

DOI: 10.18372/2310-5461.41.13530

УДК 532.542(045)

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
 Інститут гідромеханіки НАН України
 orcid.org/0000-0002-3878-3915
 e-mail: aobor@ukr.net

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ПРЯМОКУТНИМ РОЗШИРЕННЯМ

Вступ

Дослідження течій у каналах є актуальним для нафтогазової та хімічної промисловостей, комунального господарства, архітектури, медицини тощо. Значний інтерес тут пов'язаний з вивченням поведінки течій у каналах з локальними розширеннями. Пояснюється він тим, що в околах таких неоднорідностей геометрії каналів змінюються структура і характер течії, її локальні та інтегральні характеристики тощо. А це може приводити до відповідних наслідків не лише поблизу, але й за межами зазначених неоднорідностей [1, с. 293–295; 2, с. 658–659; 3, с. 157].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Як показує аналіз наукової літератури, дослідженню течій у каналах із локальними розширеннями приділялася значна увага. У таких дослідженнях канали та розширення вважалися жорсткими, а для останніх вибиралися найпростіші форми. Течії ж на вході у розширення (базові течії) були стаціонарними, осесиметричними і ламінарними, а рідини вважалися однорідними, нестисливими і ньютонівськими (у даній статті не розглядаються інші типи каналів, розширень, рідин та їхніх течій, оскільки вони значно рідше вивчалися порівняно із зазначеними). Це давало можливість, з одного боку, в рамках вибраних моделей та з прийнятною для потреб практики точністю з'ясувати вплив основних параметрів каналу, його розширення і

базового потоку на течію як в околі розширення, так і за його межами, а з іншого — значно спростувати розв'язування відповідних задач [4, с. 270; 5, с. 45–46].

З-поміж одержаних тут результатів велике значення мають чисельні методи дослідження течій в околах нерегулярностей геометрії каналів. Зокрема, в праці [4, с. 272–277] було запропоновано метод розв'язування задачі про рух рідини в каналі з двома звуженнями. Він дозволяє вивчати течію у змінних швидкості—тиск і має другий порядок точності. У даній статті цей метод розвивається на випадок течії у такому ж каналі, але вже з локальним розширенням.

Постановка задачі

Розглядається прямий плоский нерухомий жорсткостінний канал безрозмірної ширини 1 з локальним осесиметричним жорстким розширенням прямокутної форми, безрозмірні ширина та довжина якого дорівнюють відповідно D та L (рис. 1). У каналі тече в'язка нестислива однорідна ньютонівська рідина масової густини ρ і кінематичної в'язкості ν . Її течія перед входом у розширення (базова течія) є стаціонарною ламінарною, і характеризується безрозмірною об'ємною витратою на одиницю глибини каналу Q . Необхідно дослідити течію в околі розширення, а також встановити зв'язок її локальних та інтегральних характеристик з параметрами базової течії, каналу і розширення.

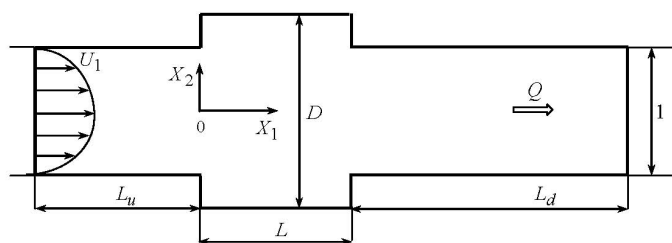


Рис. 1. Геометрія задачі та розрахункова область

Сформульована задача описується безрозмірними двовимірними рівняннями Нав'є–Стокса:

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \quad (1)$$

і нерозривності:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0. \quad (2)$$

Граничними умовами є рівність нулеві швидкості течії на стінці каналу S_{ch} і на поверхні розширення S_{exp} :

$$U_i|_{S_{ch}} = 0, \quad U_i|_{S_{exp}} = 0. \quad (3)$$

Також, внаслідок збереження маси в каналі, об'ємна витрата рідини Q має бути однаковою в усіх його поперечних перерізах:

$$\partial Q / \partial X_1 = 0, \quad Q = 1. \quad (4)$$

Крім того, за межами збуреної розширенням течії (тобто перед і достатньо далеко за ним) задається параболічний профіль швидкості (внаслідок ламінарного характеру базового потоку):

$$U_1|_{X_1=-L_u, L+L_d} = 1.5(1-4X_2^2), \quad U_2|_{X_1=-L_u, L+L_d} = 0. \quad (5)$$

Що стосується тиску P , то вважається, що перед ($P_u = P|_{X_1=-L_u}$) і достатньо далеко за ($P_d = P|_{X_1=L+L_d}$) розширенням він є сталим, а його відповідний перепад $\Delta P = P_u - P_d = \text{const} > 0$ — таким, що відповідає заданому ламінарному характеру базового потоку. При цьому без втрати загальності величина P_d покладається рівною нулю ($P_d = 0$), а тиск P_u (який тепер дорівнює перепаду ΔP), як і тиск в усьому каналі, визначається у процесі розв'язування задачі (вибираючи значення P_d , завжди можна вибрати відповідне значення P_u так, щоби перепад тиску ΔP , який визначає рух рідини в каналі, залишався незмінним). На нерухомих же жорстких поверхнях каналу і розширення нормальний градієнт тиску є нульовим:

$$(\partial P / \partial \mathbf{n})_{S_{ch}} = 0, \quad (\partial P / \partial \mathbf{n})_{S_{exp}} = 0. \quad (6)$$

Початкові ж умови полягають у відсутності руху рідини в каналі в момент часу $T = 0$ [4, с. 271]:

$$U_i|_{T=0} = 0; \quad \Delta P|_{T=0} = 0, \quad P_d|_{T=0} = 0 \Rightarrow P|_{T=0} = 0. \quad (7)$$

У формулах (1)–(7) X_1, X_2, X_3 є безрозмірними прямокутними декартовими координатами, вибраними так, що вісь X_1 направлена по осі каналу вниз за течією (рис. 1), а вісь X_3 — перпендикулярно до площини $X_1 X_2$ на нас; T — безрозмірним часом; U_i — безрозмірними компонентами локальної миттєвої швидкості рідини у напрямках X_i ; Q — безрозмірною об'ємною витратою рідини; $\text{Re} = U_a D / \nu$ — числом Рейнольдса осередненої по поперечному перерізу каналу базової течії; U_a — її швидкість; \mathbf{n} — зовнішньою одиничною нормаллю до відповідної поверхні; L_u та L_d — безрозмірними відстанями від розширення до лівої та правої меж збуреної розширенням течії відповідно; а також передбачається підсумовування по індексах, що повторюються. Що стосується вибраних у формулах (1)–(7) масштабів, то для довжини — це ширина каналу D_0 , для швидкості

— U_a , для об'ємної витрати — $U_a D_0$, для часу — D_0 / U_a , а для тиску — ρU_a^2 .

