

УДК 532.542; 532.57; 616.12-008

ВИЗНАЧЕННЯ ВИТРАТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТЕЧІЙ В ТРУБІ ЗІ ЗВИТОСТЮ

А. О. Борисюк, д-р фіз.-мат. наук, старш. наук. співроб; Я. А. Борисюк асп.

Інститут гідромеханіки НАН України

aobor@ukr.net

Розроблено метод, який дає можливість лише за даними відеозапису стаціонарного руху рідини визначити витратні характеристики течії в трубі, а також зміни в них, які спричиняються появою планарної звитості останньої.

Ключові слова: труба; планарна звитість; стаціонарна течія.

A method has been developed that allows one to find flow characteristics in a pipe and the changes in those characteristics, which are caused by a pipe planar tortuosity, proceed from the videorecord of steady fluid motion in that pipe only.

Keywords: pipe; planar tortuosity; steady flow.

Вступ

Дослідження впливу звитості прямих труб на течії в них є актуальним для нафто-газової та хімічної промисловості, будівництва, медицини, комунального господарства, автомобіле- та літакобудування тощо.

Пояснюється це тим, що така нерегулярність геометрії зазначених конструкцій спричиняє, окрім іншого, збільшення їх опору рухові рідини порівняно з відповідними конст-рукціями без звитості, а відтак — зменшення (іноді — суттєве) об'ємної витрати рідини в них. А це, особливо у медицині, може приводити до серйозних наслідків (наприклад, ішемії відповідних органів і тканин тіла, інфаркта міокарда тощо) [1–3].

Таке збільшення опору відбувається внаслідок додаткового вихорового опору локально звитої труби у місцях її згину порівняно з відпоідною прямою трубою, внаслідок більшого впливу на течію сил в'язкості в трубі зі звитістю (якщо довжина звитої ділянки більша за довжину відповідної прямої ділянки), за рахунок зменшення площі поперечного перерізу звитості порівняно з відповідним прямим сегментом труби (яке має місце зазвичай у медицині) [1–3].

Як показує аналіз літератури, вивченню цього явища приділялася значна увага. Проте, на сьогодні не запропоновано неінвазивних методів, які б давали змогу визначати зміни у витратних характеристиках течій у трубах, які зумовлюються появою їх звитості.

У даній статті цей недолік ліквідується. Розроблено метод, який дозволяє швидко та з інженерною точністю знаходити зазначені зміни для

випадку планарно звитих труб і стаціонарних течій в них.

1. Постановка завдання

Розглянуто дві нескінченні прямі жорстко-стінні труби кругового поперечного перерізу діаметром D_0 . В одній з них є скінченна планарно звита ділянка осьового розміру L_0 і діаметра D_w (рис. 1).

Ми обмежуємося розглядом ситуацій, у яких діаметр D_w є таким самим, як і діаметр D_0 , або трохи меншим за нього (в останньому випадку нехтуємо наявністю невеликих перехідних областей від звитості до прямих ділянок труби, оскільки їх вплив на витратні характеристики течії є малим). Перша з цих ситуацій зустрічається при заміні прямого сегмента труби звитим (або навпаки) тих же діаметра і осьового розміру. Вона є типовою для немедичних застосувань. Друга ж найчастіше має місце в медицині, коли звитість з'являється на якійсь ділянці судини, супроводжуючись загальним видовженням та незначним звуженням такої ділянки [1–3]. Випадки ж заміни якогось сегмента труби іншим, який має суттєво інший діаметр та/або інший осьовий розмір, потребують окремого вивчення.

Ця ділянка має N завивок, кожна з яких характеризується висотою A_i та шириною l_i ($i = 1, \dots, N$).

Труби перебувають в однакових умовах, і в них тече одна і та сама рідина. Рух рідини стаціонарний, і його можна візуалізувати. Через більший опір труби зі звитістю витратні характерис-

тики течії в ній менші за відповідні характеристики для прямої труби. Необхідно лише за даними відеозапису зазначеної візуалізації встановити зв'язок цих характеристик та їхніх різниць із параметрами труб. Під завивкою мається на увазі сегмент звитої ділянки труби між двома сусідніми точками перетину її стінки зі штриховою

лінією (рис. 1). Ця лінія відповідає положенню стінки, яке б та займала за відсутності зазначеної ділянки).

