

УДК 532.542

DOI: 10.18372/2310-5461.38.12825

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб.
Інститут гідромеханіки НАН України
e-mail: aobor@ukr.net
orcid.org/0000-0002-3878-3915

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ДВОМА ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЗВУЖЕННЯМИ

Вступ

Дослідження течій у прямих каналах є актуальним у нафтогазовій та хімічній промисловості, автомобіле- та літакобудуванні, архітектурі, медицині, комунальному господарстві тощо. Значний інтерес тут пов'язаний з вивченням поведінки течій у каналах зі звуженнями. Пояснюється це тим, що в околах таких нерегулярностей геометрії каналів суттєво змінюються структура і характер течії, її локальні та інтегральні характеристики тощо. А це може призвести до серйозних наслідків не лише поблизу, але й за межами зазначених нерегулярностей [1, с. 659].

Як показує аналіз літератури, дослідженню течій у каналах зі звуженнями приділялася значна увага. Загалом усі існуючі дослідження можна поділити на дві групи. До першої слід віднести роботи, у яких розглядалися течії у жорстких каналах з одним звуженням. При цьому звуження вважали жорсткими, і для них вибирали найпростіші форми. Течії ж на їх вході були стаціонарними, осесиметричними і ламінарними (такі течії називають *базовими*. У разі кількох звужень базовою є течія перед входом у перше з них), а рідини вважалися однорідними, нестисливими і ньютонівськими (у цій статті не розглядаються інші типи каналів, звужень, рідин та їхніх течій, оскільки вони значно рідше вивчалися порівняно із зазначеними) [1, с. 658–659; 2, с. 163; 3, с. 35]. Це давало можливість, з одного боку, з'ясувати вплив основних параметрів каналу, його звуження і базового потоку на течію, як в околі звуження, так і за його межами, а з іншого — значно спростувати розв'язування відповідних задач.

З-поміж одержаних результатів слід зазначити встановлення існування областей збурених звуженням течії та їхстабілізацію й переходу до режиму, який був перед звуженням.

На початку регіону збурення (тобто безпосередньо перед входом і на вході у звуження) зазвичай спостерігається попередній відрив потоку із зоною зворотного руху біля стінки каналу та подальше його приєднання. Після цього за горловиною звуження має місце основний відрив течії у вигляді струменя і зворотний рух (між струменем та стінкою каналу). Швидкість на осі каналу починаючи з горловини звуження і майже до кінця зони збурення залишається практично такою самою, як і в самій горловині. А далі вона починає швидко зменшуватися [1, с. 659, 663]. В області стабілізації течії має місце подальше зменшення зазначеної швидкості і досягнення нею наприкінці області значення, котре дорівнює значенню швидкості на осі базового потоку. Існують також оцінки для верхніх меж довжин зазначених областей течії для розглянутих авторами форм звужень [1, с. 662, 2, с. 167].

Що стосується тиску та об'ємної витрати рідини, то у звуженні спостерігається падіння першого, яке спричиняє зменшення другого в усьому каналі. При цьому обидва ефекти залежать від форми звуження та її геометричних параметрів, від жорсткості стінок каналу, сили в'язкості та інерції рідини у звуженні, а також співвідношення між ними (у разі нестационарної та/або турбулентної базової течії вони залежать ще й від інших параметрів, але про такі течії у даній статті не йдеться). У разі ж досягнення ступенем звуження значення, котре зазвичай перевищує 50 %, вони стають суттєвими, а при подальшому збільшенні ступеня звуження — навіть критичними [4, с. 163–167].

Якщо говорити про осьові дотичні пристінні напруження, то в зоні попереднього відриву вони направлені проти базової течії. Далі, після приєднання потоку, їх напрям змінюється на протилежний, залишаючись таким самим до появи основного відриву.

Тут вони також напрямлені проти вхідного потоку. Після приєднання течії, дотичні напруження знову міняють свій напрям на протилежний [4, с. 170–172].

Що стосується величини зазначених напружень, то у зоні попереднього відриву спочатку має місце їх збільшення, а потім — зменшення із зростанням осьової координати.

За цією зоною відбувається різке зростання напружень, досягнення ними (безпосередньо перед горловиною звуження) максимуму і подальше зменшення аж до нуля на самому початку основного відриву течії.

Після цього їх величина збільшується із зростанням осьової координати, а потім, після досягнення максимального значення, зменшується до нуля (у кінці зони основного відриву) [4, с. 170–172].

Повертаючись до другої, зі згаданих вище групи робіт, слід відзначити, що до неї можна віднести дослідження течій у каналах із кількома звуженнями [5, с. 45]. Проте, такі роботи є нечисленними, а одержані в них результати — досить обмеженими, і мають якісний характер.

Такий брак інформації стосовно поведінки течій у каналах з кількома звуженнями і стимулював проведення даної серії досліджень. У першому з них наводиться метод розв'язування базової задачі про рух течії у плоскому жорсткому каналі з двома осесиметричними ступінчастими звуженнями.

Постановка завдання

Розглядається прямий плоский жорсткий канал безрозмірної ширини 1 з двома осесиметричними жорсткими прямокутними звуженнями (рис. 1). Звуження мають діаметри D_1 і D_2 та довжини L_1 і L_2 , і розташовані на відстані L_{12} одне від одного. У каналі тече в'язка нестислива однорідна ньютонівська рідина масової густини ρ і кінематичної в'язкості ν . Її течія перед входом у перше звуження є стаціонарною ламінарною, і характеризується об'ємною витратою на одиницю глибини каналу Q . Необхідно дослідити течію в околі звужень, а також встановити зв'язок її характеристик з параметрами базової течії, каналу, його звужень та відстані між ними.