Метод розв'язування

Розв'язування сформульованої у попередньому розділі задачі складається з а) вибору розрахункової області та її розбиття на елементарні об'єми; б) переходу до інтегральних аналогів наведених у попередньому розділі співвідношень шляхом інтегрування останніх по зазначених об'ємах; в) дискретизації одержаних інтегральних співвідношень; г) розв'язування одержаних внаслідок дискретизації алгебричних рівнянь. Розглянемо кожен з цих етапів.

Розрахункова область

Область, у якій розшукується розв'язок задачі, зображено на рис. 1. Вона обмежується двома парами перерізів каналу $X_1 = -L_u$, $X_1 = L + L_d$ та $X_3 = X_{3*}$, $X_3 = X_{3*} + dX_3$ (де X_{3*} — довільне значення координати X_3 , а $dX_3 \ll 1$). При цьому ліва межа розрахункової області $X_1 = -L_u$ вибирається там, де базова течія ще незбурена розширенням, а права $X_1 = L + L_d$ — де збурення течії вже зникають, і вона стає такою, якою була при $X_1 = -L_u$. Значення ж відстаней L_u та L_d для розглядуваних у даній статті значень швидкості базової течії не повинні бути меншими від 0.5 та 12 відповідно [4, с. 272].

Вибрана область інтегрування розбивається на елементарні об'єми V_{nm} перерізами $X_1 = X_{1n}$ ($X_{1n} = X_{1(n-1)} + dX_1$, $dX_1 \ll 1$) та $X_2 = X_{2m}$ ($X_{2m} = X_{2(m-1)} + dX_2$, $dX_2 \ll 1$) (рис. 2). При цьому, з метою забезпечення гладкості профілю швидкості у поперечному перерізі каналу, у розширенні та при наближенні до стінки каналу перерізи $X_1 = X_{1n}$ та $X_2 = X_{2m}$ вибираються ближче один до одного, а при віддаленні від цих регіонів — далі.

Інтегральні рівняння та їх дискретні аналоги

Інтегральні аналоги рівнянь (1), (2) одержуються шляхом інтегрування останніх по об'ємах V_{nm} (при виконанні такої операції в кожному об'ємі V_{nm} виконуються закони збереження). Це дає

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_{V_{nm}} U_i dV + \iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \quad (8)$$

$$= - \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dV + \frac{1}{\text{Re}} \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) dV; \quad (9)$$

$$\iiint_{V_{nm}} (\partial U_i / \partial X_i) dV = 0.$$

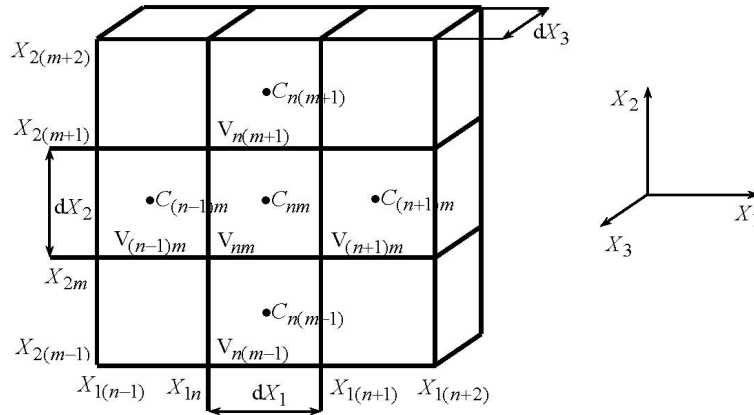


Рис. 2. Схема розбиття розрахункової області на елементарні об’єми

Застосування (де можливо) теореми Гауса–Остроградського:

$$\iiint_{V_{nm}} \nabla \cdot \mathbf{g} dV = \iint_{S_{nm}} \mathbf{g} \cdot \mathbf{ndS}, \quad \iiint_{V_{nm}} \nabla \gamma dV = \iint_{S_{nm}} \gamma \mathbf{ndS} \quad (10)$$

до членів рівнянь (8), (9) та/або розкладання, де потрібно, їхніх підінтегральних функцій (які для зручності позначимо через $\mathbf{f}(\mathbf{r})$) в ряди Тейлора в околі центру мас C_{nm} об’єму V_{nm} (внаслідок однорідності рідини в каналі, центр мас об’єму V_{nm} співпадає з його геометричним центром; аналогічною є ситуація і з центрами мас бічних граней об’єму V_{nm}):

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) + O((\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}})^2),$$

$$\mathbf{r}_{c_{nm}} = \iiint_{V_{nm}} \mathbf{r} dV / |V_{nm}|, \quad \mathbf{r} \in V_{nm},$$

$$\mathbf{r} = X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_{c_{nm}} = X_{ic_{nm}} \mathbf{e}_i, \quad (11)$$

$$X_{1c_{nm}} = X_{1n} + dX_1 / 2, \quad X_{2c_{nm}} = X_{2m} + dX_2 / 2,$$

$$X_{3c_{nm}} = X_{3*} + dX_3 / 2,$$

подальше використання лише перших двох членів цих рядів:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) \quad (12)$$

і відповідна дискретизація похідних за часом та по координатах, а також використання (де потрібно) TVD-схем дозволяє (з точністю до величин другого порядку малості) значно спростити співвідношення (8) і (9), перейшовши зрештою до їхніх дискретних аналогів (тут \mathbf{r} і $\mathbf{r}_{c_{nm}}$ — радіус-вектори відповідно довільної точки регіону V_{nm} і його центру мас C_{nm} , ∇ — градієнт, S_{nm} та $|V_{nm}| = dX_1 dX_2 dX_3$ — бічна поверхня та об’єм регіону V_{nm} , крапка вказує на скалярне множення відповідних величин, а \mathbf{e}_i — орт осі X_i).

