

УДК 532.517

**ВПЛИВ ЗМІНИ ГЛИБИНИ ПРИБЕРЕЖНОЇ СМУГИ  
НА СПЕКТР НЕРЕГУЛЯРНОГО ХВИЛЮВАННЯ**<sup>1</sup>*Н. С. Городецька*, д-р ф.-м. наук, проф.;<sup>1</sup>*В. І. Нікішов*, чл.-кор. НАН України, д-р. ф.-м. наук, проф.; <sup>2</sup>*Т. М. Щербак*<sup>1</sup>Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

e-mail: nsgihm@gmail.com

<sup>2</sup>Національний транспортний університет, Київ

e-mail: vinihm@gmail.com

*Досліджено трансформацію спектру нерегулярного хвилювання за наявності різкої зміни глибини прибережної смуги. Розглянуто модель спектру, яка являє собою суперпозицію двох ТМА спектрів із різними частотами спектральних максимумів. По аналогії з RDT (Rapid Distortion Theory) для дослідження трансформації спектру застосовано лінійний підхід. Методом поліпшеної редуції знайдено коефіцієнт проходження хвилями області з різкою зміною глибини залежно від хвильового числа падаючої хвилі. Проаналізовано особливості трансформованого спектру для різних параметрів завдання, зокрема, показано, що після уступу спектральні амплітуди зростають і довжини відповідних хвиль зменшуються, тобто хвилі стають більш крутішими.*

**Ключові слова:** поверхневі хвилі, трансформація, спектр, нерегулярне хвилювання.

*Transformation of the irregular wave spectrum in the presence of sharp change of depth of coastal zone is studied. The superposition of two TMA spectra with different frequencies of spectral maximums is used as the spectrum model. Following RDT (Rapid Distortion Theory) approach, the linear theory for investigating of the of spectrum transformation under action of abrupt change of the depth is applied. The coefficient of transmission over step depending on wave number of incident wave have been obtained on the base of the improve reduction method. The features of transformed spectrum for different parameters of task are analyzed. It is shown that spectral amplitudes grow after step and corresponding wave lengths decrease, that is, wave become more steep.*

**Keywords:** surface waves, transformation, spectrum, irregular sea waves.

**Вступ**

Проблема поширення поверхневих гравітаційних хвиль у водоймах кінцевої глибини за наявності різного роду топографічних неоднорідностей донної поверхні або занурених у рідину (в тому числі частково) штучних конструкцій, призначених для захисту берегової зони від руйнування, залишається актуальною і на сьогодні, про що свідчать численні публікації результатів досліджень. Серед робіт присвячених даній тематиці можна виділити клас задач, у яких розглядаються хвильові рухи в займаній рідиною області, схематично розділеної на окремі зони, які мають вертикальні границі, а глибина, в кожній із них, є постійною. До них належать завдання поширення і розсіювання поверхневих хвиль на прямокутній перешкоді, тобто при різкій зміні глибини басейну, на плаваючій перешкоді, на западині донної поверхні та ін. Більш того, довільний профіль донної поверхні може бути представлений у ступінчастому вигляді, і особливості поширення поверхневих хвиль над таким профілем може бути досліджено шляхом вирішення завдання про трансформацію хвиль заданою сукупністю ступінчастих структур.

Інформація про амплітудно-частотні характеристики хвиль, що розсіюються на перешкодах,

необхідна для конструювання вказаних споруд, для оцінки впливу хвиль на берегову смугу. Така інформація міститься, зокрема, в даних про енергетичні спектри, які розраховуються на основі натурних спостережень. Хвильовий спектр описує розподіл енергії по частотах  $\omega$  і напрямках поширення хвиль. У статті досліджується трансформація хвильового спектру на прямокутній зануреній перешкоді (уступі) у однонапрявленому випадку, тобто розглядається тільки частотний спектр  $S(\omega)$  вітрового хвилювання.

**Спектральна модель**

Однією із математичних моделей частотного спектру вітрового хвилювання на глибокій воді, яка добре відповідає експериментальним даним, є модель спектру JONSWAP  $S_j(\omega)$ . Цей спектр є подальшим розвитком спектру Пирсона–Московица із уточненням його форми поблизу спектрального максимуму  $\omega_m$  [1]. Запропоновано і інші апроксимуючі залежності для спектру вітрового хвилювання, які адаптовані до конкретних зовнішніх умов. Відзначимо, що спектр JONSWAP є одним з найбільш використовуваних для моделювання характеристик вітрового хвилювання. У ці моделі спектрів не входить явно глибина рідини.

