187; 9, с. 59]. Цей метод має другий порядок точності, а його чисельна схема для системи (32) має такий вигляд:

Як і в схемах (31) та (34), у схемі (35) всі величини справа є відомими. Це дозволяє визначати значення тиску $P_{n,m}^{k+1}$ у відповідних вузлах сітки інтегрування (25), (26) шляхом виконання арифметичних операцій, вказаних у схемі (35).

Висновки

1. Розроблено чисельний метод розв'язування задачі у змінних функція течії-завихореність-тиск про рух рідини у нескінченному прямому плоскому жорсткостінному каналі з локальним жорстким осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має перший порядок точності по часовій та другий порядок точності по просторових координатах.

2. У розробленому методі сформульована задача розв'язується шляхом а) введення функції течії і завихореності та відповідного переходу від змінних швидкість-тиск до змінних функція течії-завихореність-тиск, б) подальшого обезрозмірювання одержаних у результаті такого переходу співвідношень, в) вибору розрахункової області і відповідної просторово-часової обчислювальної сітки, г) дискретизації безрозмірних співвідношень у відповідних вузлах цієї сітки та подальшого розв'язування алгебраїчних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації.

3. При виконанні вказаної дискретизації часова її частина проводиться на основі односторонньої різниці вперед, а просторова – на основі односторонніх різниць проти потоку (для конвективного члена рівняння переносу завихореності) та п'ятиточкових шаблонів (для дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по відповідних координатах.

4. Для розв'язування лінійних алгебричних рівнянь для функції течії і тиску використовується ітераційний метод послідовної верхньої релаксації. Одержане ж після

дискретизації алгебраїчне співвідношення для завихореності не потребує застосування ніякого методу розв'язування, оскільки вже є розрахунковою схемою для безпосереднього визначення значень завихореності на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Борисюк А. О.** Метод розв'язування задачі про течію в каналі з осесиметричним прямокутним розширенням. *Наукоємні технології*. 2019. Т. 41. № 1. С. 59–68. DOI: 10.18372/2310-5461.41.13530. (укр.)
2. **Lasheras J. C.** The biomechanics of arterial aneurysms. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2007. No. 39. P. 293-319. DOI: 10.1146/annurev.fluid.39.050905.110128 (eng.)
3. **Borisyuk A. O.** Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. Vol. 26. No. 4. P. 658–674. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.03.005 (eng.)
4. **Борисюк А. О.** Метод розв'язування задачі про течію в каналі з двома осесиметричними звуженнями. *Наукоємні технології*. 2018. Т. 38. № 2. С. 270–278. DOI: 10.18372/2310-5461.38.12825. (укр.)
5. **Малюга В. С.** Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения. *Прикладна гідромеханіка*. 2010. Т. 12. № 4. С. 45–62 (рус.)
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа, 7-е изд. Москва: Дрофа, 2003. 840 с. (рус.)
7. **Ferziger J. H., Perić M.** Computational methods for fluid dynamics, 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. 424 p. (eng.)
8. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика, Москва: Мир, 1980. 616 с. (рус.)
9. **Шалденко А. В., Гуржий А. А.** Анализ процессов теплопереноса в прямолинейном канале со вставками при малых числах Рейнольдса. *Прикладна гідромеханіка*. 2015. Т. 17. № 3. С. 55–66 (рус.)

Борисюк А. О.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ПРЯМОКУТНИМ РОЗШИРЕННЯМ У ЗМІННИХ ФУНКЦІЯ ТЕЧІЇ-ЗАВИХОРОНІСТЬ

Розроблено чисельний метод розв'язування задачі у змінних функція течії-завихореність-тиск про рух рідини у нескінченному прямому плоскому жорсткостінному каналі з локальним жорстким осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має перший порядок точності по часовій та другий порядок точності по просторових координатах. У розробленому методі сформульована задача розв'язується шляхом а) введення функції течії і завихореності та відповідного переходу від змінних швидкість-тиск до змінних функція течії-завихореність-тиск, б) подальшого обезрозмірювання одержаних у результаті такого переходу співвідношень, в) вибору розрахункової області і відповідної просторово-часової обчислювальної сітки з малими сталими кроками по часовій та просторових координатах, г) дискретизації вказаних безрозмірних співвідношень у відповідних вузлах вибраної сітки та подальшого розв'язування алгебричних рівнянь, одержаних внаслідок зазначеної дискретизації. При виконанні дискретизації часова її частина проводиться на

основі односторонньої різниці вперед, а просторова – на основі односторонніх різниць проти потоку (для конвективного члена нелінійного рівняння переносу завихреності) та п'ятиточкових шаблонів (для дифузійного члена зазначеного рівняння та рівнянь Пуассона для функції течії і тиску) по відповідних координатах. Для розв'язування лінійних алгебраїчних рівнянь для функції течії і тиску (які відрізняються одне від одного лише виглядом відомої правої частини) використовується ітераційний метод послідовної верхньої релаксації. Одержане ж після дискретизації алгебраїчне співвідношення для завихреності не потребує застосування ніякого методу розв'язування, оскільки вже є розрахунковою схемою для безпосереднього визначення значень завихреності на основі відомих значень відповідних величин, знайдених у попередній момент часу (у початковий же момент часу значення всіх величин є заданими).