Дійсно, врахування представлення (12) підінтегральної функції U_i першого доданку у (8):

$$U_i(\mathbf{r}) = U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \nabla(U_i)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}),$$

а також використання інтеграла

$$\iiint_{V_{nm}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) dV = 0 \quad (13)$$

(який впливає з (11)) призводить до суттєвих спрощень:

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_{V_{nm}} U_i dV = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}, T)}{\partial T} |V_{nm}|. \quad (14)$$

Далі у виразі (14) проводиться дискретизація похідної на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад [4, с. 273]:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}, T)}{\partial T} = \frac{1.5\mathbf{f}_{c_{nm}}^k - 2\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-1} + 0.5\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-2}}{\Delta T}. \quad (15)$$

Тут ΔT — малий часовий крок, $\mathbf{f}_{c_{nm}}^k$ — значення функції \mathbf{f} у точці C_{nm} в момент часу $T = k\Delta T$, а її значення у цій самій точці у попередні моменти часу $\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-1}$ та $\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-2}$ є відомими (вони визначаються на попередніх етапах, починаючи з початкового моменту часу (коли задаються значення всіх параметрів задачі)). Сама ж схема (15) має другий порядок точності, і застосовується у разі, якщо сітка розбиття (рис. 2) є нерухомою (це забезпечує нерухомість центрів мас відповідних об’ємів) [4, с. 273].

Що стосується другого (конвективного) члена рівняння (8), то спочатку (на основі (2)) його підінтегральна функція переписується в еквівалентному вигляді:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} = \nabla \cdot (\mathbf{U} U_i), \quad \mathbf{U} = U_i \mathbf{e}_i, \quad U_3 = 0.$$

Після цього до неї застосовується перша форма теореми Гауса–Остроградського (10):

$$\iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \iiint_{V_{nm}} (\nabla \cdot (\mathbf{U} U_i)) dV = \iint_{S_{nm}} (\mathbf{U} U_i) \cdot \mathbf{ndS}. \quad (16)$$

Оскільки бічна поверхня S_{nm} об'єму V_{nm} складається з шести плоских граней $S_{nm}^{(i)}$ із зовнішніми одиничними нормальми \mathbf{n}_i ($i=1, \dots, 6$; $\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1, \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_1, \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_2, \mathbf{n}_4 = -\mathbf{e}_2, \mathbf{n}_5 = \mathbf{e}_3, \mathbf{n}_6 = -\mathbf{e}_3$; рис. 3), а підінтегральна функція у поверхневому інтегралі в (16) може бути представлена (з точністю до величин другого порядку малості) лінійною частиною її ряду Тейлора в околах центрів мас $C_{nm}^{(i)}$ граней $S_{nm}^{(i)}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(i)}}) + \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(i)}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}^{(i)}}),$$

$$\mathbf{r}_{c_{nm}^{(i)}} = \iint_{S_{nm}^{(i)}} \mathbf{r} dS / |S_{nm}^{(i)}|, \quad \mathbf{r} = X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_{c_{nm}^{(i)}} = X_{jc_{nm}^{(i)}} \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (17)$$

то це дозволяє значно спростити співвідношення (16):

$$\iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} (\mathbf{U} U_i) \cdot \mathbf{n}_j dS =$$

$$= \sum_{j=1}^4 (\mathbf{U} U_i)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}} \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)} U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}), \quad (18)$$

(у (18) $|S_{nm}^{(j)}|$ є площею грані $S_{nm}^{(j)}$ (рис. 3), а

$$F_{nm}^{(j)} = \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (19)$$

-потокотом середовища крізь грань $S_{nm}^{(j)}$; крім того, тут було використано подібний до (13) інтеграл

$$\iint_{S_{nm}^{(j)}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) dS = 0, \quad \text{який впливає з (17)). Далі у}$$

виразах (18), (19) значення функції U_i у центрах мас $C_{nm}^{(j)}$ граней $S_{nm}^{(j)}$ визначаються через значення цієї функції у центрах мас об'ємів, які мають спільні грані $S_{nm}^{(j)}$.

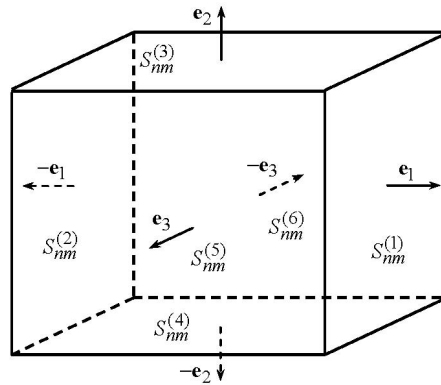


Рис. 3. Елементарний об'єм V_{nm} , його бічні грані $S_{nm}^{(i)}$ та їхні зовнішні нормалі \mathbf{n}_i ($i = 1, \dots, 6$)

Для цього використовується наступна TVD-схема, яка забезпечує достатню точність (вищу від першого порядку) та обмеженість розв'язку [4, с. 274]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) = \mathbf{f}_1^{(j)} + \Phi(\mathbf{f}_2^{(j)} - \mathbf{f}_1^{(j)}). \quad (20)$$

Тут $\mathbf{f}_1^{(j)}$ є значенням функції \mathbf{f} у точці $C_{nm}^{(j)}$, знайденим на основі протипоточної схеми першого порядку:

$$\mathbf{f}_1^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}), & F_{nm}^{(j)} \geq 0, \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_j}), & F_{nm}^{(j)} < 0, \end{cases}$$

т. C_j — центром мас об'єму, який має спільну грань $S_{nm}^{(j)}$ з об'ємом V_{nm} (рис. 2 і 3): $C_1 = C_{(n+1)m}$, $C_2 = C_{(n-1)m}$, $C_3 = C_{n(m+1)}$, $C_4 = C_{n(m-1)}$; $\mathbf{f}_2^{(j)}$ — значенням функції \mathbf{f} у точці $C_{nm}^{(j)}$, вирахуваним за допомогою центрально-різницевої схеми другого порядку: $\mathbf{f}_2^{(j)} = \alpha_j \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + (1 - \alpha_j) \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_j})$

з коефіцієнтом $\alpha_j = \frac{|\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}} - \mathbf{r}_{c_j}|}{|\mathbf{r}_{c_{nm}} - \mathbf{r}_{c_j}|}$; Φ — нелінійним обмежувачем потоку:

$$\Phi(\eta_j) = \max\left(0, \min\left(\frac{2}{\beta} \eta_j, 1\right)\right),$$

$$\eta_j = \left| \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) - \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) \right| / \left| \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_j}) - \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) \right|,$$

а параметр β покладається рівним 0,5 (загалом β може вибиратися у межах $0 < \beta \leq 1$; при цьому зменшення β відповідає більшій точності та меншій стійкості розрахунку; і навпаки, зі збільшенням β зменшується точність розрахунку, але зростає його стійкість [6, с. 54]).