Інформація про розподіл спектральної щільності у випадку рідини кінцевої глибини є безперечно важливою, враховуючи використання її в океанографічних і інженерних додатках. У праці [2] запропонована видозмінена форма спектра JONSWAP, у якій враховується кінцева глибина рідини  $H_1$ . Цей спектр являє собою добуток спектра JONSWAP і поправки Китайгородського  $F(k_1 H_1)$ , що враховує ефект кінцевої глибини, так званий ТМА-спектр, де  $k_1$  — хвильове число. Реальні спектри зазвичай проявляють відхилення від стандартних моделей, наприклад, коли разом із вітровими хвилями існують брижі (змішане хвилювання), і хвильовий спектр має двопікову форму. Відповідно до праці [3] будемо розглядати модель двопікового спектру, який являє собою суперпозицію двох ТМА-спектрів з різними частотами спектральних максимумів  $\tilde{\omega}_m^{(1)}$  і  $\tilde{\omega}_m^{(2)}$

$$SP(\tilde{\omega}) = [S_J^{(1)}(\tilde{\omega}) + S_J^{(2)}(\tilde{\omega})] F(k_1 H_1); \quad (1)$$

$$S_J^{(1)}(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(1)}} \right)^{-4} \right] \gamma^\Gamma;$$

$$S_J^{(2)}(\tilde{\omega}) = \alpha \frac{H_1^{5/2}}{\tilde{\omega}^5 g^{1/2}} \exp \left[ -\frac{5}{4} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{\omega}_m^{(2)}} \right)^{-4} \right] \gamma^\Pi;$$

$$\Gamma = \exp \left[ -\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(1)})^2}{2\sigma_1 (\tilde{\omega}_m^{(1)})^2} \right];$$

$$\Pi = \exp \left[ -\frac{(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_m^{(2)})^2}{2\sigma_2 (\tilde{\omega}_m^{(2)})^2} \right];$$

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_a = 0,07 & \text{якщо } \tilde{\omega} \leq \tilde{\omega}_m^{(1)}, \\ \sigma_b = 0,09 & \text{якщо } \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(1)}; \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_a = 0,07 & \text{якщо } \tilde{\omega} \leq \tilde{\omega}_m^{(2)}, \\ \sigma_b = 0,09 & \text{якщо } \tilde{\omega} > \tilde{\omega}_m^{(2)}; \end{cases}$$

$$F(k_1 H_1) = \text{th}^2 k_1 H_1 \frac{\text{sh} 2k_1 H_1}{\text{sh} 2k_1 H_1 + 2k_1 H_1};$$

$$\alpha = 0,012, \quad \gamma = 3,3, \quad \tilde{\omega} = \omega \sqrt{H_1/g},$$

де  $g$  — прискорення сили тяжіння,

### Розсіювання поверхневих хвиль

Вважаємо, що на уступ падає монохроматична хвиля з частотою  $\omega$ , що поширюється вздовж горизонтальної осі  $x$  з  $x = -\infty$ .

Глибина рідини до уступу дорівнює  $H_1$ , а після —  $H_2$ . Розташування уступу та системи координат з началом відліку на вільній поверхні показано на рис. 1.

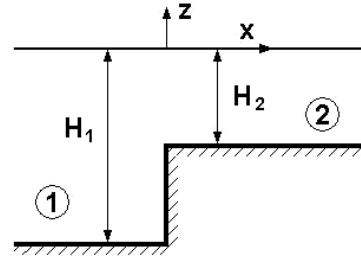


Рис. 1. Схема уступу та системи координат

Падаючі хвилі частково відбиваються від уступу і частково проходять над ним. Поведінка лінійних поверхневих хвиль, що поширюються вздовж вільної поверхні ідеальної нестисливої рідини кінцевої глибини  $H_1$ , описується рівнянням Лапласа для потенціалу швидкості

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

з відповідними граничними умовами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{якщо } z = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad \text{якщо } z = -H_1. \quad (4)$$

Вважаємо, що змінні залежать від часу за гармонічним законом  $e^{-i\omega t}$ . Розв'язок рівняння (2) з граничними умовами (3) і (4), що описує хвилю з амплітудою  $a$ , що поширюється в напрямку додатної осі  $x$  має вигляд

$$\Phi = -\frac{i a g}{\omega} \frac{\cosh k(z_1 + H_1)}{\cosh k_1 H_1} e^{i(k_1 x - \omega t)}. \quad (5)$$