Тоді висотою завивки є максимальна відстань від її стінки до штрихової лінії, а шириною — відстань між її кінцями.

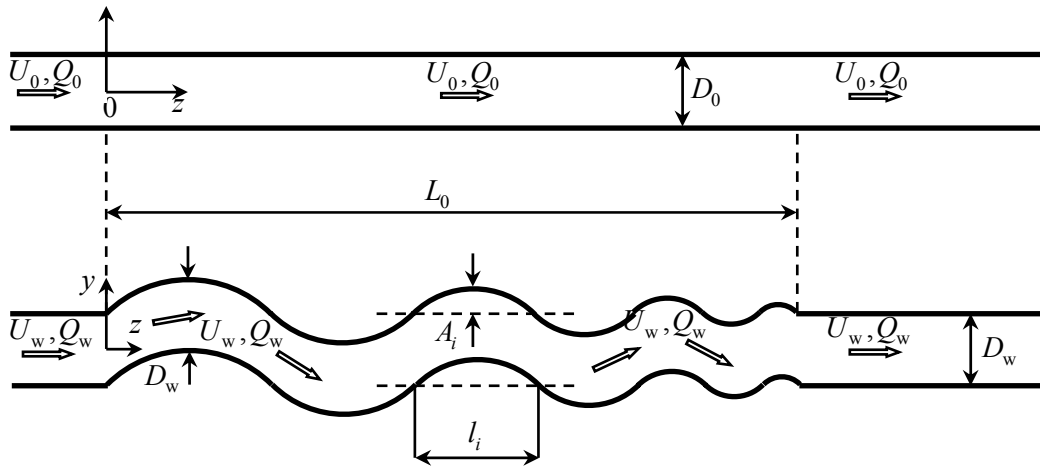


Рис. 1. Геометрія задачі

2. Співвідношення для витратних характеристик течії

Оскільки серед витратних характеристик течії найбільший інтерес зазвичай становлять її об'ємна витрата і середня осьова швидкість у поперечному перерізі труби за її робочою ділянкою [1–3], то саме ним і приділятиметься увага в даній роботі. Під робочою мається на увазі ділянка, на якій або відбувається заміна прямого сегмента труби звитим (чи навпаки), або ж утворюється звитість. Якщо ці величини позначити через Q та U , то їх можна представити виразами

$$Q = \iint_A u dA \quad \text{і} \quad U = \frac{1}{|A|} \iint_A u dA \quad (\text{де } u \text{ — локальна}$$

осьова швидкість рідини у поперечному перерізі труби A , а $|A|$ — його площа). З іншого боку, множення і ділення виразу для Q на $|A|$ і врахування співвідношення для U , дозволяє переписати Q у вигляді $Q = U|A|$.

Для зображених на рис. 1 трубок ці співвідношення переписуться таким чином:

$$Q_0 = \begin{cases} \iint_{A_0} u_0 dA_0, \\ U_0 \pi D_0^2 / 4, \end{cases} \quad Q_w = \begin{cases} \iint_{A_w} u_w dA_w, \\ U_w \pi D_w^2 / 4, \end{cases} \quad (1)$$

$$U_0 = \frac{4}{\pi D_0^2} \iint_{A_0} u_0 dA_0, \quad U_w = \frac{4}{\pi D_w^2} \iint_{A_w} u_w dA_w \quad (2)$$

(тут індекси «0» та «w» показують на належність параметрів відповідно до прямої та звитої труб).

Співвідношення (1), (2) дають можливість визначити шукані характеристики течії в трубах, а відтак і абсолютні та відносні зміни в них:

$$\Delta Q = Q_0 - Q_w, \quad \delta_Q = (\Delta Q / Q_0) \cdot 100 \%,$$

$$\Delta U = U_0 - U_w, \quad \delta_U = (\Delta U / U_0) \cdot 100 \%, \quad (3)$$

які спричиняються досліджуваною звитістю.

Отже, проводити такі розрахунки можна або за наявності необхідної інформації про швидкості u_0 , u_w , або ж коли є можливість знайти об'ємні витрати Q_0 , Q_w чи швидкості U_0 , U_w без попереднього визначення u_0 , u_w .