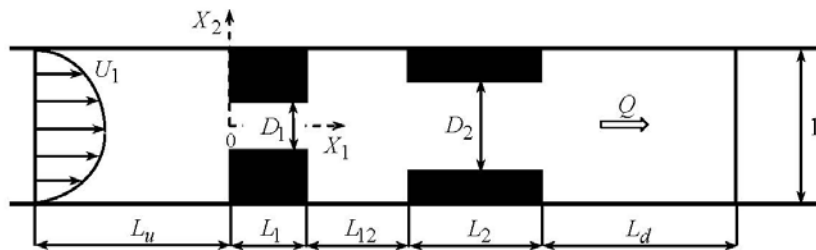


Рис. 1. Геометрія задачі та розрахункова область

Сформульована задача описується безрозмірними рівняннями Нав'є–Стокса:

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{1}{\text{Re}_D} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) \quad (1)$$

і нерозривності:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_i} = 0. \quad (2)$$

Граничними умовами є рівність нулевої швидкості течії на стінці каналу S_{ch} і на поверхнях обох звужень S_j ($j=1,2$):

$$U_i|_{S_{ch}} = 0, U_i|_{S_j} = 0, \quad i=1,2. \quad (3)$$

Також об'ємна витрата рідини Q має бути однаковою в усіх поперечних перерізах каналу:

$$\frac{\partial Q}{\partial X_1} = 0, \quad Q=1. \quad (4)$$

Крім того, за межами збуреної звуженнями течії (тобто достатньо далеко перед першим звуженням (де течія ще незбурена) і далеко за другим звуженням (де течія вже незбурена) задається параболічний профіль швидкості:

$$U_1|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 1,5(1-4X_2^2),$$

$$U_2|_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0. \quad (5)$$

Що стосується тиску P , то вважається, що достатньо далеко перед звуженнями ($P_u = P|_{X_1=-\infty}$) і далеко за ними ($P_d = P|_{X_1=\infty}$) він є сталим, а його відповідний перепад $\Delta P = P_u - P_d = \text{const} > 0$ такий, що відповідає заданому ламінарному характеру базового потоку.

При цьому без втрати загальності величина P_d покладається рівною нулю, а тиск P_u , як і тиск в усьому каналі, визначається у процесі розв'язування задачі. На нерухомих жорстких поверхнях каналу і обох його звужень нормальний градієнт тиску є нульовим:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)_{S_{ch}} = 0, \left(\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} \right)_{S_j} = 0, \quad j=1,2. \quad (6)$$

Початкові умови полягають у відсутності руху рідини в каналі на момент часу $T = 0$:

$$P|_{T=0} = 0, U_i|_{T=0} = 0. \quad (7)$$

У виразах (1)–(7) X_i ($i=1,2,3$) є прямокутними координатами, обраними так, що вісь X_1 напрямлена по осі каналу вниз за течією, а вісь X_3 — перпендикулярно до площини X_1X_2 на нас (рис. 1), T — часом, U_i — компонентами швидкості рідини у напрямках X_i , $Re_D = U_a D / \nu$ — числом Рейнольдса осередненої по поперечному перерізу каналу базової течії, U_a — її швидкістю, \mathbf{n} — зовнішньою одиничною нормаллю до відповідної поверхні, а також передбачається підсумовування по індексах, що повторюються. Що стосується обраних е виразах (1)–(7) масштабів, то для довжини — це ширина каналу D , для швидкості — U_a , для об’ємної витрати — $U_a D$, для часу — D / U_a , а для тиску — ρU_a^2 .

Метод розв’язування

Розв’язування задачі складається з: а) вибору розрахункової області та її розбиття на елементарні об’єми; б) переходу до інтегральних аналогів наведених співвідношень; в) спрощення інтегральних співвідношень на основі теореми Гауса–Остроградського та/або представлення підінтегральних функцій рядами Тейлора в околах центрів мас відповідних об’ємів; г) дискрети-

зації одержаних у результаті цього співвідношення і відповідного переходу до дискретних рівнянь; д) лінеаризації дискретних рівнянь та узгодження полів швидкості і тиску; е) розв’язування одержаних систем лінійних алгебричних рівнянь. Розглянемо ці етапи.

Розрахункова область

Область, у якій розшукується розв’язок задачі, зображена на рис. 1.

Вона обмежується перерізами $X_1 = -L_u$, $X_1 = L_1 + L_{12} + L_2 + L_d$, $X_3 = X_{3*}$ та $X_3 = X_{3*} + dX_3$ (де $dX_3 \ll 1$, а X_{3*} — довільне значення координати X_3).

При цьому ліва межа $X_1 = -L_u$ обирається там, де базова течія ще незбурена збуреннями, а права $X_1 = L_1 + L_{12} + L_2 + L_d$ — де збурення течії вже зникають, і вона стає такою, якою була при $X_1 = -L_u$.

Значення L_u та L_d для розглядуваних у даній статті значень швидкості базової течії не мають бути меншими від 0,5 та 12 відповідно [1, с. 659].

Обрана область інтегрування розбивається на об’єми V_{nm} перерізами $X_1 = X_{1n}$ ($X_{1n} = X_{1(n-1)} + dX_1$, $dX_1 \ll 1$) та $X_2 = X_{2m}$ ($X_{2m} = X_{2(m-1)} + dX_2$, $dX_2 \ll 1$) (рис. 2).