Спрощення третього (градієнтного) члена рівняння (8) ґрунтується на застосуванні до нього другої форми теореми Гауса–Остроградського (10) і подальшому виконанні з поверхневим інтегралом операцій, які дозволили перейти від (16) до (18). Це дає:

$$\iiint_{V_{nm}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dV = \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} P n_{ji} dS = \sum_{j=1}^4 P(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (21)$$

Після цього у (21) значення тиску P у точках $C_{nm}^{(j)}$ визначаються на основі схеми (20).

І нарешті четвертий (дифузійний) член рівняння (8) допускає спрощення після представлення його підінтегральної функції у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) = \nabla^2 U_i = \nabla \cdot \nabla U_i,$$

подальшого застосування першої форми теореми (10) і виконання з поверхневим інтегралом дій, які застосовувалися при переході від (16) до (18). У результаті одержуємо:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) dV &= \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} \nabla U_i \cdot \mathbf{n}_j dS = \\ &= \sum_{j=1}^4 \nabla U_i \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}} \cdot \mathbf{n}_j \Big|_{S_{nm}^{(j)}}. \end{aligned} \quad (22)$$

Після цього у виразі (22) проводиться така дискретизація просторових похідних $\nabla U_i \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}}$:

$$\begin{aligned} \nabla f \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}} &= \mathbf{e}_i (\partial f / \partial X_i) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}}, \quad (23) \\ (\partial f / \partial X_1) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(1)}}} &= (f(\mathbf{r}_{c_{(n+1)m}}) - f(\mathbf{r}_{c_{nm}})) / dX_1, \\ (\partial f / \partial X_1) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(2)}}} &= (f(\mathbf{r}_{c_{nm}}) - f(\mathbf{r}_{c_{(n-1)m}})) / dX_1, \\ (\partial f / \partial X_2) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(3)}}} &= (f(\mathbf{r}_{c_{n(m+1)}}) - f(\mathbf{r}_{c_{nm}})) / dX_2, \\ (\partial f / \partial X_2) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(4)}}} &= (f(\mathbf{r}_{c_{nm}}) - f(\mathbf{r}_{c_{n(m-1)}})) / dX_2. \end{aligned}$$

Наявність (14), (15), (18), (20)–(23) дозволяє записати дискретну форму рівняння (8):

$$\begin{aligned} \frac{1,5U_{ic_{nm}}^k - 2U_{ic_{nm}}^{k-1} + 0,5U_{ic_{nm}}^{k-2}}{\Delta T} |V_{nm}| + \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} U_{ic_{nm}^{(j)}}^k - \\ - \frac{1}{\text{Re}} \sum_{j=1}^4 \nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k \cdot \mathbf{n}_j \Big|_{S_{nm}^{(j)}} = - \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} \Big|_{S_{nm}^{(j)}}. \end{aligned} \quad (24)$$

У рівнянні (24) $F_{nm}^{(j)k}$ є потоком рідини крізь грань $S_{nm}^{(j)}$ в момент $T = k\Delta T$, $P_{c_{nm}^{(j)}}^k$ — тиском у т. $C_{nm}^{(j)}$ в момент $k\Delta T$, швидкості $U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ вираховують за схемою (20), а для $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ використовується схема (23). Права частина рівняння (24) може бути представлена і в такому вигляді:

$$-(\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^k |V_{nm}|. \quad (25)$$

Що стосується дискретної форми рівняння (9), то вона виглядає так:

$$\sum_{j=1}^4 U_{c_{nm}^{(j)}}^k \cdot \mathbf{n}_j \Big|_{S_{nm}^{(j)}} = \sum_{j=1}^4 U_{ic_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} \Big|_{S_{nm}^{(j)}} = \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} = 0. \quad (26)$$

Дискретні аналоги граничних умов та їх застосування до рівнянь (24), (26)

Дискретні аналоги граничних умов для компонент швидкості та об'ємної витрати зі співвідношень (3)–(5) мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_1^k \Big|_{X_1=-L_u, L+L_d} &= 1,5(1-4X_2^2), \\ U_2^k \Big|_{X_1=-L_u, L+L_d} &= 0, \quad (27) \\ U_i^k \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} &= 0, \partial Q^k / \partial X_1 = 0, Q^k = 1, L_u \geq 0,5, \\ &L_d \geq 12, i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Вони дозволяють знайти значення потоку $F_{nm}^{(j)k}$ та градієнтів $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ на границі розрахункової області у рівняннях (24), (26). Дійсно, з виразів (19) і (27) випливає, що

$$F_{nm}^{(j)k} \Big|_{S_{ch}, S_{exp}} = \left(U_{ic_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} \Big|_{S_{nm}^{(j)}} \right)_{S_{ch}, S_{exp}} = 0.$$

На вході ж та виході зазначеної області (яких можуть торкатися відповідно лише грані $S_{nm}^{(2)}$ та $S_{nm}^{(1)}$ об'єму V_{nm} (рис. 1 і 3)) маємо:

$$\begin{aligned} F_{nm}^{(2)k} \Big|_{X_1=-L_u} &= -1,5(1-4X_2^2) dX_2 dX_3, \\ F_{nm}^{(1)k} \Big|_{X_1=L+L_d} &= 1,5(1-4X_2^2) dX_2 dX_3. \end{aligned}$$

Що стосується градієнтів швидкостей $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$, то на верхній та нижній стінках каналу (яких можуть торкатися відповідно лише грані $S_{nm}^{(3)}$ та $S_{nm}^{(4)}$) вони визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \nabla U_{ic_{nm}^{(3)}}^k \Big|_{X_2=1/2} &= -\mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \\ \nabla U_{ic_{nm}^{(4)}}^k \Big|_{X_2=-1/2} &= \mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \\ -L_u \leq X_1 \leq 0, L \leq X_1 \leq L+L_d. \end{aligned}$$