Ключові слова: течія; канал; розширення; метод.

Borysyuk A. O.

A METHOD TO SOLVE A PROBLEM OF FLOW IN A CHANNEL WITH RECTANGULAR EXPANSION IN THE VARIABLES STREAM FUNCTION-VORTICITY

A numerical method in the variables stream function-vorticity is developed to solve a problem of fluid motion in an infinite straight flat rigid-walled channel with a local rigid axisymmetric expansion of rectangular shape. The method has the first order of accuracy in a temporal and the second order of accuracy in spatial coordinates. In the developed method, the formulated problem is solved by means of (a) introducing the stream function and the vorticity, and the corresponding transition from the variables velocity-pressure to the variables stream function-vorticity-pressure, (b) subsequent non-dimensionalizing the relationships obtained on the basis of that transition, (c) choice of both the computational domain and the corresponding spatial and temporal integration mesh, having small constant steps in the temporal and spatial coordinates, (d) discretization of the noted non-dimensional relationships in the appropriate nodes of the chosen mesh and subsequent solving the algebraic equations obtained with the use of the indicated discretization. In making the discretization, its temporal part is carried out on the basis of the two-point upward differencing scheme, whereas the spatial one is based on the two-point adverse flow differencing schemes (for the convective term of the non-linear vorticity equation) and the fifth-point differencing schemes (for the diffusive term of the noted equation and the Poisson's equations for the stream function and the pressure) for the corresponding coordinates. The iterative method of successive over relaxation is applied to solve the linear algebraic equations for the stream function and the pressure (the only difference between these equations is in their right parts, which are known). As for the algebraic relationship for the vorticity (that was obtained after performing the noted discretization), it does not require application of any method for its solution, because actually it is a computational scheme to find immediately the vorticity on the basis of the known values of the corresponding magnitudes found at the previous time step (at the initial time, the values of all the magnitudes are prescribed).

Keywords: flow; channel; expansion; method.

Борисюк А. А.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В КАНАЛЕ С ПРЯМОУГОЛЬНЫМ РАСШИРЕНИЕМ В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЯ ТОКА-ЗАВИХРЕННОСТЬ

Разработан численный метод решения задачи в переменных функция тока-завихренность-давление о движении жидкости в бесконечном прямом плоском жесткостенном канале с локальным жестким осесимметричным расширением прямоугольной формы. Этот метод имеет первый порядок точности по временной и второй порядок точности по пространственным координатам. В разработанном методе сформулированная задача решается путем а) введения функции тока и завихренности и соответствующего перехода от переменных скорость-давление к переменным функция тока-завихренность-давление, б) дальнейшего обезразмеривания полученных в результате такого перехода соотношений, в) выбора расчетной области и соответствующей пространственно-временной вычислительной сетки с малыми постоянными шагами по временной и пространственным координатам, г) дискретизации указанных безразмерных соотношений в соответствующих узлах выбранной сетки и дальнейшего решения алгебраических уравнений, полученных в следствии указанной дискретизации. При выполнении дискретизации временная ее часть проводится на основании односторонней разницы вперед, а пространственная – на основании односторонних разниц против потока (для конвективного члена нелинейного уравнения переноса завихренности) и пятиточечных шаблонов (для диффузионного члена указанного уравнения и уравнений Пуассона для функции тока и давления) по соответствующих координатах. Для решения линейных алгебраических уравнений для функции тока и давления (которые отличаются друг от друга лишь видом известной правой части) используется итерационный метод последовательной верхней релаксации. Полученное же после дискретизации алгебраическое соотношение для завихренности не требует применения никакого метода решения, поскольку уже является расчетной схемой для непосредственного определения значений завихренности на основании известных значений соответствующих величин, найденных в предыдущий момент времени (в начальный же момент времени значения всех величин являются заданными).

Ключевые слова: течение; канал; расширение; метод.

Стаття надійшла до редакції 15.05.2019 р.

Прийнято до друку 18.06.2019 р.