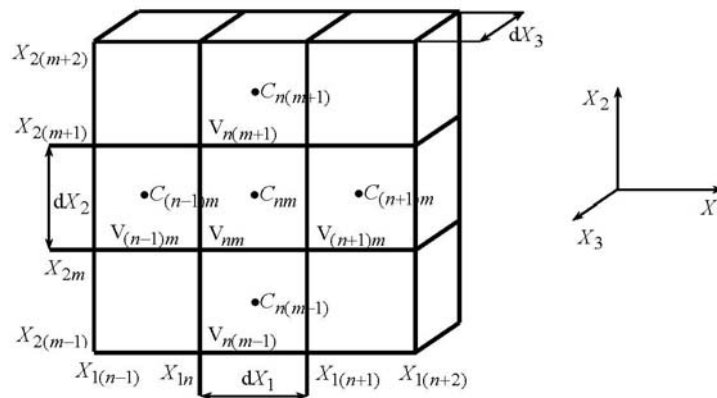


Рис. 2. Схема розбиття розрахункової області на елементарні об’єми

Інтегральні співвідношення та їх дискретизація

Інтегральні рівняння та їх дискретні аналоги

Інтегральні аналоги рівнянь (1), (2) одержуються шляхом інтегрування останніх по контрольних об’ємах V_{nm} .

Це дає

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_{V_{nm}} U_i dV + \iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \quad (8)$$

$$= - \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dV + \frac{1}{Re_D} \iiint_{V_{nm}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) dV,$$

$$\iiint_{V_{nm}} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} dV = 0. \quad (9)$$

Застосування (де можливо) теореми Гауса–Остроградського:

$$\begin{aligned} \iiint_{V_{nm}} \bar{\nabla} \cdot \bar{g} dV &= \iint_{S_{nm}} \bar{g} \cdot \bar{n} dS; \\ \iiint_{V_{nm}} \bar{\nabla} \gamma dV &= \iint_{S_{nm}} \gamma \bar{n} dS, \end{aligned} \quad (10)$$

до членів рівнянь (8), (9) та/або розкладання, де потрібно, їхніх підінтегральних функцій (які для зручності позначимо через $\mathbf{f}(\mathbf{r})$) в ряди Тейлора в околі центру мас C_{nm} об'єму (унаслідок однорідності рідини в каналі, центр мас об'єму V_{nm} співпадає з його геометричним центром. Аналогічною є ситуація і з центрами мас бічних граней об'єму V_{nm} :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{r}) &= \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \\ &+ \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) + O\left((\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}})^2\right), \\ \mathbf{r}_{c_{nm}} &= \iiint_{V_{nm}} \mathbf{r} dV / |V_{nm}|, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}| \ll 1, \quad \mathbf{r} \in V_{nm}, \\ \mathbf{r} &= X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_{c_{nm}} = X_{i_{c_{nm}}} \mathbf{e}_i, \quad (11) \\ X_{1_{c_{nm}}} &= X_{1n} + dX_1 / 2, \quad X_{2_{c_{nm}}} = X_{2m} + dX_2 / 2, \\ X_{3_{c_{nm}}} &= X_{3*} + dX_3 / 2, \end{aligned}$$

подальше використання лише перших двох членів цих рядів:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) \quad (12)$$

і відповідна дискретизація похідних, а також використання (де потрібно) TVD-схем дозволяє перейти до дискретних аналогів співвідношень (8) і (9) (тут \mathbf{r} і $\mathbf{r}_{c_{nm}}$ — радіуси-вектори відповідно довільної точки регіону V_{nm} і його центру мас C_{nm} ; ∇ — градієнт, S_{nm} та $|V_{nm}| = dX_1 dX_2 dX_3$ — поверхня та об'єм регіону V_{nm} , крапка показує на скалярне множення відповідних величин, а \mathbf{e}_i — орт осі X_i).

Дійсно, врахування представлення (12) підінтегральної функції U_i першого доданку у (8):

$$U_i(\mathbf{r}) = U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + \nabla(U_i)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}),$$

а також використання інтеграла

$$\iiint_{V_{nm}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}) dV = 0 \quad (13)$$

(який впливає з виразу (11)) приводить до

$$\frac{\partial}{\partial T} \iiint_{V_{nm}} U_i dV = \frac{\partial U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}, T)}{\partial T} |V_{nm}|. \quad (14)$$

Далі в (14) проводиться дискретизація похідної на основі неявної триточкової несиметричної

схеми з різницями назад [5, с. 51], яка має другий порядок точності:

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}, T)}{\partial T} = \frac{\frac{3}{2} \mathbf{f}_{c_{nm}}^k - 2 \mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-1} + \frac{1}{2} \mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-2}}{\Delta T}. \quad (15)$$

Тут ΔT — малий часовий крок; $\mathbf{f}_{c_{nm}}^k$ — значення функції \mathbf{f} у точці C_{nm} у момент часу $T = k\Delta T$, а її значення у цій самій точці у попередні моменти часу $\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-1}$ та $\mathbf{f}_{c_{nm}}^{k-2}$ є відомими.

