

DOI: 10.18372/2310-5461.40.13281

УДК 539.3

**В. Ф. Греков**, канд. техн. наук, доц.Харківський національний університет Повітряних Сил  
orcid.org/0000-0002-2322-2015  
e-mail: grekov.vf@gmail.com;**Н. А. Мишукова**Харківський національний університет Повітряних Сил  
orcid.org/0000-0002-4368-8795  
e-mail: mishukova@gmail.com;**В. Я. Моїсєєв**, старш. викладачДержавний університет інфраструктури та технологій  
orcid.org/0000-0001-5692-2365  
e-mail: mnielena7@gmail.com;**Л. М. Вільдяєва**, старш. викладачДержавний університет інфраструктури та технологій,  
orcid.org/0000-0002-8569-4587  
e-mail: vildyayaL56@gmail.com;**М. І. Гараженко**, старш. викладачДержавний університет інфраструктури та технологій  
orcid.org/0000-0003-2514-3258  
e-mail: garagenkoM@gmail.com

## РОЗРАХУНОК КРИТИЧНИХ ЗУСИЛЬ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

### Вступ

При проведенні експерименту з дослідження стійкості кругової циліндричної оболонки при осьовому стисненні за допомогою гідравлічного преса можна спостерігати такі особливості [1–4]:

а) навантажувальні плити дуже повільно зближуються. Оболонка стискається до критичного стану (показання манометра (силоміри) досягають максимуму);

б) миттєво відбувається таке:

– оболонка раптово втрачає стійкість і переходить у новий рівноважний стан;

– покази манометра (силоміри) різко падають;

– покази манометра (силоміри) швидко зростають до значення менше максимального;

– подача рідини в навантажувальну систему припиняється (гідропрес вимикається);

в) відстань між навантажувальними плитами не змінюється через те, що навантаження відбувається дуже повільно, гідравлічний прес вимикається швидко, рідина практично не стискається, а втрата стійкості відбувається миттєво.

Різка падіння показань манометра в момент втрати стійкості говорить про те, що:

– тиск в навантажувальній системі падає миттєво, а, отже, миттєво падає осьове стискаюче навантаження;

– навантажувальні плити гідравлічного преса не відстежують переміщень торців оболонки, а отже, з огляду на пункт в), зовнішнє осьове навантаження не переводить оболонки в новий рівноважний стан.

### Постановка завдання

Виходячи з вищевикладених спостережень, можна зробити такі висновки.

1. Критичне стискальне навантаження  $N_*$  у процесі втрати стійкості оболонки змінюється і в новому (деформованому) стані дорівнює  $N_* + N_1$  ( $N_1$  — зміна критичної сили в момент втрати стійкості).

2. При втраті стійкості перехід у нову форму рівноваги здійснюється за рахунок внутрішньої енергії оболонки, накопиченої в докритичному стані, яка досягла критичної позначки.

3. Зовнішнє стискальне навантаження свою функцію виконало, повідомивши оболонці критичну енергію, і в переведенні оболонки в новий рівноважний участі стан не бере. Іншими словами, додаткова робота  $\Delta A$  зовнішнього стискального навантаження дорівнює нулю.

4. Відстань між торцями оболонки в момент втрати стійкості і в новому рівноважному стані одна і та ж сама.

**Мета статті** дослідити теоретично стійкість кругової циліндричної оболонки (рис. 1) довжиною  $L$ , радіуса  $R$ , з товщиною стінок циліндра  $h$ , навантажену по краях рівномірно роз-

поділеними зусиллями стиснення, побудувавши розрахункову схему на основі зроблених раніше висновків.

