УДК 517.58 + 519.652

УЗАГАЛЬНЕНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ТА КЛАСИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ ЗГОРТОК

В. П. Денисюк д-р фіз.-мат. наук, проф.

Національний авіаційний університет

kvomden@nau.edu.ua

Розглянуто клас узагальнених тригонометричних функцій, які подаються розбіжними тригонометричними рядами; коефіцієнти цих рядків мають певний порядок зростання. Такі функції не мають значень у звичайному розумінні і виявляються лише у вигляді згорток з основними функціями. Класи основних функцій складаються з парних періодичних функцій, які або задаються обраними коефіцієнтами Фур'є, або мають певні диференціальні властивості. Отже, узагальнені тригонометричні функції є аналогом відомих δ-функцій Дірака. Розглянуто операції диференціювання та інтегрування узагальнених тригонометричних функцій. Детально досліджено клас узагальнених тригонометричних функцій нульового порядку, коефіцієнти яких утворюють N-періодичні послідовності. Такі функції за певних умов, отриманих у роботі, мають інтерполяційні властивості. В статті наведено результати обчислень для тестового прикладу; ці результати добре узгоджуються з теоретичними положеннями.

Ключові слова: узагальнені тригонометричні функції, узагальнені δ-функції Дірака, основні функції, розбіжні ряди Фур'є, згортка, інтерполяція.

We consider a class of generalized trigonometric functions given by the divergent trigonometric series; coefficients of these series have a certain order of growth. These functions have no values in usual sense and manifest themselves only as convolution with the test functions. Classes of test functions are formed by even periodical functions that are either defined by chosen Fourier coefficients or have certain differential properties. Therefore generalized trigonometric functions are analogous to well known Dirac δ-functions. The operations of differentiation and integration of these generalized trigonometric functions are considered. The class of generalized trigonometric functions of zero order with coefficients forming N-periodical sequences is investigated in details. Such functions under certain conditions that are received in this paper have interpolating properties. The results of calculations for the test example are given; these results are well correlated to those predicted by theory.

Keywords: generalized trigonometric functions, generalized Dirac δ-functions, test functions, divergent trigonometric series, convolution, have interpolation.

Вступ

Як відомо, тригонометричним рядом називають вираз

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt + b_k \sin kt ,$$

де a_0, a_k, b_k — дійсні числа ($k=1,2,\ldots$).

Тригонометричні ряди можуть як збігатися так і розбігатися. У випадку, коли ці ряди збігаються рівномірно, їх називають рядами Фур'є; сумою рядів Фур'є є неперервні періодичні функції з періодом 2π .

У багатьох випадках доводиться мати справу з розбіжними тригонометричними рядами, які не мають суми у звичайному розумінні [1].

Такі ряди часто виникають у теоретичних дослідженнях та при формальному диференціюванні рядів Фур'є.

Так, наприклад, при теоретичних дослідженнях рядів Фур'є виникає необхідність дослідження ряду типу

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos kt ,$$

який є розбіжним у кожній точці інтервалу $[0,2\pi]$.

Одним з варіантів використання таких рядів полягає в тому, що досліджують частинні суми порядку n цих рядів. Так, наприклад, так було отримано ядро Діріхле та інтеграл Діріхле. Недоліком такого підходу є неможливість здійснення граничного переходу $n\to\infty$.

Іншим варіантом побудови сум розбіжних рядів є підхід, за якого дають нове визначення суми ряду, застосоване як для всіх збіжних рядів, так і для певних класів розбіжних рядів [1]. Цей підхід досить розвинений і застосовується до широкого класу числових та функціональних рядів.

Постановка проблеми

Розробка нового підходу до розбіжних тригонометричних рядів певного класу, за якого ці ряди розглядаються як узагальнені тригонометричні функції.

Аналіз досліджень і публікацій

Розбіжні ряди у різні роки розглядалися відомими математиками Л. Ейлером, Г. В. Лейбніцем, Ж. Л. Д'аламбером, Ж. Л. Лагранжем, Я. Бернуллі, Н. Х. Абелем, Л. Фробеніусом, О. Гельдером, С. Д. Пуассоном, Г. Вороним, С. Бернштейном, В. Рогозинським, С. Нікольським, С. Стечкіним та багатьма іншими [1].