Що стосується другого члена рівняння (8), то спочатку (на основі (2)) його підінтегральна функція переписується в еквівалентному вигляді:

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j} = \nabla \cdot (\mathbf{U} U_i), \quad \mathbf{U} = U_i \mathbf{e}_i, \quad U_3 = 0.$$

Після цього до неї застосовують першу форму теореми Гауса–Остроградського (10):

$$\iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \iiint_{V_{nm}} (\nabla \cdot (\mathbf{U} U_i)) dV = \iint_{S_{nm}} (\mathbf{U} U_i) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (16)$$

Оскільки бічна поверхня S_{nm} об'єму V_{nm} складається з шести плоских граней $S_{nm}^{(i)}$ із зовнішніми одиничними нормлями \mathbf{n}_i ($i = 1, \dots, 6$; рис. 3):

$$\begin{aligned} S_{nm} &= \sum_{i=1}^6 S_{nm}^{(i)}, \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n}_4 = -\mathbf{e}_2, \\ &\quad \mathbf{n}_5 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{n}_6 = -\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

а підінтегральна функція у поверхневому інтегралі в співвідношенні (16) може бути представлена лінійною частиною її ряду Тейлора в околах центрів мас $C_{nm}^{(i)}$ граней $S_{nm}^{(i)}$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(i)}) + \nabla(\mathbf{f})|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(i)}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}^{(i)}),$$

$$\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(i)} = \iint_{S_{nm}^{(i)}} \mathbf{r} dS / |S_{nm}^{(i)}|, \quad \mathbf{r} = X_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{r}_{c_{nm}}^{(i)} = X_{j_{c_{nm}}^{(i)}} \bar{\mathbf{e}}_j, \quad (17)$$

то це дозволяє значно спростити співвідношення (16):

$$\iiint_{V_{nm}} U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dV = \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} (\mathbf{U} U_i) \cdot \mathbf{n}_j dS = \quad (18)$$

$$= \sum_{j=1}^4 (\mathbf{U} U_i)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(j)}} \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)} U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(j)}),$$

(у (18) $|S_{nm}^{(j)}|$ є площею грані $S_{nm}^{(j)}$ (рис. 3), а

$$F_{nm}^{(j)} = \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(j)}) \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = U_i(\mathbf{r}_{c_{nm}}^{(j)}) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|, \quad (19)$$

потокотом середовища крізь грань $S_{nm}^{(j)}$; крім того, тут було використаний інтеграл подібний до (13)

$$\iint_{S_{nm}^{(j)}} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{c_{nm}}^{(j)}) dS = 0,$$

який впливає з (17).

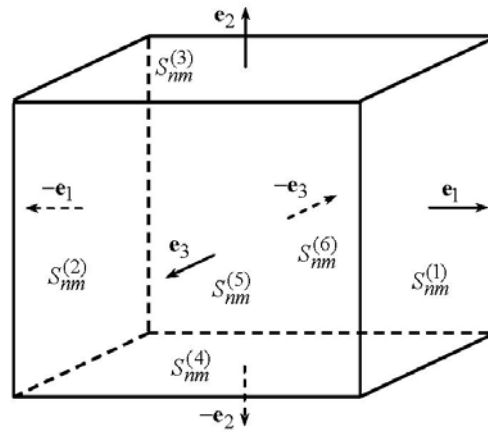


Рис. 3. Елементарний об'єм V_{nm} , його бічні грані $S_{nm}^{(i)}$ та їхні зовнішні нормалі \mathbf{n}_i ($i = 1, \dots, 6$)

Далі у (18), (19) значення функції U_i у центрах мас $C_{nm}^{(j)}$ граней $S_{nm}^{(j)}$ визначаються через значення цієї функції у центрах мас контрольних об'ємів, які мають спільні грані $S_{nm}^{(j)}$. Для цього використовується така TVD-схема [5, с. 51]:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) = \mathbf{f}_1^{(j)} + \Phi(\mathbf{f}_2^{(j)} - \mathbf{f}_1^{(j)}); \quad (20)$$

$$\mathbf{f}_1^{(j)} = \begin{cases} \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}), & F_{nm}^{(j)} \geq 0, \\ \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_j}), & F_{nm}^{(j)} < 0, \end{cases} \quad C_1 = C_{(n+1)m};$$

$$C_2 = C_{(n-1)m}, \quad C_3 = C_{n(m+1)}; \quad C_4 = C_{n(m-1)};$$

$$\mathbf{f}_2^{(j)} = \alpha_j \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_{nm}}) + (1 - \alpha_j) \mathbf{f}(\mathbf{r}_{c_j});$$

$$\alpha_j = \left| \frac{\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}} - \mathbf{r}_{c_j}}{\mathbf{r}_{c_{nm}} - \mathbf{r}_{c_j}} \right|;$$

$$\Phi(\eta_j) = \max(0, \min(4\eta_j, 1));$$

$$\eta_j = \left| \frac{\mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) - \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}})}{\mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_j}) - \mathbf{U}(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}})} \right|.$$

Спрощення третього члена у (8) ґрунтується на застосуванні до нього другої форми теореми (10) і подальшому виконанні з поверхневим інтегралом операцій, які дозволили перейти від (16) до (18). Це дає:

$$\iiint_{V_{nm}} \frac{\partial P}{\partial X_i} dV = \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} P n_{ji} dS = \sum_{j=1}^4 P(\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (21)$$

Після цього у (21) значення тиску P у точках $C_{nm}^{(j)}$ визначаються на основі схеми (20).

$$\frac{\frac{3}{2} U_{ic_{nm}}^k - 2U_{ic_{nm}}^{k-1} + \frac{1}{2} U_{ic_{nm}}^{k-2}}{\Delta T} |V_{nm}| + \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} U_{ic_{nm}^{(j)}}^k - \frac{1}{\text{Re}_D} \sum_{j=1}^4 \nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = - \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}^{(j)}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (24)$$

У (24) $F_{nm}^{(j)k}$ є потоком рідини крізь грань $S_{nm}^{(j)}$ у момент $T = k\Delta T$, $P_{c_{nm}^{(j)}}^k$ — тиском у точці $C_{nm}^{(j)}$ в

І нарешті четвертий член у (8) допускає спрощення після представлення його підінтегральної функції у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) = \nabla^2 U_i = \nabla \cdot \nabla U_i,$$

подальшого застосування першої форми теореми (10) і виконання з поверхневим інтегралом дій, які застосовувалися при переході від (16) до (18).