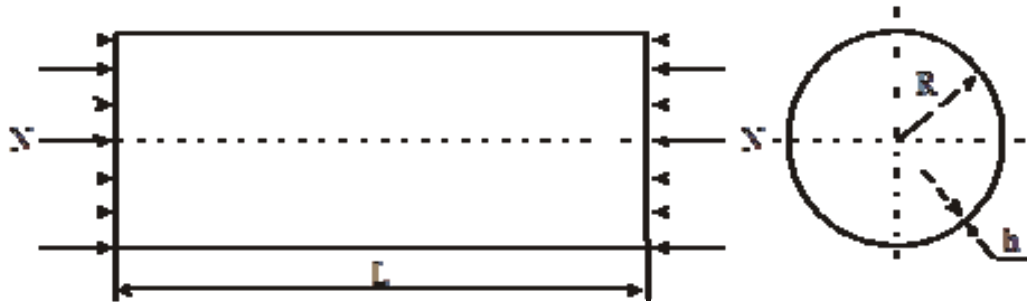


Рис. 1. Циліндрична оболонка при рівномірному осевому стисненні

Вихідні передумови: оболонка геометрично досконала, матеріал оболонки ідеально пружний, докритичний стан оболонки — безмоментний, краї оболонки вільно оперті.

**Метод вирішення:** енергетичний із використанням співвідношень лінійної теорії оболонок [5; 6].

**Основна частина**

Згідно з працею [2], зміни потенційної енергії деформації оболонки при втраті стійкості

$$\Delta V = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \times \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left\{ \begin{aligned} &(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2 - 2(1-\nu) \times \\ &\times (\varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} \varepsilon_{12}^2) + \frac{h^2}{12} \times \\ &\times \left[ (\chi_1 + \chi_2)^2 - 2 \times \right. \\ &\left. \times (1-\nu)(\chi_1 \chi_2 - \chi_{12}^2) \right] \end{aligned} \right\} dx dy, \quad (1)$$

де  $\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$ ;  $\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}$ ;

$$\varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (2)$$

$$\chi_1 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_2 = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\chi_{12} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x};$$

де  $u, v, w$  — зміщення точок серединної поверхні оболонки в напрямку координат  $x, y, z$ ;  $E, \nu$  — модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу.

Зміщення  $v$  і  $w$ , що відповідає граничним умовам, задамо у вигляді

$$v = f_2 \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R};$$

$$w = f_3 \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{ny}{R}, \quad (3)$$

де  $m$  — кількість півхвиль, за якими згинаються утворювальні циліндричної оболонки;  $n$  — кількість хвиль в окружному напрямку;  $f_2, f_3$  — амплітуди зміщень у напрямку осей  $y$  і  $z$ .

Нехай сума подовження серединної поверхні одиничного елемента оболонки в осьовому напрямку за рахунок розтягування і зближення його протилежних граней при вигині дорівнює деякої функції  $f_1(x, y)$ , тобто

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = f_1(x, y). \quad (4)$$

Проінтегруємо вираз (4) по частинах. Тоді

$$u = \int f_1(x, y) dx - \frac{1}{4} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \times \left( x + \frac{1}{\frac{2m\pi}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (5)$$

Відповідно до висновку 4,  $u(0) = u(L) = 0$  при цьому,  $u(x, y) \neq 0$ .

Виконання цієї умови можливе, якщо

$$\int f_1(x, y) dx = \frac{1}{4} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \times \left( x - \frac{1}{\frac{2m\pi}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} \right) \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (6)$$

Підставивши вираз (6) у вираз (5), отримаємо

$$u = -\frac{1}{4} f_3^2 \frac{m\pi}{L} \sin \frac{2m\pi x}{L} \cos^2 \frac{ny}{R}. \quad (7)$$

Після підстановки виразів (3) і (7) в (2), а (2) в (1) і виконання операцій диференціювання й інтегрування отримаємо

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \times \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{1}{16} f_3^4 \frac{1}{R^2} \lambda^2 \left( 3\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + \right. \\ & \left. + f_2^2 \left[ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ 2(1-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right] + \\ & + 2f_2 f_3 n \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \times \\ & \left. \times \left[ (2-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right] + \\ & + f_3^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] (\lambda^2 + n^2)^2 \end{aligned} \right\} \frac{\pi L}{4R}, \quad (8)$$

де  $\lambda = \frac{m\pi R}{L}$ .

Згідно з висновками 1 і 3, додаткова робота  $\Delta A$  зовнішнього зтиснувального навантаження дорівнює нулю, тобто

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi R} \int_0^L \left( N_* + \frac{1}{2} N_1 \right) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = 0. \quad (9)$$

Множник  $\frac{1}{2}$  при  $N_1$  з'явився тому, що перехід оболонки з початкового недеформованого в деформований стан супроводжується зміною  $N_1$  від нуля до свого максимального значення за модулем.