У першому разі потрібну інформацію можна одержати після проведення прямого числового моделювання течії на робочій ділянці труби, з урахуванням всіх особливостей реології рідини, фізичних властивостей стінки труби, умов її закріплення. Під робочою мається на увазі ділянка, на якій або відбувається заміна прямого сегмента труби звитим (чи навпаки), або ж утворюється звитість.

Проте такий підхід пов'язаний зі значними часовими та фінансовими затратами, а тому є не завжди і не зовсім прийнятним (особливо це стосується кардіології, де треба швидко (а іноді миттєво) приймати рішення, враховуючи при цьому

вартість відповідного перебування пацієнта в клініці).

Безпосереднє визначення витрат Q_0 і Q_w можливе лише шляхом їх вимірювання. Але це передбачає або втручання в роботу досліджуваної трубної конструкції, або ж проведення необхідних вимірювань на ізольованих ідентичних зразках. А це також часто є небажаним, а іноді навіть неможливим.

Що ж стосується знаходження швидкостей U_0 , U_w без попереднього визначення u_0 , u_w , то такий підхід може бути реалізований, наприклад, у разі існування відеозапису руху рідини в досліджуваних трубах. При цьому реологія рідини, фізичні властивості стінки труби, умови її закріплення тощо будуть враховані автоматично (бо вони будуть відображені у відеозапису). Сам же метод визначення характеристик (1) і (2) (тобто метод, який ґрунтуватиметься на цьому підході) буде неінвазивним, потребуватиме незначних часових та фінансових затрат, і матиме інженерну точність.

З огляду на сказане, а також на можливість проведення візуалізації течії, для знаходження величин (1)–(3) надалі вибирається останній підхід.

3. Визначення U та Q

Перш ніж переходити до опису цього підходу, звернемо увагу на одну фізичну особливість математично еквівалентних виразів $Q = \iint_A u dA$ і

$Q = U|A|$, а також на наслідки, які з неї випливають. Справа в тому, що перехід від першого до другого виразу означає не лише перехід від локальної u до середньої U швидкості, але й перехід від розгляду реальної до розгляду усередненої по поперечному перерізу труби течії (бо середня швидкість течії — це швидкість відповідним чином усередненої течії). В усередненій же течії швидкості всіх частинок рідини векторно рівні між собою, а їхні траєкторії є однаковими і мають однакову довжину. А це означає, що в такій течії в трубі: 1) траєкторії всіх частинок є такими самими, як її вісь; 2) шлях L , пройдений ними за проміжок часу Δt , дорівнює довжині відповідної ділянки цієї осі; 3) швидкість частинок (тобто середня осьова швидкість течії U) визначається відношенням шляху L до часу Δt :

$$U = L / \Delta t. \quad (4)$$

Наведені міркування дозволяють лише за даними відеозапису руху рідини у досліджуваних трубах і формулою (4) визначати швидкості U_0

та U_w , а відтак, зі співвідношення $Q = U|A|$, і витрати Q_0 та Q_w .

Відповідна процедура зводиться до чотирьох кроків: 1) визначення (на основі даних відеозапису) відстані L , яку долає фронт барвника при проходженні досліджуваної ділянки труби; 2) встановлення за кількістю кадрів відеозапису та часовим інтервалом одного з них часу Δt , за який зазначений фронт проходить цю відстань; 3) знаходження на основі (4) шуканої швидкості; 4) визначення відповідної об'ємної витрати за формулою $Q = U|A|$.

Для зображених на рис. 1 труб реалізація цих кроків виглядає таким чином.

Пряма труба

Довжина L_0 сегмента цієї труби (який або замінюється звитістю, або на якому утворюється остання) і час T_0 , за який фронт барвника проходить цей сегмент, визначаються з відеозапису відповідно шляхом вимірювання та підрахунку. Тоді швидкість U_0 знаходиться зі співвідношення

$$U_0 = L_0 / T_0, \quad (5)$$

а витрата Q_0 вираховується за відповідною нижньою формулою в (1).