У результаті одержуємо:

$$\iiint_{V_{nm}} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) dV = \sum_{j=1}^6 \iint_{S_{nm}^{(j)}} \nabla U_i \cdot \mathbf{n}_j dS = \sum_{j=1}^4 \nabla U_i |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}} \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}|. \quad (22)$$

Після цього у (22) проводиться така дискретизація похідних $\nabla U_i |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}}$:

$$\nabla f |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}} = \mathbf{e}_i (\partial f / \partial X_i) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(j)}}}; \quad (23)$$

$$(\partial f / \partial X_1) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(1)}}} = (f(\mathbf{r}_{c_{(n+1)m}}) - f(\mathbf{r}_{c_{nm}})) / dX_1;$$

$$(\partial f / \partial X_1) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(2)}}} = (f(\mathbf{r}_{c_{nm}}) - f(\mathbf{r}_{c_{(n-1)m}})) / dX_1;$$

$$(\partial f / \partial X_2) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(3)}}} = (f(\mathbf{r}_{c_{n(m+1)}}) - f(\mathbf{r}_{c_{nm}})) / dX_2;$$

$$(\partial f / \partial X_2) |_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{c_{nm}^{(4)}}} = (f(\mathbf{r}_{c_{nm}}) - f(\mathbf{r}_{c_{n(m-1)}})) / dX_2.$$

Наявність співвідношень (14), (15), (18), (20)-(23) дозволяє записати дискретну форму для (8):

момент $k\Delta T$, швидкості $U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ вираховуються за схемою (20), а для $\nabla U_{ic_{nm}^{(j)}}^k$ використовується схема (23).

Права частина (24) може бути представлена і в такому вигляді:

$$-(\partial P / \partial X_1)_{C_{nm}}^k |V_{nm}|. \quad (25)$$

Що стосується дискретної форми рівняння (9), то вона має такий вигляд:

$$\sum_{j=1}^4 \mathbf{U}_{c_{nm}}^k \cdot \mathbf{n}_j |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 U_{ic_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 F_{nm}^{(j)k} = 0. \quad (26)$$

Дискретні аналоги граничних умов та їх застосування до рівнянь (24), (26)

Дискретні аналоги умов (3)–(5) на границі розрахункової області мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} U_1^k |_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 1.5(1-4X_2^2), \\ U_2^k |_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 0, \\ U_i^k |_{S_{ch}} &= 0, \quad U_i^k |_{S_j} = 0, \quad \partial Q^k / \partial X_1 = 0, \quad Q^k = 1, \\ L_u &\geq 0, 5, \quad L_d \geq 12, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Вони дозволяють знайти $F_{nm}^{(j)k}$ та $\nabla U_{ic_{nm}}^k$ на зазначеній границі у (24) і (26). Дійсно, з (19) і (27) випливає, що

$$F_{nm}^{(j)k} |_{S_{ch}, S_r} = \left(U_{ic_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \right)_{S_{ch}, S_r} = 0, \quad r=1, 2.$$

На вході ж та виході розрахункової області маємо:

$$\begin{aligned} \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=0, D_1/2 \leq X_2 \leq 1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=0, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_1/2} = -\mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1; \\ \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}, D_2/2 \leq X_2 \leq 1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_2/2} = -\mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1; \\ \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1, D_1/2 \leq X_2 \leq 1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_1/2} = \mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1; \\ \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2, D_2/2 \leq X_2 \leq 1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2, -1/2 \leq X_2 \leq -1/2+D_2/2} = \mathbf{e}_1 U_{ic_{nm}}^k / dX_1; \\ \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{0 \leq X_1 \leq L_1, X_2=D_1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{L_1+L_{12} \leq X_1 \leq L_1+L_{12}+L_2, X_2=D_2/2} = -\mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2; \\ \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{0 \leq X_1 \leq L_1, X_2=-1/2+D_1/2} &= \nabla U_{ic_{nm}}^k |_{L_1+L_{12} \leq X_1 \leq L_1+L_{12}+L_2, X_2=-1/2+D_2/2} = \mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2. \end{aligned}$$

Дискретні аналоги граничних умов для тиску (див. (6)) записують таким чином:

$$\begin{aligned} P_{c_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} &= 0, \quad (\partial P^k / \partial X_2)_{S_{ch}} = 0, \\ (\partial P^k / \partial \mathbf{n})_{S_j} &= 0, \quad j=1, 2. \end{aligned}$$

Дискретні аналоги початкових умов та їх застосування до рівнянь (24), (26)