Зовнішнє навантаження  $N_1$  дорівнює внутрішнім зусиллям  $T_1$  на краях оболонки, маючи протилежний напрямок

$$\begin{aligned} N_1 &= -T(0) = -T(L) = \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1(0) + \nu\varepsilon_2(0)] = \\ &= \frac{Eh}{1-\nu^2} [\varepsilon_1(L) + \nu\varepsilon_2(L)]; \end{aligned} \quad (10)$$

$$N_1 = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} f_3^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \frac{n\pi}{R}.$$

З виразу (9) отримаємо

$$\frac{1}{16} f_3^4 \frac{1}{R^2} \lambda^2 = -\frac{1-\nu^2}{3} \frac{N_*}{Eh} f_3^2. \quad (11)$$

$$\Delta V = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[ -f_3^2 \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left( \lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2 \right) + \right. \\ & \left. + f_2^2 \left[ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \times \right. \\ & \left. \times \left[ 2(1-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right] + \\ & + 2f_2 f_3 n \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] \times \\ & \left. \times \left[ (2-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right] + \\ & + f_3^2 \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \right] (\lambda^2 + n^2)^2 \end{aligned} \right\} \frac{\pi L}{4R}.$$

Для визначення критичного значення осевого стискувального навантаження  $N_*$  використаємо умову мінімуму потенційної енергії для переміщень

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_k} = 0, \quad (k = 1, 2, 3), \quad (12)$$

де  $\Delta \Pi = \Delta V + \Delta A$ , а через те, що  $\Delta A = 0$ , тому  $\Delta \Pi = \Delta V$ , що відповідає висновку 2 і, в розглянутому випадку, умова (12) приймає вигляд

$$\frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta \Pi}{\partial f_3} = 0. \quad (13)$$

З виразу (14) отримаємо систему двох рівнянь

$$f_2 a_{11} + f_3 a_{12} = 0; \quad f_2 a_{21} + f_3 a_{22} = 0, \quad (14)$$

де  $a_{11} = \left[ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left[ 2(1-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right];$

$$a_{12} = a_{21} = n \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 \left[ (2-\nu)\lambda^2 + n^2 \right] \right];$$

$$a_{22} = \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{h}{R} \right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right] -$$

$$- \frac{1-\nu^2}{Eh} N_* \left( \lambda^2 + \frac{1-\nu}{6} n^2 \right).$$

Система рівнянь (15) має ненульове рішення за умови рівності нулю визначника з коефіцієнтів при параметрах  $f_2$  і  $f_3$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Розкривши цей визначник, отримаємо вираз для критичного зусилля стиснення

$$N_* = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6}n^2} \times \left\{ \frac{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - n^2 \left[ 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]^2}{\left[ \frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \times \right. \left. \times [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]} \right\} \quad (17)$$

Відносне значення критичного зусилля стиснення

$$\bar{N}_* = \frac{N_*}{N_*^a} = \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6}n^2} \times \left\{ \frac{1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 - n^2 \left[ 1 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 [(2-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]^2}{\left[ \frac{1-\nu}{2}\lambda^2 + n^2 + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{R}\right)^2 \times \right. \left. \times [2(1-\nu)\lambda^2 + n^2] \right]} \right\}, \quad (18)$$

де  $N_*^a = \frac{Eh^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}$  — класичне (верхнє) критичне зусилля стиснення.

Мінімізація виразів (17) і (18) за цілочисельними параметрами  $m$  і  $n$  дозволяє знаходити значення критичних навантажень в абсолютних і відносних величинах для тонкостінних циліндричних оболонки будь-яких геометричних розмі-

рів [7]. У табл. 1 наведені результати мінімізації виразу (18) при  $\nu = 0,3$  для оболонок з  $L/R = 2; 4; 10$ , коли  $R/h$  змінюється від 50 до 3000.