Труба зі звитістю

Відстань L_w , яку долає фронт барвника при проходженні звитої ділянки труби (рис. 1), дорівнює довжині осі цієї ділянки. Оскільки ця вісь має форму неправильної синусоїди, то її логічно апроксимувати такою синусоїдою:

$$y(z) = \pm \begin{cases} y_1(z) = A_1 \sin(\pi z / l_1); \\ y_i(z) = (-1)^{i-1} A_i \sin(\pi(z - l_1 - \dots - l_{i-1}) / l_i); \\ y_N(z) = (-1)^{N-1} A_N \sin(\pi(z - l_1 - \dots - l_{N-1}) / l_N), \\ 0 \leq z \leq l_1; \\ l_1 + \dots + l_{i-1} \leq z \leq l_1 + \dots + l_i; \\ l_1 + \dots + l_{N-1} \leq z \leq l_1 + \dots + l_N \end{cases} \quad (6)$$

(тут знаки + та – відповідають випадкам, коли перша завивка знаходиться відповідно над або під віссю z). Тоді відстань L_w визначатиметься співвідношенням

$$L_w = \sum_{i=1}^N L_i, \quad (7)$$

у якому

$$L_i = \int_{l_1 + \dots + l_{i-1}}^{l_1 + \dots + l_i} \sqrt{1 + (dy_i / dz)^2} dz =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \frac{l_i}{\pi} \sqrt{1+a_i^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k_i^2 \sin^2 x_i} dx_i = \\
 &= 2 \frac{l_i}{\pi} \sqrt{1+a_i^2} E(k_i)
 \end{aligned}
 \quad (8)$$

довжина i -ї завивки осі ($i=1, \dots, N$), $\pi z/l_i = x_i$, $A_i \pi/l_i = a_i$, $k_i = a_i/\sqrt{1+a_i^2}$ ($k_i < 1$), а $E(k_i)$ — повний еліптичний інтеграл другого роду [4].

Наявність шляху (7) і часу T_w , за який цей шлях долається фронтом барвника (T_w визначається з відеозапису за кількістю та часовою довжиною кадрів) дозволяє знайти швидкість U_w :

$$U_w = L_w / T_w, \quad (9)$$

а з її допомогою та відповідною формулою в (1) об'ємну витрату Q_w .

4. Метод

Наведені вище міркування дозволяють запропонувати наступний метод визначення змін у витратних характеристиках течії в трубі, спричинених появою її звитості:

1) за однакових умов створюються стаціонарні течії у звитій та відповідній прямій трубі. Якщо йдеться про застосування цього методу в медицині, то там цей пункт є зайвим (бо течія вже існує, і її у відповідних часових масштабах можна вважати квазістаціонарною);

2) проводиться візуалізація цих течій (шляхом введення в них барвника) та їх відеозапис;

3) із цього відеозапису визначають діаметр D_w поперечного перерізу та осьовий розмір L_0 звитої ділянки, висота A_i та ширина l_i кожної її завивки, а також діаметр прямої труби D_0 (при немедичному застосуванні даного методу ці параметри відомі наперед);

4) на основі значень A_i та l_i ($i=1, \dots, N$) вісь звитої ділянки апроксимується нерегулярною синусоїдою (6).

5) за формулами (7), (8) і таблицями значень інтеграла $E(k_i)$ знаходять довжину L_w цієї осі.

6) за відповідною кількістю кадрів зазначеного відеозапису та часовою довжиною одного з них визначають проміжки часу T_w і T_0 , за які фронт барвника долає відповідно шлях L_w у звитості та відповідну ділянку прямої труби завдовжки L_0 ;

7) На основі (9), (5) та нижніх формул у формулу (1) встановлюють швидкості U_w , U_0 та об'ємні витрати Q_w , Q_0 рідини на досліджуваній звитій і прямій ділянках;

8) За допомогою формули (3) і знайдених значень U_0 , U_w і Q_0 , Q_w вираховують абсолютні та відносні зміни у цих характеристиках течії, які зумовлюються появою локальної планарної звитості прямої труби.

5. Перевірка методу

Описаний метод перевірявся експериментально. Для цього було створено установку, робоча ділянка якої зображена на рис. 2.