Дискретні аналоги початкових умов (7) виглядають так:

$$F_{nm}^{(2)k} |_{X_1=-L_u} = -1, 5(1-4X_2^2) dX_2 dX_3;$$

$$F_{nm}^{(1)k} |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 1, 5(1-4X_2^2) dX_2 dX_3;$$

$$F_{nm}^{(3)k} |_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = F_{nm}^{(4)k} |_{X_1=-L_u, L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0.$$

Що стосується градієнтів $\nabla U_{ic_{nm}}^k$, то на стінках каналу вони визначаються так:

$$\nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_2=1/2} = -\mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2;$$

$$\nabla U_{ic_{nm}}^k |_{X_2=-1/2} = \mathbf{e}_2 U_{ic_{nm}}^k / dX_2;$$

$$-L_u \leq X_1 \leq 0, \quad L_1 \leq X_1 \leq L_1 + L_{12};$$

$$L_1 + L_{12} + L_2 \leq X_1 \leq L_1 + L_{12} + L_2 + L_d.$$

На вході та виході розрахункової області градієнти виглядають так:

$$\nabla U_{1c_{nm}}^k |_{X_1=-L_u} = -12X_2 \mathbf{e}_2;$$

$$\nabla U_{1c_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} = -12X_2 \mathbf{e}_2;$$

$$\nabla U_{2c_{nm}}^k |_{X_1=-L_u} = 0, \quad \nabla U_{2c_{nm}}^k |_{X_1=L_1+L_{12}+L_2+L_d} = 0.$$

І нарешті на поверхнях звужень $\nabla U_{ic_{nm}}^k$ мають вигляд

$$U_i^{k=0} = 0, \quad P^{k=0} = 0. \quad (28)$$

За їх допомогою можна знайти значення відповідних членів у (24), (26) у початковий момент часу в усій розрахунковій області. Так, з (19), (28) бачимо, що

$$F_{nm}^{(j)k=0} = 0.$$

Градієнти $\nabla U_{ic_{nm}}^k$ у зазначений момент (згідно з (23) та (28)) також дорівнюють нулю:

$$\nabla U_{ic_{nm}}^{k=0} = 0.$$

Нульовими при $T = 0$ (на основі умов (28)) є і похідні у (25):

$$\left(\partial P / \partial X_1\right)_{C_{nm}}^{k=0} = 0, \quad \left(\partial P / \partial X_2\right)_{C_{nm}}^{k=0} = 0,$$

а відтак і самі ці співвідношення.

Розв'язування дискретних рівнянь

Лінеаризація дискретних рівнянь та узгодження полів швидкості і тиску

Рівняння (24), (26) розв'язуються чисельно. При цьому (24) переважно використовується для знаходження швидкості. Рівняння (26) слугує для введення у нього тиску, який потім підставляється у праву частину (24).

При розв'язуванні системи (24), (26) виникають дві проблеми. Перша пов'язана з нелінійністю рівняння (24). Вона потребує використання значних комп'ютерних ресурсів і призводить до величезних витрат часу. Для її вирішення у даній статті проводиться лінеаризація конвективного члена у (24) шляхом використання в $F_{nm}^{(i)k}$ відомих значень швидкості у попередній момент часу. Друга проблема пов'язана з необхідністю узгоджувати поля швидкості і тиску після введення останнього у (26) і проведення зазначеної лінеаризації. У даному дослідженні вона вирішується шляхом виконання відповідних ітерацій. Продемонструємо сказане.

Якщо (24) розв'язати відносно $U_{ic_{nm}}^k$, то одержимо таке рівняння:

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - \left(A_{ic_{nm}}^p / |V_{nm}|\right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (29)$$

Воно, згідно з (25), може бути записане і в такому вигляді:

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - A_{ic_{nm}}^p \left(\partial P / \partial X_i\right)_{C_{nm}}^k. \quad (30)$$

У (29), (30) $A_{ic_{nm}}^0$ містить відомі $U_{ic_{nm}}^{k-1}$, $U_{ic_{nm}}^{k-2}$; $A_{ic_{nm}}^k$ включає у себе потік $F_{nm}^{(j)k}$ та швидкості у центрах мас сусідніх з V_{nm} контрольних об'ємів у момент $T = k\Delta T$; а в $A_{ic_{nm}}^p$ відображене все, що міститься при тисковій або його просторових похідних.

З (29), (30) можна одержати рівняння для швидкості у центрах мас бічних граней об'єму V_{nm} :

$$U_{ic_{nm}}^k = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k - \left\{ \begin{array}{l} \left(A_{ic_{nm}}^p / |V_{nm}|\right) \sum_{r=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ri} |S_{nm}^{(r)}|, \\ A_{ic_{nm}}^p \left(\partial P / \partial X_i\right)_{C_{nm}}^k, \end{array} \right._{j=1, \dots, 4}. \quad (31)$$

Якщо тепер підставити (31) у (19), то одержимо

$$F_{nm}^{(j)k} = U_{ic_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \left(A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k = \right. \\ \left. = - \left\{ \begin{array}{l} \left(A_{ic_{nm}}^p / |V_{nm}|\right) \sum_{r=1}^4 P_{c_{nm}}^k n_{ri} |S_{nm}^{(r)}|, \\ A_{ic_{nm}}^p \left(\partial P / \partial X_i\right)_{C_{nm}}^k, \end{array} \right\} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \right. \quad (32)$$

Підстановка (32) (де беруться похідні тиску) у (26) дає рівняння для тиску:

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^p \left(\partial P / \partial X_i\right)_{C_{nm}}^k n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \\ = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^k \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (33)$$

Далі до системи рівнянь (29)/(30), (33) застосовують метод PISO [6, с. 177], який є процедурою типу предиктор-коректор з двома коректорами.