Таблиця 1

Результати мінімізації виразу (18)

$L/R$	2			4			10		
$R/h$	$m$	$n$	$\bar{N}_*$	$m$	$n$	$\bar{N}_*$	$m$	$n$	$\bar{N}_*$
50	1	6	0,955	1	5	0,738	1	4	0,450
75		6	0,903		5	0,676		4	0,383
100		7	0,855		6	0,623		4	0,374
150		8	0,800		7	0,565		5	0,319
200		9	0,753		8	0,530		6	0,298
300		11	0,689		9	0,469		6	0,266
400		12	0,640		10	0,433		7	0,238
500		13	0,604		10	0,403		8	0,224
750		15	0,541		12	0,356		9	0,196
1000		16	0,499		13	0,325		10	0,180
1250		18	0,468		14	0,308		10	0,168
1500		19	0,443		15	0,287		11	0,157
2000		21	0,406		17	0,262		12	0,143
2500		22	0,379		18	0,244		13	0,133
3000		24	0,358		19	0,230		14	0,125

За отриманими результатами побудовані графіки (рис. 2) змін значень  $\bar{N}_*$  залежно від змін  $L/R$  і  $R/h$ . На рис. 2 також наведені результати деяких експериментальних досліджень.

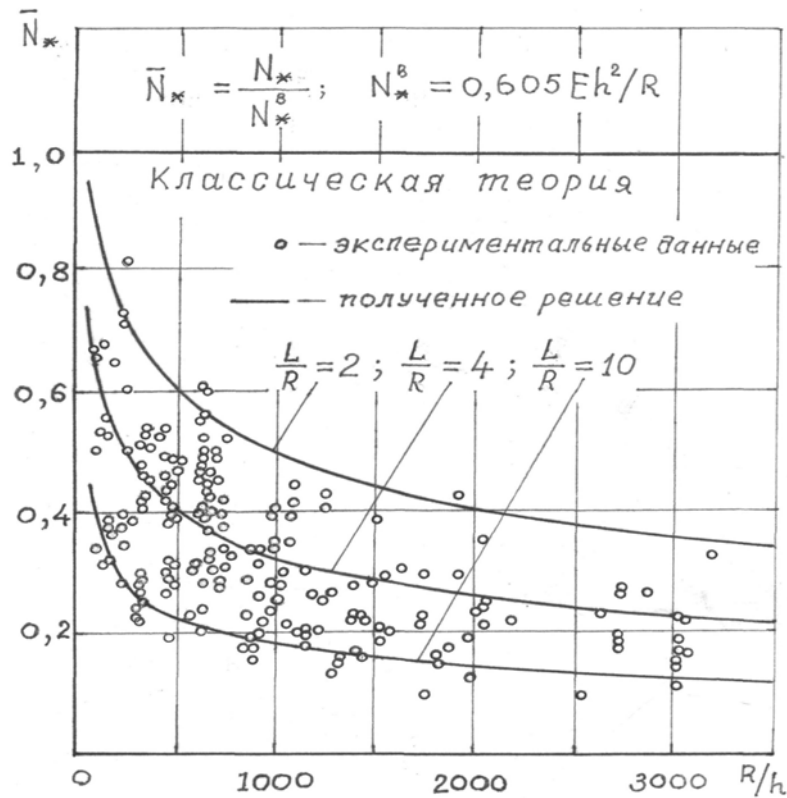


Рис. 2. Теоретичні й експериментальні критичні значення стискувальних навантажень для циліндричних оболонок

На основі теорії пологих оболонок отримані більш прості формули для визначення критичних навантажень  $N_*^n$

$$N_*^n = \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6}n^2} \times \left\{ \frac{\frac{1-\nu}{2}\lambda^2}{1-\nu\lambda^2 + n^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}, \tag{19}$$

$$\bar{N}_*^n = \sqrt{\frac{3}{1-\nu^2}} \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + \frac{1-\nu}{6}n^2} \times \left\{ \frac{\frac{1-\nu}{2}\lambda^2}{1-\nu\lambda^2 + n^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}, \tag{20}$$

$$\bar{N}_*^n = 1,8157 \frac{R}{h} \frac{1}{\lambda^2 + 0,1167n^2} \times \left\{ \frac{0,35\lambda^2}{0,35\lambda^2 + n^2} + \frac{1}{12} \left(\frac{h}{R}\right)^2 (\lambda^2 + n^2)^2 \right\}. \tag{21}$$