Сучасна теорія підсумовування розбіжних рядів почала стрімко розвиватися у кінці XIX — початку XX ст. Цьому значно сприяло те, що було з'ясовано зв'язки цієї теорії з іншими математичними дисциплінами. Так, Б. Чезаро (1880) провадив свої методи підсумовування в зв'язку з розглядом задачі про перемноження рядів; Е. Борель (1895–1901) вивчав «метод Бореля» в зв'язку із дослідженням аналітичного продовження функцій; нарешті, Л. Фейєр (1904) показав, яку користь може принести теорія підсумовування рядів теорії рідів Фур'є. Цей період переважно завершився друком першої обзорної монографії Е. Бореля (1901), присвяченої розбіжним рядам.

Розбіжні ряди та методи їх підсумовування розглядаються також в класичних монографіях Н. Барі, А. Зігмунда, в курсах математичного аналізу, довідниках тощо. Найбільш відомою монографією, присвяченою дослідженню лише розбіжних рядів є монографія Г. Харді, де наведено велику кількість різноманітних методів підсумовування розбіжних рядів.

Як відомо [1], розбіжні ряди не мають суми у звичайному розумінні. Одним з підходів до побудови їх суми є підхід, за якого дають нове визначення суми ряду, застосовне як для всіх збіжних рядів, так і для певних класів розбіжних рядів. Такий підхід досить розвинений і застосовується до широкого класу числових та функціональних рядів.

Мета статті — подальше розроблення теорії узагальнених тригонометричних функцій, зокрема, введення операцій диференціювання та інтегрування цих функцій. Дослідження згорток узагальнених тригонометричних функцій підкласу $G(\rho, N)$ з основних функцій відповідних порядків; отримання умов, за яких такі згортки мають інтерполяційні властивості. Ілюстрація теоретичних положень тестовим прикладом.

Основна частина

Для певних класів розбіжних тригонометричних рядів можна запропонувати підхід, за якого цей розбіжний ряд визначає деяку узагальнену функцію. У праці [2] введено клас узагальнених тригонометричних функцій порядку ρ ($0 \le \rho < \infty$), що подаються розбіжними тригонометричними рядами типу

$$\varphi(\rho,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho)\cos kt + b_k(\rho)\sin kt\,, \qquad (1)$$

де коефіцієнти $a_k(\rho)$, $b_k(\rho)$, ($k = 1, 2, \ldots$) задовольняють умовам

$$\left|a_k(\rho)\right|,\ \left|b_k(\rho)\right| \le Ck^{\rho}\,, \quad 0 < C < \infty\,. \qquad (2)$$

Оскільки ряд (1), який визначає функції $\varphi(\rho,t) \in G(\rho)$, є розбіжним у кожній точці відрізку $[0, 2\pi]$, то функції $\varphi(\rho,t)$ не є функціями у звичайному розумінні; у подальшому такі функції будемо називати узагальненими тригонометричними функціями.

Позначимо символом $G(\rho)$ клас узагальнених тригонометричних функцій порядку ρ. Зрозуміло, що коефіцієнти $a_k(0)$, $b_k(0)$ функцій класу $G(0)$ являють собою числові послідовності, обмежені зверху сталою C.

Як вже було показано, узагальнені тригонометричні функції проявляються лише у вигляді згортки з функціями певних класів, які можна назвати основними. Обмежимось розглядом класів основних функцій $\mu(r,t)$, які можуть бути подані рядом Фур'є

$$\mu(r,t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k(r)\cos kt\,, \quad (r > 1), \qquad (3)$$

де коефіцієнти Фур'є $\nu_k(r)$, ($k = 1, 2, \ldots$), мають порядок спадання $O(k^{-r})$. Зрозуміло, що такі основні функції є парними періодичними функціями; клас таких функцій позначимо $P(r)$.