На вході та виході розрахункової області градієнти $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ виглядають так:

$$\begin{aligned} \nabla U_{1c_{nm}^{(2)}}^k \Big|_{X_1=-L_u} &= -12X_2 \mathbf{e}_2, \\ \nabla U_{1c_{nm}^{(1)}}^k \Big|_{X_1=L+L_d} &= -12X_2 \mathbf{e}_2, \\ \nabla U_{2c_{nm}^{(2)}}^k \Big|_{X_1=-L_u} &= 0, \nabla U_{2c_{nm}^{(1)}}^k \Big|_{X_1=L+L_d} = 0. \end{aligned}$$

І нарешті на поверхні розширення величини $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \nabla U_{ic_{nm}^{(2)}}^k \Big|_{\substack{X_1=0, 1/2 \leq X_2 \leq D/2 \\ X_1=0, -D/2 \leq X_2 \leq -1/2}} &= \mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1, \\ \nabla U_{ic_{nm}^{(1)}}^k \Big|_{\substack{X_1=L, 1/2 \leq X_2 \leq D/2 \\ X_1=L, -D/2 \leq X_2 \leq -1/2}} &= -\mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1, \\ \nabla U_{ic_{nm}^{(3)}}^k \Big|_{0 \leq X_1 \leq L, X_2=D/2} &= -\mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \\ \nabla U_{ic_{nm}^{(4)}}^k \Big|_{0 \leq X_1 \leq L, X_2=-D/2} &= \mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2, \end{aligned}$$

(тут було враховано, що лівої сторони розширення може торкатися лише грань $S_{nm}^{(2)}$,

правої – лише грань $S_{nm}^{(1)}$, верхньої — грань $S_{nm}^{(3)}$, а нижньої – грань $S_{nm}^{(4)}$ об'єму V_{nm} .

Що стосується дискретних аналогів умов для тиску (6), то вони записуються наступним чином:

$$P_{c_{nm}^{(1)}}^k \Big|_{X_1=L+L_d} = 0, (\partial P^k / \partial X_2)_{S_{ch}} = 0, (\partial P^k / \partial \mathbf{n})_{S_{exp}} = 0.$$

Дискретні аналоги початкових умов та їх застосування до рівнянь (24), (26)

Дискретні аналоги початкових умов (7) виглядають так:

$$U_i^k \Big|_{k=0} = 0, P^k \Big|_{k=0} = 0. \quad (28)$$

За їх допомогою можна визначити значення відповідних членів рівнянь (24), (26) у початковий момент часу в розрахунковій області.

Так, з рівнянь (24) і (28) бачимо, що $F_{nm}^{(j)k=0} = 0$. Градієнти $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ у зазначений момент також дорівнюють нулю: $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^{k=0} = 0$.

Нульовими при $T = 0$ є і похідні у (25).

Розв'язування рівнянь (24), (26)

Система (24), (26) розв'язується чисельно. При її розв'язуванні виникають дві суттєві проблеми. Перша з них пов'язана з нелінійністю рівнянь (24), які використовуються для визначення швидкості (ця нелінійність виникає внаслідок залежності потоку $F_{nm}^{(j)k}$ від швидкості (див. (19))). Друга ж зумовлена відсутністю рівняння для тиску, котрий фігурує у правій частині (24) (у рамках моделі нестисливої рідини немає рівняння для тиску; і тому, за потреби, потрібно шукати спосіб його одержання).

Для вирішення першої проблеми у даній роботі на відповідних етапах проводиться модифікація потоку $F_{nm}^{(j)k}$ шляхом заміни в ньому шуканих компонент швидкості спочатку їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу, а потім — їхніми вже відомими попередніми наближеннями. Такі заміни дозволяють переходити від розв'язування зв'язаних систем нелінійних алгебричних рівнянь до відповідних незалежних лінійних. Друга ж проблема вирішується за допомогою введення тиску у рівняння (26) та подальшого узгодження швидкості і тиску при проведенні зазначеної модифікації потоку. Одержані при цьому значення швидкості і тиску уточнюються шляхом виконання відповідних операцій. Продемонструємо сказане. Якщо (24) розв'язати відносно швидкості, то одержимо:

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - \left(A_{ic_{nm}}^p / |V_{nm}| \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (29)$$

Рівняння (29), згідно з рівнянням (25), може бути записане і в такому вигляді:

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - A_{ic_{nm}}^p (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^k. \quad (30)$$

У співвідношеннях (29), (30) доданок $A_{ic_{nm}}^0$ є раціональною функцією, чисельник якої містить відомі значення швидкості $U_{ic_{nm}}^{k-1}$ та $U_{ic_{nm}}^{k-2}$, знайдені у попередні моменти часу у т. C_{nm} . Її ж знаменник включає у себе потік $F_{nm}^{(j)k}$, який лінійно залежить від невідомої швидкості (див. (19)). Dodanok $A_{ic_{nm}}^k$ також є раціональною функцією, чий знаменник відрізняється від знаменника $A_{ic_{nm}}^0$ лише множителем $|V_{nm}| / \Delta T$. У її ж чисельнику знаходяться як невідомі швидкості у т. C_j в момент часу $T = k\Delta T$, так і невідомі добутки $F_{nm}^{(j)k} U_{ic_j}^k$. Що стосується дробового множника $A_{ic_{nm}}^p$, то його чисельник складається лише з кроку ΔT , а знаменник співпадає зі знаменником функції $A_{ic_{nm}}^0$.

Зі співвідношень (29), (30) шляхом інтерполяції можна одержати рівняння для компонент швидкості у центрах мас $C_{nm}^{(j)}$ бічних граней $S_{nm}^{(j)}$ об'єму V_{nm} :

$$U_{ic_{nm}^{(j)}}^k = A_{ic_{nm}^{(j)}}^0 + A_{ic_{nm}^{(j)}}^k - A_{ic_{nm}^{(j)}}^p \left\{ \begin{aligned} & (1/|V_{nm}|) \sum_{r=1}^4 P_{c_{nm}^{(r)}}^k n_{ri} |S_{nm}^{(r)}|, \\ & (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}^{(j)}}^k, \end{aligned} \right. \quad j = 1, \dots, 4. \quad (31)$$

Якщо тепер підставити (31) у вираз (19), а той далі у (26), то одержимо шукане рівняння для тиску:

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}^{(j)}}^p (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}^{(j)}}^0 + A_{ic_{nm}^{(j)}}^k \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (32)$$

Надалі зв'язані рівняння (29)/(30), (32) використовуються для визначення компонент швидкості і тиску.

Послідовні наближення та узгодження швидкості і тиску

Система рівнянь (29)/(30), (32) розв'язується шляхом знаходження та узгодження між собою послідовних наближень швидкості і тиску. При цьому кількість наближень визначається задаваною точністю розв'язку. Детальний опис цієї процедури дається у [6, с. 51–63].