Результати розрахунків  $\bar{N}_*^n$  за формулою (21) і похибки  $\Delta = \frac{\bar{N}_*^n - \bar{N}_*}{\bar{N}_*} 100\%$ , що вносяться в результати розрахунків при використанні спрощених залежностей, наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Результати розрахунків  $\bar{N}_*^n$  по рівнянню (21) і похибки  $\Delta$

L/R	2			4			10		
R/h	$\bar{N}_*^n$	$\bar{N}_*$	$\Delta\%$	$\bar{N}_*^n$	$\bar{N}_*$	$\Delta\%$	$\bar{N}_*^n$	$\bar{N}_*$	$\Delta\%$
50	0,987	0,955	3,35	0,782	0,738	5,96	0,498	0,450	10,66
100	0,874	0,855	2,22	0,646	0,623	3,69	0,398	0,374	6,42
300	0,696	0,685	1,60	0,477	0,469	1,70	0,274	0,266	3,00
500	0,609	0,604	0,83	0,409	0,403	1,49	0,229	0,224	2,25
1000	0,501	0,499	0,40	0,328	0,325	0,92	0,182	0,180	1,11

Розглянемо стійкість шарнірно опертого стрижня (рис. 3) довжини  $L$  з площею поперечного перетину  $F$ , навантаженого стискальними силами  $P$ , використовуючи запропонований підхід

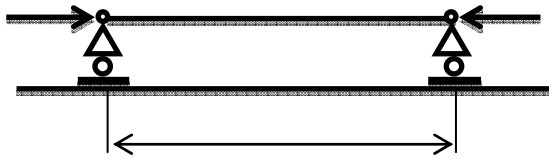


Рис. 3. Шарнірно опертий стрижень, навантажений стискальними силами  $P$

Зміна потенційної енергії деформації стрижня при втраті стійкості

$$\Delta V = \frac{1}{2} E \int_0^L (F \varepsilon^2 + J \cdot \chi^2) dx, \quad (22)$$

де  $\varepsilon = \frac{du}{dx}$ ;  $\chi = -\frac{d^2 w}{dx^2}$ ;  $u = -\frac{1}{4} f^2 \frac{m\pi}{L} \sin 2 \frac{m\pi x}{L}$ ;

$$w = f \sin \frac{m\pi x}{L}; \quad (23)$$

де  $J$  — момент інерції поперечного перетину стрижня;  $f$  — амплітуда прогину вісі стрижня.

З виразу (22) з врахуванням (23) отримаємо

$$\Delta V = \frac{1}{2} E \left( \frac{m\pi}{L} \right)^4 f^2 \left( \frac{1}{4} f^2 F + J \right) \frac{L}{2}. \quad (24)$$

Додаткова робота зовнішньої стискальної сили

$$\Delta A = \frac{1}{2} \int_0^L \left( P_* + \frac{1}{2} P \right) \left( \frac{dw}{dx} \right)^2 dx = 0, \quad (25)$$

де  $P = -T(0) = -T(L) = -EF \varepsilon(0) = -EF \varepsilon(L)$ ;

$T = EF \frac{du}{dx}$  — додаткова внутрішня сила, що виникає в стрижні під час втрати стійкості.

З виразу (25) отримаємо

$$\frac{1}{4} EF f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 = -P_*. \quad (26)$$

Зробивши відповідну заміну в (24), маємо

$$\Delta V = \frac{1}{2} f^2 \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 \left[ -P_* + \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 EJ \right] \frac{L}{2}. \quad (27)$$

З умови мінімуму потенційної енергії  $\frac{d\Delta V}{df} = 0$  отримаємо

$$P_* = \left( \frac{m\pi}{L} \right)^2 EJ. \quad (28)$$

Критична стискавальна сила  $P_*$  має мінімальне значення при  $m = 1$  і

$$P_* = \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 EJ, \quad (29)$$

що повністю відповідає класичному рішення, яке не викликає сумнівів.