Хвильове число падаючої хвилі є дійсним коренем дисперсійного рівняння

$$\omega^2 = k_1 g \tanh k_1 H_1. \quad (6)$$

Це рівняння має також нескінченну множину чисто уявних коренів  $\kappa_n$ , які є розв'язком наступного рівняння

$$\omega^2 = -\kappa_n g \tan \kappa_n H_1. \quad (7)$$

Введемо характерні масштаби довжини  $L_{ch} = H_1$  і часу  $T_{ch} = \sqrt{H_1/g}$ . У безрозмірному вигляді вираз, описує потенціал в області 1 з урахуванням існування неоднорідних хвиль, корені яких є чисто уявними, має вигляд (гармонічний множник за часом опускаємо)

$$\Phi_1 = \left( e^{ik_1 x} + R e^{-ik_1 x} \right) \frac{\cosh k_1 (z + H_1)}{\cosh k_1 H_1} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{\kappa_n x} B_n \frac{\cos \kappa_n (z + H_1)}{\cos \kappa_n H_1} \quad (8)$$

і для області 2

$$\Phi_2 = T e^{ik_1 x} \frac{\cosh k_2 (z + H_2)}{\cosh k_2 H_2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha_n x} C_n \frac{\cos \alpha_n (z + H_2)}{\cos \alpha_n H_2}, \quad (9)$$

де  $R$  і  $T$  — коефіцієнти відбиття та проходження, відповідно; хвильові числа  $k_2$  і  $\alpha_n$  є коренями відповідних безрозмірених дисперсійних рівнянь

$$\omega^2 = k_2 H_2 \tanh k_2 H_2, \quad \omega^2 = -\alpha_n H_2 \tan \alpha_n H_2,$$

коефіцієнти  $B_n$  і  $C_n$  визначаються із умов спряження розв'язків у площині  $x = 0$

$$\Phi_1 = \Phi_2 \text{ якщо } -H_2 < z < 0; \quad (10)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} & \text{якщо } -H_2 < z < 0, \\ 0 & \text{якщо } -H_1 < z < -H_2. \end{cases} \quad (11)$$

Традиційний шлях розв'язання даного завдання за допомогою розвинення розв'язків у ряд за власними функціями полягає у підстановці виразів (8) і (9) в умови спряження (10) і (11). Отримана система функціональних рівнянь зводиться до нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів  $B_n$  і  $C_n$  на основі використання ортогональних властивостей власних функцій. Як правило, такі системи розв'язуються методом редукції. Для отримання стійкого розв'язку необхідно розглядати систему високого порядку, що пов'язано з існуванням особливості (в даному випадку степеневі) за швидкістю у кутовій точці уступу [4]. У праці використовується метод поліпшеної редукції, який враховує існуючу сингулярність. Вираз, що описує сингулярність, розвинено в ряд за тими самими власними функціями, і за допомогою властивості їх ортогональності і подається у вигляді асимптотичного ряду.

Як наслідок, можна розглядати системи рівнянь меншого порядку, а внесок високочастотних мод урахується асимптотично. Детально ця методика викладена в праці [5], у якій розглянуто розсіювання хвиль тонким бар'єром. Було продемонстровано ефективність запропонованого метода.

На основі такого підходу в даній статті розраховано залежності коефіцієнта проходження  $T$  від хвильового числа падаючої хвилі  $k_1$ .

На рис. 2 показано залежність  $T = T(k_1 H_1)$  для різних співвідношень  $\mu = H_2/H_1$ . де криві 1, 2, 3, 4 відповідають наступним значенням  $\mu = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7$ . Відмітимо, що розраховані коефіцієнти  $T$  графічною точністю співпадають з даними праці [6].