Перші наближення швидкості і тиску

Розв’язування системи рівнянь (29)/(30), (32) починається зі знаходження перших наближень швидкостей, які позначимо верхнім індексом зірочка (надалі перші наближення всіх шуканих величин позначаються верхнім індексом *, другі — верхнім індексом **, треті — верхнім індексом ***). Для цього відповідним чином модифікуються рівняння (29). У них замість невідомих значень тиску $P_{c_{nm}}^k$ вводяться його відомі значення $P_{c_{nm}}^{k-1}$, знайдені у попередній момент часу $T = (k-1)\Delta T$. Також у виразі (29) проводиться модифікація всіх функцій $A_{ic_{nm}}$ шляхом заміни у потокові $F_{nm}^{(j)k}$ (який до них входить) шуканих швидкостей їхніми значеннями, одержаними при $T = (k-1)\Delta T$. Це дає такі системи лінійних алгебричних рівнянь для перших наближень швидкостей у точках C_{nm} та C_j :

$$U_{ic_{nm}}^{k*} = A_{ic_{nm}}^{0l} + A_{ic_{nm}}^{kl} - \left(A_{ic_{nm}}^{pl} / |V_{nm}| \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k-1} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (33)$$

(тут $A_{ic_{nm}}^{..l}$ є модифікованими (відповідно до щойно зазначеного) функціями $A_{ic_{nm}}^{..}$; при цьому $A_{ic_{nm}}^{0l}$ та $A_{ic_{nm}}^{pl}$ не залежать від невідомих компонент швидкості, а $A_{ic_{nm}}^{kl}$ є лінійними функціями швидкостей $U_{ic_j}^{k*}$). Співвідношення (33) не залежать від шуканого тиску. Після знаходження із системи (33) (метод розв’язування цієї системи описується далі) перших наближень компонент швидкості, останні використовуються для знаходження значень операторів $A_{ic_{nm}}^{..(j)}$ і подальшої підстановки цих значень у (32). Це приводить до системи лінійних алгебричних рівнянь для першого наближення тиску у точках C_{nm} та C_j ($j = 1, \dots, 4$):

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p*} (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^{k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0**} + A_{ic_{nm}}^{k**} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (34)$$

(тут через $A_{ic_{nm}}^{..(j)}$ позначено вказані значення операторів $A_{ic_{nm}}^{..(j)}$). Система (34) не залежить від шуканих швидкостей.

Другі наближення швидкості і тиску

Тут проводиться подібна до описаної у попередньому підрозділі процедура. А саме,

знайдені з (34) перші наближення тиску підставляються в (29) замість $P_{c_{nm}}^k$. У функціях же $A_{ic_{nm}}$ в (29) модифікується потік $F_{nm}^{(j)k}$ шляхом заміни в ньому шуканих компонент швидкості їхніми першими наближеннями, одержаними з (33). Це призводить до двох систем лінійних алгебричних рівнянь для других наближень (або перших корекцій) компонент швидкості у точках C_{nm} та C_j :

$$U_{ic_{nm}}^{k**} = A_{ic_{nm}}^{0l*} + A_{ic_{nm}}^{kl*} - \left(A_{ic_{nm}}^{pl*} / |V_{nm}| \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (35)$$

(тут $A_{ic_{nm}}^{..l*}$ є функціями $A_{ic_{nm}}^{..}$, в яких проведена зазначена модифікація потоку; крім цього, $A_{ic_{nm}}^{0l*}$ та $A_{ic_{nm}}^{pl*}$ є незалежними від других наближень швидкості, а $A_{ic_{nm}}^{kl*}$ лінійно залежать від $U_{ic_j}^{k**}$). Співвідношення (35) не залежать від шуканого тиску.

Далі за допомогою знайдених з (35) других наближень швидкостей одержуються значення $A_{ic_{nm}}^{..(j)**}$ операторів $A_{ic_{nm}}^{..(j)}$. Підстановка цих значень у (32) замість $A_{ic_{nm}}^{..(j)}$ дозволяє записати систему лінійних алгебричних рівнянь для другого наближення (або першої корекції) тиску у точках C_{nm} та C_j :

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p**} (\partial P / \partial X_i)_{C_{nm}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0***} + A_{ic_{nm}}^{k***} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (36)$$

Система (36) не залежить від шуканої швидкості.

Треті наближення швидкості і тиску

Тут повторюється описаний у попередньому підрозділі цикл. А саме, в системі (29) замінюються невідомі значення тиску $P_{c_{nm}}^k$ їхніми другими наближеннями, одержаними після розв’язування системи (36). Крім того, в тій же системі (29) у потокові $F_{nm}^{(j)k}$ (який входить до всіх операторів $A_{ic_{nm}}^{..}$) невідомі швидкості замінюються їхніми другими наближеннями, знайдені з (35). Це дає систему лінійних алгебричних рівнянь для визначення третіх наближень (або другої корекції) компонент швидкості у точках C_{nm} та C_j :

$$U_{ic_{nm}}^{k***} = A_{ic_{nm}}^{0l**} + A_{ic_{nm}}^{kl**} - \left(A_{ic_{nm}}^{pl**} / |V_{nm}| \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (37)$$

(тут через $A_{ic_{nm}}^{l**}$ позначено оператори $A_{ic_{nm}}^{...}$ зі зміненим в них у зазначений спосіб потоком $F_{nm}^{(j)k}$; при цьому $A_{ic_{nm}}^{kl**}$ лінійно залежать від шуканих швидкостей $U_{ic_j}^{k***}$, а $A_{ic_{nm}}^{0l**}$ та $A_{ic_{nm}}^{pl**}$ — ні). Співвідношення (37) не залежать від шуканого тиску.

Після цього знайдені з (37) треті наближення швидкостей дозволяють знайти у співвідношеннях (32) значення операторів $A_{ic_{nm}}^{...}$, що дає систему лінійних алгебричних рівнянь для третього наближення (або другої корекції) тиску:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^{p***} (\partial P / \partial X_i)_{c_{nm}}^{k***} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \\ = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^{0***} + A_{ic_{nm}}^{k***} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \end{aligned} \quad (38)$$

(тут $A_{ic_{nm}}^{...}$ є вказаними значеннями операторів $A_{ic_{nm}}^{...}$). Система (38) не залежить від шуканих швидкостей.