Припустимо, що деяка функція $\mu(r,t) \in P(r)$ є головною для узагальненої тригонометричної функції $\varphi(\rho,t) \in G(\rho)$. Якщо згортка функцій $\mu(r,t)$ і $\varphi(\rho,t)$, визначається формулою

$$F(\varphi,\mu,t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho, t-\tau)\mu(r,\tau)\,d\tau\,, \qquad (4)$$

звичайною функцією, природно вважати згортку $F(\varphi,\mu,t)$ результатом дії функції узагальненої функції $\varphi(\rho,t)$ на основну функцію $\mu(r,t)$.

Зрозуміло, що таке становище аналогічно ситуації із δ-функціями Дірака: як відомо, δ-функція не є функцією у звичайному розумінні і задається лише на класах основних функцій [3]. Проте, слід зазначити і певні відмінності узагальнених тригонометричних функцій від δ-функціями Дірака. Так, зокрема, узагальнені тригонометричні функції залежать від параметра ρ; зрозуміло, що параметр r, що визначає клас основних функцій $P(r)$ певною мірою пов'язаний з цим параметром.

Згортку (4) можна подати у вигляді

$$F(\varphi,\mu,\rho,r,t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\rho, t-\tau)\mu(r,\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{a_0}{2}\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\nu_k(r)\left[a_k(\rho)\cos kt+b_k(\rho)\sin kt\right], \quad (5)$$

за умови рівномірної збіжності ряду у правій частині формули (5).

Зрозуміло, що добутки коефіцієнтів $\nu_k(r)a_k(\rho)$ та $\nu_k(r)b_k(\rho)$, що входять до формули (5), мають порядок спадання $O(k^{-(r-\rho)})$. Для рівномірної збіжності цього ряду, згідно з ознакою Вейєрштрасса, достатньо, щоб виконувалася умова $r-\rho>1$; отже $r>1+\rho$.

Отже, можна зробити висновок про те, що клас узагальнених тригонометричних функцій $G(\rho)$ є заданим на класі основних функцій $P(r)$, де параметри ρ і r пов'язані співвідношенням $r>1+\rho$.

У праці [2] було розглянуто варіанти вибору основних функцій, коефіцієнти Фур'є яких задовольняють цій умові. Так, зокрема, коефіцієнтами Фур'є основних функцій можуть виступати члени послідовностей типу $\frac{\psi(k)}{k^r}$, $\sin\frac{\psi(k)}{k^r}$, де $\psi(k)$ деякі обмежені функції, не рівні тотожно 0. При цьому основні функції подаються рівномірно збіжними рядами

$$\mu(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k^r}\cos kt,$$

$$\mu(r,t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{\psi(k)}{k^r}\cos kt.$$

Такий підхід надає можливості конструювати необхідні основні функції.

Як основні функції також можна використовувати періодичні, парні неперервні функції, які мають неперервні похідні до порядку $[\rho]$ включно, а похідні порядку $[\rho]+1$ мають обмежену варіацію. За цих умов коефіцієнти Фур'є функцій мають порядок спадання $O([\rho]+2)$.

За такого підходу, як основні функції можуть виступати класи функцій з керованою гладкістю, зокрема, класи поліноміальних B-сплайнів, класи тригонометричних та поліноміальних фундаментальних функцій відповідних порядків, розглянуто в праці [4].

Диференціювання та інтегрування

Узагальнені тригонометричні функції можна інтегрувати і диференціювати. Так, формально диференціюючи формулу (1) p разів, ($p=1,2,\ldots$), і позначаючи $\frac{d^p}{dt^p}\varphi(\rho,t)=D_t^p\varphi(\rho,t)$, отримуємо

$$D_t^p\varphi(\rho,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}k^p\left[a_k(\rho)\cos\left(kt+\frac{\pi}{2}p\right)+\right.$$

$$\left.+b_k(\rho)\sin\left(kt+\frac{\pi}{2}p\right)\right].$$

Отже, в результаті диференціювання узагальненої тригонометричної функції порядку ρ отримуємо нову узагальнену тригонометричну функцію порядку $\rho+p$; інакше кажучи, диференціювання збільшує порядок узагальненої тригонометричної функції.