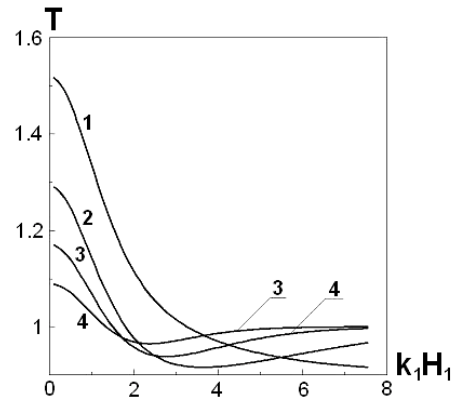


Рис. 2. Залежність коефіцієнта  $T$  від  $k_1 H_1$

### Трансформація спектра поверхневих хвиль

Вважаємо, що набігаюче хвилювання являє собою суперпозицію великої кількості хвильових компонент, амплітуда яких визначається спектром. Як моделі, що відмічено вище, розглянемо двопіковий спектр ТМА (1). Розглянемо процес формування спектру вітрового хвилювання і взаємодії з крутими неоднорідностями донної поверхні. Відомо, що формування спектру відбувається за рахунок нелінійної взаємодії вітру і хвиль на поверхні, а також шляхом три- та чотиримодових нелінійних взаємодій спектральних компонент. Цей процес потребує достатньо багато часу (велика довжина хвильового нагону). Під дією різкої зміни глибини потоку цей процес не встигає переформуватись і в такому випадку можна говорити про лінійне моделювання трансформації нерегулярного хвилювання. Тут простежується певна аналогія з різкою зміною поведінки розвиненої турбулентності, спектр якої також формується за рахунок взаємодії спектральних складових.

Такий підхід, коли викривлення, обумовлені деформаційними переміщеннями, масовими силами та ін., прикладаються до поля турбулентності швидкості, дозволяє врахувати зміни деяких (або всіх) компонент турбулентності на основі лінійної теорії швидких викривлень (Rapid Distortion Theory) [7]. У випадку, що розглядається, виникає швидке «викривлення» окремих спектральних складових під впливом різкої зміни донної поверхні, і результати їх нелінійної взаємодії будуть проявлятися пізніше у міру поширення хвиль в області за уступом. Відмітимо, що такий підхід було здійснено в праці [8] при розгляді трансформації однопікового спектру JONSWAP на вертикальному бар'єрі.

Розглянемо випадок, коли глибина рідини перед уступом складає 10 м. Частоти спектральних максимумів прийемо рівними (у розмірному вигляді):

$$\omega_m^{(1)} = 2\pi 0,125 \text{ рад/с},$$

$$\omega_m^{(2)} = 2\pi 0,1875 \text{ рад/с}.$$

Відмітимо, що такі частоти було використано в праці (Ohle, 2005) при моделюванні впливу форми спектру на параметри хвилювання. Аналіз даних щодо залежності частот спектральних максимумів від величини хвильового нагону (Ochi, 1998) показує, що наприклад, при швидкості вітру  $U_{10} = 10$  м/с (на висоті 10 м над рівнем моря) частота спектрального максимуму вітрового хвилювання знаходиться в межах від 0.1 Hz до 0.3 Hz.

На рис. 3 показано двопиковий спектр поверхневого хвилювання, який отримано на основі формули (1).

Розмірність спектральної щільності —  $\text{м}^2 \cdot \text{с}$ . Аналіз натурних даних показує, що низькочастотний пік відповідає хвилям брижі, а високочастотний — вітровому хвилюванню. Основна енергія сконцентрована у довгохвильовій частині спектру.

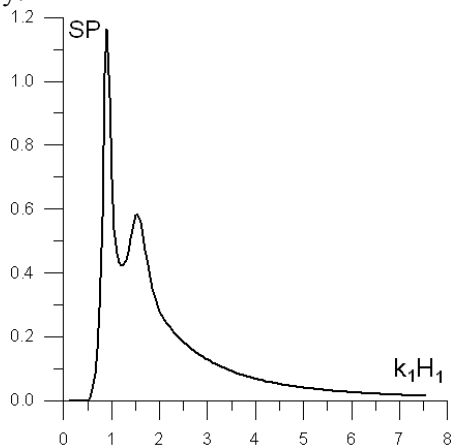


Рис. 3. Двопиковий спектр

Як приклад, вид трансформованого спектру  $SP^T = SPT^2$  для параметра  $\mu = 0,1$  і  $\mu = 0,3$  залежно від  $k_2 H_2$ , показано на рис. 4, 5.

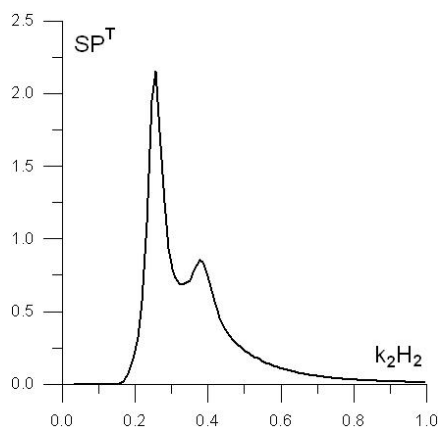


Рис. 4. Трансформований спектр:  
 $H_1 = 10$  м,  $H_2 = 1$  м

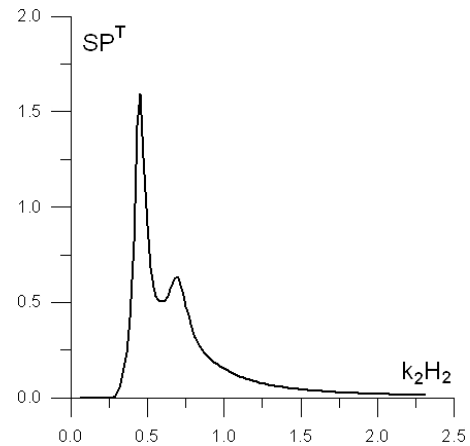


Рис. 5. Трансформований спектр:

$$H_1 = 10 \text{ м}, H_2 = 3 \text{ м}$$

$$1,16 \text{ м}^2 \cdot \text{с} \text{ і } 0,57 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$$

Аналіз результатів показав, що значення спектральних піків зростають із зменшенням глибини  $H_2$ . Так, у випадку  $H_2 = 1$  м ці величини дорівнюють  $2,15 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  (низькочастотний пік) і  $0,85 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  (другий пік). Для  $H_2 = 3$  м ці величини дорівнюють відповідно  $1,6 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$  і  $0,66 \text{ м}^2 \cdot \text{с}$ . Для порівняння наведемо ці самі величини в області до уступу:

Інша не менш суттєва особливість трансформації спектрів пов'язана із зменшенням довжин відповідних хвиль. Наприклад, довжина хвилі, що відповідає низькочастотному піку спектру до уступу, зменшується над уступом в 1,7 рази при  $H_2 = 3$  м, і для другого піку — у 1,5 разу. Іншими словами, хвилі над уступом стають більш короткими. Із зменшенням  $H_2$  хвилі стають ще більш короткими.

## Висновки

Отримані результати показують, що коли хвилі поширюються над уступом, відбувається суттєва перебудова спектрів поверхневого хвилювання.

Форма спектру залишається подібною до спектру хвиль, що падають на перешкоду, але змінюються максимальні значення відповідно до коефіцієнта проходження, тобто амплітуди хвиль зростають.

Крім того, спектр стає більш вузьким, тобто довжина хвиль зменшується і хвилі стають більш крутими. Чим менше глибина  $H_2$ , ці ефекти стають більш сильнішими. Інформація про трансформований спектр є важливою, оскільки дає змогу на її основі отримати дані про розподіл періодов та амплітуд хвиль, що є необхідним для оцінки ступеня впливу хвиль на берег, для проектування берегозахисних споруд.

**ЛІТЕРАТУРА**

1. *Ochi M. K.* Ocean waves. The stochastic approach / M. K. Ochi. — Cambridge University Press, 1998. — 333 p.
2. *Bouws E.* Similarity of the wind wave spectrum in finite depth water : 1. Spectral form / E. Bouws, H. Gunther, W. Rosenthal and C. L. Vincent // *J. Geophys. Res.* — 1985. — 90, No. C1. — P. 975–986.
3. *Ohle N.* Influence of spectral shape on wave parameters and design method in time domain / N. Ohle, K.-F. Daemrich, E. Tautenhain // *Ocean waves measurement and analysis. 5<sup>th</sup> Int. Symp. WAVES 2005, 3<sup>rd</sup>–7<sup>th</sup> July, 2005, Madrid, Spain, Paper No. 150, 10 p.*
4. *Гринченко В. Т.* О локальных особенностях в математических моделях физических полей / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко // *Мат. методы и физ.-мех. поля.* — 1998. — 41, № 1. — С. 12–34.
5. *Городецкая Н. С.* О рассеянии поверхностных гравитационных волн тонкими вертикальными барьерами / Н. С. Городецкая, Т. Н. Миргородская, В. И. Никишов // *Прикладная гидромеханика.* — 2015. — 17, № 2. — С. 9–19.
6. *Tsai C.-C.* On step approximation for Roseau's analytical solution of water waves / C.-C. Tsai, T.-W. Hsu, Y.-T. Lin // *Hindawi Publishing Corporation, Mathematical Problems in Engineering.* — 2011. — 2011, Article ID 607196. — P. 1–20.
7. *Hunt J. R. C.* Rapid distortion theory and the 'problem' of turbulence / J. R. C. Hunt, D. J. Carruthers // *J. Fluid Mech.* — 1990. — 212. — P. 497–532.
8. *Losada I. J.* Wave spectrum scattering by vertical thin barriers / I. J. Losada, M. A. Losada, R. Losada // *Applied Ocean Res.* — 1994. — 16. — P. 123–128.

Стаття надійшла до редакції 06.07.2016