Якщо треті наближення компонент швидкості і тиску не мають потрібної точності, то описаний цикл необхідно повторювати доти, доки зазначена точність не досягне заданого значення.

Розв'язування рівнянь для послідовних наближень швидкості і тиску

Наведені вище системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) для послідовних наближень швидкості і тиску можуть бути переписані у такому вигляді:

$$a_{c_{nm}}^k \xi_{c_{nm}}^k + \sum_{i=1}^4 a_{c_i}^k \xi_{c_i}^k = b_{c_{nm}}^k, \quad (39)$$

де $\xi_{c_{nm}}^k$ та $\xi_{c_i}^k$ є шуканими величинами, а $a_{c_{nm}}^k$, $a_{c_i}^k$ та $b_{c_{nm}}^k$ — відомими коефіцієнтами.

Для розв'язування таких систем використовуються методи, які загалом можна розбити на дві групи. До першої з них належать прямі методи, а до другої — ітераційні. Зазвичай прямі методи застосовуються до невеликих систем рівнянь і дають гарні результати [4, с. 277]. При роботі ж з великими СЛАР (особливо із системами рівнянь, матриці яких є розрідженими) вони призводять до величезних затрат часу (у прямих методах число операцій, необхідних для одержання розв'язку, зростає як квадрат числа невідомих). А тому їх використання тут є недоцільним. Ітераційні ж методи при застосуванні до великих СЛАР потребують значно менше комп'ютерної пам'яті і часу (зберігаючи при цьому розрідженість їхніх матриць у разі такої властивості останніх) і дають задовільні результати [4, с. 277].

Виходячи зі сказаного, а також з розміру та ступеня розрідженості системи (39), для її розв'язування у даній роботі вибирається ітераційний метод. У його рамках спочатку вибирається початкове наближення розв'язку, яке потім покращується шляхом ітерацій до тих, пір, доки не досягається його наперед задана точність. При цьому увага приділяється двом особливостям. Перша з них стосується необхідності забезпечення діагонального домінування в матриці. У даній роботі це досягається шляхом застосування до конвективного члена методу відкладеної корекції [7, с. 122–124; 8, с. 208–209]. Згідно з цим методом, та частина конвективного члена, яка відповідає описаній після виразу (20) протипоточній схемі, вбудовується в матрицю, а його решта переноситься у праву частину системи (39).

Друга особливість пов'язана з бажаною мінімізацією кількості ітерацій. У цьому дослідженні вона досягається шляхом застосування методу спряжених градієнтів [7, с. 107–110; 9, с. 410–414], який належить до найбільш ефективних методів розв'язування СЛАР великої розмірності. Зазначений метод дає можливість розв'язувати систему рівнянь за число ітерацій, яке не перевищує кількості її невідомих. При цьому, при хорошому виборі початкового наближення кількість ітерацій різко зменшується. Також до суттєвого зменшення кількості ітерацій приводить передобумовлювання. Для цього у даній роботі використовуються солвери ICCG (для симетричних матриць [7, с. 111]) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць [7, с. 117]).

Висновки

1. Розроблено чисельний метод розв'язування задачі про рух рідини у прямому плоскому жорсткому каналі з локальним жорсткостинним осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має другий порядок точності по просторових координатах і за часом.

2. У розробленому методі рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності розв'язуються шляхом їх інтегрування по елементарних об'ємах (на які розбивається розрахункова область), просторово-часової дискретизації одержаних у результаті цього інтегральних рівнянь (8), (9) і подальшого розв'язування нелінійних алгебричних рівнянь (24), (26). При виконанні зазначеної дискретизації часова її частина проводиться на основі схеми (15), а просторова – на основі схем (20) і (23).

3. Розв'язування рівнянь (24), (26) проводиться у три етапи. Спочатку рівняння (24) переписуються у вигляді рівнянь для швидкості (29)/(30). Потім на основі (31) виводиться рівняння для тиску (32). Після цього до зв'язаних

нелінійних рівнянь (29)/(30), (32) застосовується процедура знаходження та узгодження між собою послідовних наближень шуканих величин. Кількість же наближень тут визначається задаваною точністю розв'язку.

4. При знаходженні перших наближень шуканих величин проводиться модифікація рівнянь (29) шляхом заміни в них невідомих значень тиску та (у потокові, який входить у ці рівняння) компонент швидкості їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу. При знаходженні ж наступних наближень шукані швидкість (у потокові) і тиск замінюються у (29) вже їхніми відомими попередніми наближеннями. Такі заміни дозволяють переходити від розв'язування зв'язаних систем нелінійних алгебричних рівнянь (29)/(30), (32) до відповідних незалежних лінійних.

5. Для розв'язування зазначених систем лінійних алгебричних рівнянь застосовується ітераційний метод, у якому використовуються методи відкладеної корекції та спряжених градієнтів, а також солвери ICCG (для симетричних матриць) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць).

ЛІТЕРАТУРА

1. Lasheras J. C. The biomechanics of arterial aneurysms. *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2007. 39. P. 293-319. DOI: 10.1146/annurev.fluid.39.050905.110128 (eng.)

2. Borisjuk A. O. Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing. *Journal of Fluids and Structures*. 2010. 26 no. 4. P. 658–674. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.03.005 (eng.)

3. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenosis. *Journal of Biomechanical Engineering*. 1979. 101. P. 157-175. DOI: 10.1115/1.3426241 (eng.)

4. Борисюк А. О. Метод розв'язування задачі про течію в каналі з двома осесиметричними звуженнями. *Наукоємні технології*. 2018. Т. 38. № 2. С. 270–278. DOI: 10.18372/2310-5461.38.12825. (укр.)

5. Малуго В. С. Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами. Алгоритм решения. *Прикладна гідромеханіка*. 2010. Т. 12, № 4. С. 45–62 (рус.)

6. Issa R. I. Solution of implicitly discretized fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*. 1986. Vol. 62, no. 1. P. 40–65, DOI: 10.1016/0021-9991(86)90099-9. (eng.)

7. Ferziger J. H., Perić M. *Computational methods for fluid dynamics*, 3rd ed. Berlin: Springer, 2002. 424 p. (eng.)

8. Khosla P. K., Rubin S. G. A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. *Computers and Fluids*. 1974. 2. P. 207–209. DOI: 10.1016/0045-7930(74)90014-0 (eng.)