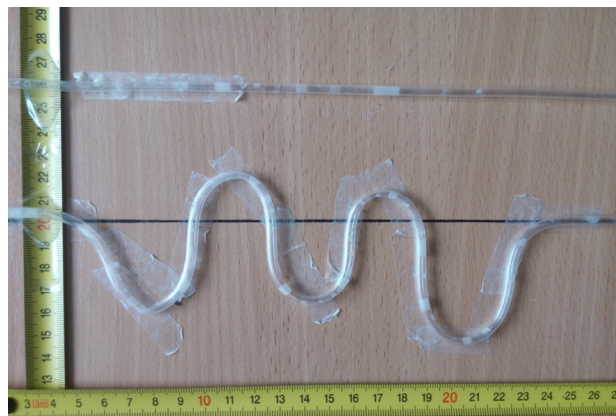


Рис. 2. Робоча ділянка експерименту

Основними елементами цієї установки були два зливних і два приймальних однакових резервуари; дві однакові силіконові трубки внутрішнього діаметра $D_0 = 3$ мм, одна з яких була прямою, а інша — зі звитістю; вимірювальні рулетки; фарба та голки для її введення у трубки; відеокамера; скотч; електронні ваги (для визначення об'єму рідини ΔV , який надходив до

приймального резервуара протягом періоду вимірювань τ , за формулою

$$\Delta V = \Delta m / \rho, \quad (10)$$

(тут Δm — маса рідини, яка потрапляла до цього резервуара за час τ , а ρ — її масова густина).

Робочою рідиною була вода кімнатної температури.

Експериментальна установка функціонувала наступним чином. Зливні та приймальні резервуари з'єднувалися трубками (трубка на пару верхній/нижній резервуар). Одна трубка була прямою, а інша мала скінченну планарно звиту ділянку, форма якої фіксувалася за допомогою скотча. Через сплющування звитої ділянки трубки у місцях згину, яке мало місце за певних значень параметрів звитості A_i та l_i , такі значення в експерименті не розглядалися.

Унаслідок повільно змінюваної різниці між рівнями води у верхніх та нижніх резервуарах протягом часу τ , у трубках створювалися контрольовані квазістаціонарні течії з однаковими різницями тиску на вході та виході робочої ділянки експерименту (це досягалося шляхом вибору однакових рівнів води у відповідних резервуарах). Під робочою мається на увазі ділянка, на якій або відбувається заміна прямого сегмента труби звитим (чи навпаки), або ж утворюється звитість. Повільне введення фарби у трубки через голки, розташовані перед зазначеною ділянкою, дозволяло візуалізувати течії. Одночасно проводився їх відеозапис.

Для створюваних течій в рамках розробленого методу визначалися швидкості U_0 і U_w , а за їх допомогою — об'ємні витрати Q_0 і Q_w . Далі проводився порівняльний аналіз цих даних з відповідними експериментальними даними, на основі якого робився висновок про придатність або непридатність методу для проведення відповідних розрахунків.

Необхідні експериментальні дані визначалися з відповідних вимірювань. Для цього спочатку за допомогою електронних ваг вимірювалися маси води Δm_0 і Δm_w , які одночасно надходили до приймальних резервуарів протягом часу вимірювань τ відповідно через пряму та звиту трубки.

Це дозволяло за допомогою формули (10) знаходити об'єми води ΔV_0 і ΔV_w , а відтак і її об'ємні витрати у трубках Q_0 і Q_w :

$$Q_0 = \frac{\Delta V_0}{\tau} = \frac{\Delta m_0}{\rho \tau}, \quad Q_w = \frac{\Delta V_w}{\tau} = \frac{\Delta m_w}{\rho \tau}. \quad (11)$$

Потім величини (11) використовувалися для визначення U_0 і U_w за нижніми формулами в формулі (1):

$$U_0 = \frac{Q_0}{\pi D_0^2 / 4}, \quad U_w = \frac{Q_w}{\pi D_w^2 / 4}.$$

Нижче наводяться типові результати порівняльного аналізу, одержані для зображеної на рис. 2 конфігурації трубок.

Тут осьовий розмір звитої ділянки L_0 і кількість її завивок N дорівнюють відповідно 200 мм і 5, а значення параметрів звитості A_i та l_i наведені в таблиці.