Аналізуючи результати, отримані на основі прийнятого припущення про те, що втрата стійкості відбувається за рахунок внутрішньої енергії оболонки, накопиченої в докритичному стані, яка досягла критичного значення, а робота зовнішніх сил на переміщеннях, що виникли в процесі втрати стійкості, дорівнює нулю, і врахування зміни зовнішнього навантаження в процесі втрати стійкості, а порівняння їх з експериментальними даними (в систематизованому вигляді вони наведені в [1], а також наведеними на рис. 2), вдалося:

- отримати вираз для  $N_*$ , який дозволяє розрахувати критичні значення осевого стискавального навантаження, близькі до експериментальних;

- встановити залежність відносних критичних значень осевого стискавального навантаження  $N_*$  і від відношення радіусу оболонки до її товщини  $R/h$ , і відношення довжини оболонки до її радіусу  $L/R$ ;

- зробити висновок про можливість використання для теоретичних розрахунків спрощених залежностей, отриманих на основі теорії пологих оболонок. Тільки довгі (велика  $L/R$ ) і порівняно товсті (мале  $R/h$ ) оболонки вимагають розрахунку за точними залежностями для  $N_*$ ;

- отримати вираз для критичної стискальної сили шарнірно опертого стержня, що збігається з класичним рішенням.

Задача розв’язана в умовах статичності, а втрата стійкості — динамічний процес. Тому, необхідно це врахувати при подальших дослідженнях.

Особливості даного дослідження.

1. Головна помилка дослідників неврахування зміни зовнішнього навантаження в момент втрати стійкості оболонки, що вирішують завдання в лінійній постановці.

2. Початкові недосконалості не відіграють тієї величезної ролі в зниженні критичних зусиль, яку їм приписують. Досліджуючи поверхню реальних оболонок у докритичному стані, бачимо, що початкові геометричні недосконалості (різні в досліджуваних зразках і розташовані в різних місцях оболонок) поведуться по-різному в процесі навантаження.

Одні розвиваються швидко, інші — повільно; один розвивається постійно, інші — припиняються в своєму розвитку. Один і той самий погин може постійно розвиватися; може припинитися у розвитку, а потім знову розвиватися.

Відбувається перерозподіл напружень в оболонці, а, отже, подумки відокремлені стрижні

оболонки «несуть» різне зовнішнє навантаження. Але критичні сили однієї партії оболонок мало відрізняються (якщо окремі зразки не мають явних дефектів). Тому замір початкових недосконалостей мало що дає. Необхідне врахування їх впливу за допомогою коефіцієнтів, отриманих на основі обробки статистичних даних.

### Висновки

1. Особливість запропонованого підходу полягає в урахуванні зміни зовнішнього навантаження при втраті стійкості оболонки і припущенні, що зміна потенційної енергії осевого розтягання–стискання дорівнює додатковій роботі зовнішніх осевих зусиль на осевих переміщеннях, отриманих за рахунок розтягання–стискання серединної поверхні оболонки.

2. Запропонований підхід призводить до результатів, що якісно і кількісно добре описують спостережувані в експериментах явища.

3. Одержано аналітичну залежність критичних зусиль від геометрії оболонки і параметрів хвилеутворення.

4. Показано, що відносні значення осевих критичних навантажень істотно залежать від зміни відношень радіуса оболонки до її товщини і довжини до радіусу.

### Греков В. Ф., Мишукова Н. О., Моїсєєв В. Я., Вільдяєва Л. М., Гараженко М. І. РОЗРАХУНОК КРИТИЧНИХ ЗУСИЛЬ ІЗОТРОПНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНОК

*Досліджується стійкість кругової циліндричної оболонки певної довжини і радіуса, з урахуванням товщини стінок циліндра. При дослідженні циліндр навантажеться по краях рівномірно розподіленими зусиллями стиснення. Побудована розрахункова схема і запропоновано метод розрахунку критичних осевих стискаючих зусиль. Наведено підхід, в якому передбачається, що втрата стійкості оболонки відбувається за рахунок внутрішньої енергії, накопиченої в докритичному стані, а робота зовнішніх навантажень в момент втрати стійкості дорівнює нулю. Показано, що відносні значення осевих критичних навантажень суттєво залежать від зміни відношень радіуса оболонки до її товщини і довжини до радіусу.*