9. Hestenes M. R., Stiefel E. L. Method of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*. 1952. 49. No. 6. P. 409–436 (eng.)

Борисюк А. О.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ОСЕСИМЕТРИЧНИМ ПРЯМОКУТНИМ РОЗШИРЕННЯМ

Розроблено чисельний метод розв'язування задачі про рух рідини у прямому плоскому жорсткому каналі з локальним жорсткостінним осесиметричним розширенням прямокутної форми. Цей метод має другий порядок точності по просторових координатах і за часом. У розробленому методі рівняння Нав'є-Стокса і нерозривності розв'язуються шляхом їх інтегрування по елементарних об'ємах (на які розбивається розрахункова область), просторово-часової дискретизації одержаних у результаті цього інтегральних рівнянь і подальшого розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь. При виконанні зазначеної дискретизації часова її частина проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова – на основі TVD-схеми та відповідної схеми дискретизації просторових похідних. Розв'язування зазначених алгебраїчних рівнянь проводиться у три етапи. Спочатку дискретне рівняння кількості руху переписується у вигляді рівняння для швидкості. Потім на основі дискретного рівняння нерозривності виводиться рівняння для тиску. Після цього до одержаних зв'язаних нелінійних алгебраїчних рівнянь для швидкості і тиску застосовується процедура знаходження та узгодження між собою послідовних наближень цих величин. Кількість же наближень тут визначається задаваною точністю розв'язку. При знаходженні перших наближень шуканих величин проводиться модифікація рівняння для швидкості шляхом заміни в ньому невідомих значень тиску та (у потокові, який входить у це рівняння) швидкості їхніми значеннями, знайденими у попередній момент часу. При знаходженні ж наступних наближень шукані швидкість (у потокові) і тиск замінюються у рівнянні для швидкості вже їхніми відомими попередніми наближеннями. Такі заміни дозволяють переходити від розв'язування вищезазначених зв'язаних систем нелінійних алгебраїчних рівнянь для швидкості і тиску до відповідних незалежних лінійних. Для розв'язування ж систем лінійних алгебраїчних рівнянь застосовується ітераційний метод, в якому використовуються методи відкладеної корекції та спряжених градієнтів, а також солвери ICCG (для симетричних матриць) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць).

Ключові слова: течія; канал; розширення; метод.

Borysyuk A. O.

A METHOD TO SOLVE A PROBLEM OF FLOW IN A CHANNEL WITH AN AXISYMMETRIC RECTANGULAR EXPANSION

A numerical method is developed to solve a problem of fluid motion in a straight flat rigid channel with a local axisymmetric rigid-walled expansion of rectangular shape. The method has a second order of accuracy both in spatial coordinates and time. In the developed method, the Navier-Stokes and discontinuity equations are solved in the variables velocity-pressure by integrating over the elementary volumes (in which the integration domain is divided), spatial and temporal discretization of the obtained integral equations, and subsequent solving the non-linear algebraic equations. In making the noted discretization, its temporal part is carried out on the basis of the implicit three-point asymmetric backward differencing scheme, whereas the spatial one is based on the TVD-scheme and the appropriate scheme of discretization of the spatial derivatives. Solving of the noted non-linear algebraic equations is divided in three stages. Initially, the discrete momentum equation is rewritten in the form of equation for the velocity. Then, based on the discrete discontinuity equation, an equation for the pressure is derived. After that the obtained coupled non-linear algebraic equations are solved by finding gradual approximations of the velocity and the pressure and their corresponding agreeing with one another. Herewith the number of the approximations is determined from the desired accuracy of the solution. In finding the first approximations of the noted magnitudes, the equation for the velocity is modified by replacing in it the unknown pressure and velocity (only in the flow term that is a part of the equation) with their known values, obtained at the previous time moment. In finding the next approximations, the unknown velocity (again in the flow term only) and pressure are replaced in the equation for the velocity by their known previous approximations. These replacements result in solving uncoupled systems of linear algebraic equations for the velocity and pressure instead of the above-noted coupled non-linear ones. An iterative method, which uses the deferred correction implementation method and the method of conjugate gradients, as well as the solvers ICCG (for symmetric matrices) and Bi-CGSTAB (for asymmetric matrices), is applied to solve the noted systems of linear algebraic equations.

Keywords: flow; channel; expansion; method.

Борисюк А. А.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В КАНАЛЕ С ОСЕСИММЕТРИЧНЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ РАСШИРЕНИЕМ

Разработан численный метод решения задачи о движении жидкости в прямом плоском жестком канале с локальным жесткостенным осесимметричным расширением прямоугольной формы. Этот метод имеет второй порядок точности по пространственным координатам и по времени. В разработанном методе интегрирования Навье-Стокса и неразрывности решаются в переменных скорость-давление путем их интегрирования по элементарным объемам (на которые разбивается расчетная область), пространственно-временной дискретизации полученных в результате этого интегральных уравнений и дальнейшего решения нелинейных алгебраических уравнений. При выполнении указанной дискретизации временная ее часть проводится на основе неявной трехточечной несимметричной схемы с разностями назад, а пространственная – на основании TVD-схемы и соответствующей схемы дискретизации пространственных производных. Указанные алгебраические уравнения решаются в три этапа. Сначала дискретное уравнение количества движения переписывается в виде уравнения для скорости. Затем на основе дискретного уравнения неразрывности выводится уравнение для давления. После этого к полученным связанным нелинейным алгебраическим уравнениям для скорости и давления применяется процедура нахождения и согласования между собой последовательных приближений этих величин. Количество же приближений здесь определяется задаваемой точностью решения. При нахождении первых приближений искоемых величин проводится модификация уравнения для скорости путем замены в нем неизвестных значений давления и (в потоке, который входит в это уравнение) скорости ихними значениями, найденными в предыдущий момент времени. При нахождении же следующих приближений искомые скорость (в потоке) и давление заменяются в уравнении для скорости уже ихними известными предыдущими приближениями. Такие замены позволяют переходить от решения вышеуказанных связанных систем нелинейных алгебраических уравнений для скорости и давления к соответствующим независимым линейным. Для решения же систем линейных алгебраических уравнений применяется итерационный метод, в котором используются методы отложенной коррекции и сопряженных градиентов, а также солверы ICCG (для симметричных матриц) и Bi-CGSTAB (для асимметричных матриц).

Ключевые слова: течение; канал; расширение; метод.

Стаття надійшла до редакції 08.02.2019 р.
Прийнято до друку 11.03.2019 р.