Предиктор. Тут визначається перше наближення швидкості $U_{ic_{nm}}^{k*}$. Для цього в (29) замість невідомих $P_{c_{nm}}^k$ вводяться відомі $P_{c_{nm}}^{k-1}$, а також проводиться лінеаризація доданка $A_{ic_{nm}}^k$ шляхом введення у потік $F_{nm}^{(j)k}$ відомих $U_{ic_{nm}}^{k-1}$. Це дає таке співвідношення:

$$U_{ic_{nm}}^{k*} = A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^{kl} - \left(A_{ic_{nm}}^p / |V_{nm}|\right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}}^{k-1} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| \quad (34)$$

(тут $A_{ic_{nm}}^{kl}$ є лінеаризованим доданком $A_{ic_{nm}}^k$).

Коректор 1. Після визначення із (34) швидкості $U_{ic_{nm}}^{k*}$, остання використовується для знаходження першого наближення $A_{ic_{nm}}^{k*}$ величини $A_{ic_{nm}}^k$. Далі, шляхом інтерполяції, одержують значення $A_{ic_{nm}}^{k*}$ і підставляють у (33). Це приводить до рівняння для першого наближення тиску $P_{c_{nm}}^{k*}$:

$$\sum_{j=1}^4 A_{ic_{nm}}^p \left(\partial P / \partial X_i\right)_{C_{nm}}^{k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \\ = \sum_{j=1}^4 \left(A_{ic_{nm}}^0 + A_{ic_{nm}}^{k*} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (35)$$

Після цього знайдені із (35) значення $P_{c_{nm}}^{k*}$, а також величини $A_{ic_{nm}}^{k*}$ використовуються у (34) для одержання першої корекції (або другого наближення) швидкості $U_{ic_{nm}}^{k**}$:

$$U_{icnm}^{k**} = A_{icnm}^0 + A_{icnm}^{k*} - \left(A_{icnm}^p / |V_{nm}| \right) \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}^{(j)}}^{k*} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (36)$$

Коректор 2. Відкориговані швидкості (36) використовуються для знаходження другого наближення A_{icnm}^{k**} оператора A_{icnm}^k . Це дає рівняння для другого наближення тиску $P_{c_{nm}^{(j)}}^{k**}$:

$$\sum_{j=1}^4 A_{icnm}^p (\partial P / \partial X_i)_{c_{nm}^{(j)}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}| = \sum_{j=1}^4 \left(A_{icnm}^0 + A_{icnm}^{k**} \right) n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|. \quad (37)$$

Одержані з (37) значення $P_{c_{nm}^{(j)}}^{k**}$, а також A_{icnm}^{k**} підставляються у (36), що дозволяє одержати другу корекцію (або третє наближення) швидкості U_{icnm}^{k***} :

$$U_{icnm}^{k***} = A_{icnm}^0 + A_{icnm}^{k**} - \frac{A_{icnm}^p}{|V_{nm}|} \sum_{j=1}^4 P_{c_{nm}^{(j)}}^{k**} n_{ji} |S_{nm}^{(j)}|.$$

Якщо U_{icnm}^{k***} і $P_{c_{nm}^{(j)}}^{k**}$ не мають потрібної точності, то цикл PISO необхідно повторювати доти, доки точність не досягне заданого значення.

Розв’язування системи лінійних алгебричних рівнянь

Система лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР) (34), (35) може бути записана у вигляді

$$a_{icnm}^k \xi_{icnm}^k + \sum_{j=1}^4 a_{ic_j}^k \xi_{ic_j}^k = b_{icnm}^k, \quad (38)$$

де ξ_{icnm}^k — невідомі.

Для розв’язування таких систем використовують прямі або ітераційні методи. Зазвичай прямі методи застосовують до невеликих СЛАР, що дає гарні результати. Під час роботи з великими СЛАР (особливо із системами, матриці яких є розрідженими) вони призводять до величезних витрат часу, а тому їх використання тут є недоцільним. Ітераційні ж методи при застосуванні до великих СЛАР потребують значно менше комп’ютерної пам’яті і часу (зберігаючи при цьому розрідженість їхніх матриць у разі такої властивості останніх) і дають задовільні результати.

Виходячи зі сказаного, а також з розміру та ступеня розрідженості системи (38), для її розв’язування у даній роботі обирається ітераційний метод. У його рамках спочатку обирається початкове наближення розв’язку, яке потім покращується шляхом ітерацій доти, доки не досягається його наперед задана точність.

При цьому увага приділяється двом особливостям. Перша стосується необхідності забезпечення діагонального домінування в матриці. В даній роботі це реалізується шляхом застосування до конвективного члена методу відкладеної корекції [6, с. 122–124]. Згідно з цим методом, та частина конвективного члена, яка відповідає наведеній у (20) схемі для $f_1^{(j)}$, вбудовується в матрицю, а його решта переноситься у праву частину системи (38).

Друга особливість пов’язана з бажаною мінімізацією кількості ітерацій. Вона досягається шляхом застосування методу спряжених градієнтів [6, с. 107–110]. Цей метод дає можливість розв’язувати систему рівнянь за числом ітерацій, яке не перевищує кількості її невідомих. При цьому, за хорошого вибору початкового наближення кількість ітерацій різко зменшується. Також до суттєвого зменшення кількості ітерацій приводить передобумовлювання. Для цього використовують солвери ICCG (для симетричних матриць [6, с. 111]) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць [6, с. 117]).