**Ключові слова:** циліндр; осевий стиск; стійкість; енергетичний метод.

### Grekov V., Mishukova N., Moiseyev V., Vildyayeva L., Garazhenko M. CALCULATION OF CRITICAL AXIAL RELATED EFFORTS OF ISOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS

*The theory of stability of a circular cylindrical shell of a certain length and radius is studied, taking into account the thickness of the cylinder walls. In the study of the cylinder is loaded at the edges evenly distributed compressive forces. A design scheme was constructed and a method for calculating the critical axial compressive forces was proposed. The basic data are: the shell is geometrically perfect, the shell material is ideally elastic, the pre-critical state of the shell is membrane less, the edges of the shell are freely supported. The method of solving the problem is proposed – energetic using relations of the linear theory of shells.*

*Minimizing the proposed ratios by integer parameters allows finding the values of critical loads in absolute and relative values for thin-walled cylindrical shells of any geometrical dimensions.*

*An approach is presented in which it is assumed that the loss of stability of the shell occurs due to the internal energy accumulated in the subcritical state, and the work of external loads at the moment of loss of stability is zero. The considered approach is absolutely different from the known ones, where it was assumed that the change in the potential energy of axial tension-compression is equal to the work of external axial forces on displacements obtained by stretching-compression of the middle surface of the shell at the moment of loss of stability. Both approaches suggest that the critical load changes at the moment of loss of resilience.*

### ЛІТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978. 345 с.
2. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 436 с.
3. Тодчук В. А. Об одном подходе к решению задачи устойчивости цилиндра при осевом сжатии. Вестник Петровской академии. № 2–3 (27–28). 2012. С. 3–7.
4. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М.: Гостехиздат, 1946. 543 с.
5. Флюгге В. Статика и динамика оболочек. М.: Стройиздат, 1961. 265 с.
6. Саусвелл Р. В. Введение в теорию упругости. М.: Госиздат иностранной литературы, 1948. 327 с.
7. Бернштейн М. С. Теорема о работе внешних сил на конечных перемещениях и её применение к задачам об устойчивости упругого равновесия. Расчет пространственных конструкций. М.: Гостехиздат, 1961. 338 с.

*The peculiarity of the proposed approach is to take into account changes in the external load with loss of stability of the shell and the assumption that the change in the potential energy of axial tension – compression is equal to the additional work of external axial forces on axial displacements obtained by tension – compression of the middle surface of the shell. The proposed approach leads to results that qualitatively and quantitatively describe the phenomena observed in experiments.*

*An analytical dependence of the critical forces on the geometry of the shell and the parameters of wave formation is obtained.*

*It is shown that the relative values of axial critical loads significantly depend on the change in the ratio of the radius of the shell to its thickness and length to radius.*

**Keywords:** cylinder; axial compression; stability; energy method.

**Греков В. Ф., Мишукова Н. А., Моисеев В. Я., Вильдяева Л. Н., Гараженко Н. И.  
РАСЧЕТ КРИТИЧЕСКИХ ОСЕВЫХ СЖИМАЮЩИХ УСИЛИЙ ИЗОТРОПНЫХ  
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

*Исследуется устойчивость круговой цилиндрической оболочки определенной длины и радиуса, с учетом толщины стенок цилиндра. При исследовании цилиндр нагружается по краям равномерно распределенными усилиями сжатия. Построена расчетная схема и предложен метод расчета критических осевых сжимающих усилий. Приведен подход, в котором предполагается, что потеря устойчивости оболочки происходит за счет внутренней энергии, накопленной в докритическом состоянии, а работа внешних нагрузок в момент потери устойчивости равна нулю. Показано, что относительные значения осевых критических нагрузок существенно зависят от изменения отношений радиуса оболочки к её толщине и длины к радиусу.*

**Ключевые слова:** цилиндр; осевое сжатие; устойчивость; энергетический метод.

Стаття надійшла до редакції 13.10.2018 р.  
Прийнято до друку 04.12.2018 р.