Параметри звитості

i	1	2	3	4	$N = 5$
A_i , мм	37	19	34	10	49
l_i , мм	48	31	33	27	61
L_i , мм	92	51	77	35	120

Наявність цих даних дозволяє в рамках розробленого методу апроксимувати вісь звитої ділянки нерегулярною синусоїдою (6) і визначити (за допомогою формул (7), (8) і таблиць значень інтеграла $E(k_i)$ [4]) довжини всіх завивок L_i (див. таблицю), а відтак і довжину L_w самої осі ($L_w = 375$ мм).

Тоді значення довжин L_0 ($L_0 = 200$ мм) і L_w , а також знайдені з аналізу відеозапису руху барвника у трубках часові інтервали $T_0 = 0,44$ с і $T_w = 1,04$ с дають можливість вирахувати (на підставі формул (5) і (9)) відповідні швидкості U_0 і U_w :

$$U_0 = 455 \text{ мм/с}, \quad U_w = 361 \text{ мм/с}. \quad (12)$$

Після цього величини (12) і нижні вирази в формулі (1) дозволяють визначити витрати Q_0 і Q_w :

$$Q_0 = 3215 \text{ мм}^3/\text{с}, \quad Q_w = 2550 \text{ мм}^3/\text{с}, \quad (13)$$

а на підставі цих даних і співвідношень (3) — відповідні абсолютні та відносні зміни у цих характеристиках течії, які спричиняються звитістю трубки:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 94 \text{ мм/с}, \quad \Delta Q = 665 \text{ мм}^3/\text{с}, \\ \delta_U &= 20,66 \%, \quad \delta_Q = 20,68 \%. \end{aligned} \quad (14)$$

Порівняльний аналіз величин (12)-(14) з відповідними експериментальними даними (одержаними за описаною вище процедурою):

$$\begin{aligned} U_0 &= 473 \text{ мм/с}; \quad U_w = 371 \text{ мм/с}; \\ Q_0 &= 3341 \text{ мм}^3/\text{с}; \quad Q_w = 2621 \text{ мм}^3/\text{с}; \\ \Delta U &= 102 \text{ мм/с}; \quad \Delta Q = 720 \text{ мм}^3/\text{с}; \\ \delta_U &= 21,56 \%, \quad \delta_Q = 21,55 \%, \end{aligned}$$

засвідчує добру узгодженість між ними.

Подібні результати порівняння (тобто в межах 10 % відповідних відносних різниць) були одержані для всіх інших конфігурацій звитості, використаних у даному експерименті. Це дозволяє говорити про придатність розробленого методу для проведення відповідних розрахунків.

Висновки

1. Розроблено метод, який дає можливість лише за даними відеозапису стаціонарного руху рідини у прямій трубі визначати зміни у її витратних характеристиках, які зумовлюються появою звитості зазначеної конструкції.

2. Цей метод ґрунтується на заміні реальної течії усередненою і подальшому знаходженні її витратних характеристик у термінах відповідних параметрів усередненої течії.

3. Даний метод є неінвазивним, має інженерну точність і дозволяє виключати з розгляду ряд однакових факторів для початково прямої і в подальшому звитої ділянки досліджуваної труби. Крім того, він дає можливість визначати шукані зміни у будь-який момент після проведення відеозапису, не пов'язаний з вирішенням склад-

них технічних завдань, а також не потребує спеціального обладнання, спеціальної фахової підготовки і значних фінансових та часових затрат.

ЛІТЕРАТУРА

1. Groves S. S. Severe coronary tortuosity and the relationship to significant coronary artery disease / S. S. Groves, A. C. Jain, B. E. Warden, W. Gharib, R. J. Beto 2nd. // West Virginia Med. J. — 2009. — Vol. 105, no. 4. — P. 7–14.

2. Hai-Chao Han. Twisted blood vessels: symptoms, etiology and biomechanical mechanisms / Han Hai-Chao // J. Vasc. Res. — 2012. — Vol. 49. — P. 185–197.

3. Борисюк А. О. Метод визначення гемодинамічної значущості патологічної звитості коронарних артерій у хворих на коронарний синдром X. — Ч. 1. Планарна звитість / А. О. Борисюк // Прикл. гідромех. — 2014. — Т. 16, № 3. — С. 23–35.

4. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.