Висновки

1. У даній статті розроблено метод розв’язування задачі про рух рідини у плоскому жорсткому каналі з двома осесиметричними звуженнями, який має другий порядок точності.

2. У цьому методі рівняння Нав’є–Стокса і нерозривності розв’язуються шляхом їх інтегрування по елементарних об’ємах (на які розбивається розрахункова область), просторово-часової дискретизації одержаних у результаті цього інтегральних рівнянь і подальшої лінеаризації дискретних співвідношень та узгодження полів швидкості і тиску.

3. Часова дискретизація проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова — на основі TVD-схеми та схеми дискретизації просторових похідних (23).

4. Для розв’язування системи лінійних алгебричних рівнянь застосовується ітераційний метод, який використовує метод відкладеної корекції, метод спряжених градієнтів, а також солвери ICCG (для симетричних матриць) та Bi-CGSTAB (для асиметричних матриць).

ЛІТЕРАТУРА

1. **Borisyuk A. O.** Experimental study of wall pressure fluctuations in rigid and elastic pipes behind an axisymmetric narrowing / A. O. Borisyuk // J. Fluids Str. — 2010. — 26, no. 4. — P. 658–674, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2010.03.005. (eng.)

2. **Borysyuk A. O.** Wall pressure fluctuations behind a pipe narrowing of various shapes / A. O. Borysyuk, Ya. A. Borysyuk // Наукоємні технології. — 2017. — 32, № 2. — С. 162-170, doi: 10.18372/2310-5461.34.11615. (eng.)

3. **Бруяцкий Е. В.** Численное исследование полей скорости и давления в плоском канале при наличии на его стенке квадратного препятствия / Е. В. Бруяцкий, А. Г. Костин, Е. В. Никифорович // Прикл. гидромех. — 2011, 13, № 3. — С. 33–47. (rus.)

4. **Young D. F.** Fluid mechanics of arterial stenosis / D. F. Young // J. Biomech. Eng. — 1979. — 101, no. 3. — P. 157–175, doi: 10.1115/1.3426241. (eng.)

5. **Малюга В. С.** Численное исследование течения в канале с двумя последовательно расположенными стенозами / В. С. Малюга // Прикл. гидромех. — 2010. — 12, № 4. — С. 45–62. (rus.)

6. **Ferziger J. H.** Computational methods for fluid dynamics, 3rd ed. / J. H. Ferziger, M. Perić. — Berlin: Springer, 2002. — 424 p. (eng.)

Борисюк А. О.

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ПРО ТЕЧІЮ В КАНАЛІ З ДВОМА ОСЕСИМЕТРИЧНИМИ ЗВУЖЕННЯМИ

Розроблено метод розв'язування задачі про течію у плоскому жорсткому каналі з двома осесиметричними звуженнями. Цей метод має другий порядок точності. У ньому рівняння Нав'є–Стокса і нерозривності розв'язуються шляхом їх інтегрування по елементарних об'ємах (на які розбивається розрахункова область), просторово-часової дискретизації одержаних у результаті цього рівнянь і подальшої лінеаризації дискретних співвідношень та узгодження полів швидкості і тиску. Часова дискретизація проводиться на основі неявної триточкової несиметричної схеми з різницями назад, а просторова – на основі TVD-схеми та відповідної схеми дискретизації просторових похідних. Для розв'язування системи лінійних алгебричних рівнянь застосовується відповідний ітераційний метод.

Ключові слова: течія; канал; звуження; метод.

Borysyuk A. O.

A METHOD TO SOLVE A PROBLEM OF FLOW IN A CHANNEL WITH TWO AXISYMMETRIC NARROWINGS

A method is developed to solve a problem of flow in a flat rigid channel with two axisymmetric narrowings. The method has a second order of accuracy. In the method, the Navier-Stokes and discontinuity equations are solved by integrating over the elementary volumes (in which the integration domain is divided), spatial and temporal discretization of the obtained equations, as well as subsequent linearization of the discrete relationships and adjustment of the velocity and pressure fields. The temporal discretization is carried out on the basis of the implicit three-point asymmetric backward differencing scheme, whereas the spatial one is based on the TVD-scheme and the appropriate scheme of discretization of the temporal derivatives. An appropriate iterative method is applied to solve a system of linear algebraic equations.

Keywords: flow; channel; narrowing; method.

Борисюк А. А.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ В КАНАЛЕ С ДВУМЯ ОСЕСИМЕТРИЧНЫМИ СУЖЕНИЯМИ

Разработан метод решения задачи о течении в плоском жестком канале с двумя осесимметричными сужениями. Этот метод имеет второй порядок точности. В нем уравнения Навье–Стокса и неразрывности решаются путем их интегрирования по элементарных объемах (на которые разбивается расчетная область), пространственно-временной дискретизации полученных в результате этого уравнений, дальнейшей линейаризации дискретных соотношений и согласования полей скорости и давления. Временная дискретизация проводится на основании неявной трехточечной несимметричной схемы с разностями назад, а пространственная – на основании TVD-схемы и соответствующей схемы дискретизации пространственных производных. Для решения системы линейных алгебраических уравнений применяется соответствующий итерационный метод.

Ключевые слова: течение; канал; сужение; метод.

Стаття надійшла до редакції 24.05.2018 р.

Прийнято до друку 04.06.2018 р.

Рецензент — д-р фіз.-мат. наук, проф. Городецька Н. С.