Інакше виглядає справа з інтегруванням узагальнених тригонометричних функцій. Так, формально інтегруючи формулу (1), (зауважимо, що при інтегруванні завжди розглядалась функція з нульовим середнім), отримуємо

$$I_t^p\varphi(\rho,t)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}\left[a_k(\rho)\cos(kt-\frac{\pi}{2}p)+b_k(\rho)\sin(kt-\frac{\pi}{2}p)\right].$$

У результаті інтегрування узагальненої тригонометричної функції порядку ρ отримуємо нову узагальнену тригонометричну функцію порядку $\rho-p$; інакше кажучи, інтегрування зменшує порядок узагальненої тригонометричної функції, і при значеннях $p>\rho$ отримуємо (у разі збіжності ряду) звичайні функції.

Розглядаючи згортку узагальнених тригонометричних функцій $D_t^p\varphi(\rho,t)$ та $I_t^p\varphi(\rho,t)$ із основними функціями, легко бачити, що зміни порядків узагальнених тригонометричних функцій, які відбуваються при їх інтегруванні та диференціюванні, можна враховувати зміною порядків основних функцій. Така ситуація аналогічна ситуації з диференціюванням і інтегруванням узагальнених δ-функцій Дірака.

Особливої уваги, проте, слід приділяти зміні аргументів тригонометричних функцій членів ряду, які за кожного інтегрування (диференціюванні) переходять у кофункції із відповідними знаками.

Інтерполяційні згортки

Важливим підкласом узагальнених тригонометричних функцій є множина функцій 0-го порядку, послідовності коефіцієнтів яких $a_k(0)$, $b_k(0)$, ($k=1,2,\ldots$) являють собою N-періодичні послідовності ($N=2n+1$, $n=1,2,\ldots$).

До цього підкласу слід віднести також узагальнені тригонометричні функції порядків ρ ($0\le\rho<\infty$), коефіцієнти яких утворюються домноженням N-періодичних послідовностей на множники k^ρ.

Позначимо функції цього підкласу через $G(\rho,N)$; зрозуміло, що $G(\rho,N)\subset G(\rho)$. Зауважимо, що такі функції при цілих значеннях ρ часто виникають під час диференціювання функцій класу $G(0,N)$.

Доцільність виділення підкласу $G(\rho,N)$ узагальнених тригонометричних функцій пояснюється тим, що згортки функцій цього підкласу із головними функціями мають певні інтерполяційні властивості. Розглянемо це питання детальніше.

Нехай на відрізку $[0,2\pi]$ задано неперервну функцію $f(t)$, також на цьому відрізку задано рівномірну сітку $\Delta_N=\{t_i\}_{i=1}^N$, $t_i=\frac{2\pi}{N}(i-1)$, $N=2n+1$, $n=1,2,\ldots$.

Позначимо через $\{f(t_i)\}_{i=1}^N=\{f_i\}_{i=1}^N$ множину значень функції $f(t)$ у вузлах сітки Δ_N. Розглянемо тригонометричний многочлен

$$T_n^*(t)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^*\cos kt+b_k^*\sin kt, \qquad (6)$$

що інтерполює функцію $f(t)$ на сітці Δ_N. Тоді коефіцієнти цього многочлена визначають за формулами

$$a_k=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}f_j\cos kt_j,\quad b_k=\frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N}f_j\sin kt_j, \qquad (7)$$
$$k=0,1,\ldots,n;\qquad k=1,2,\ldots,n.$$

Поставимо у відповідність тригонометричному многочлену $T_n^*(t)$ розбіжний тригонометричний ряд

$$\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^*\cos kt+b_k^*\sin kt, \qquad (8)$$

коефіцієнти a_k^*,b_k^* якого обчислюють за формулами (7) для будь-яких значень k ($k=1,2,\ldots$).

Неважко переконатися в тому, що послідовності коефіцієнтів a_k^*,b_k^* є періодичними з періодом N і ряд (8) є розбіжним; хоча його коефіцієнти обмежені, вони не прямують до 0 зі зростанням k.

Отже, цей ряд являє собою узагальнену тригонометричну функцію 0-го порядку зростання [2]. Враховуючи, що коефіцієнт a_0^* в переважній більшості випадків не цікавить, подамо формулу (8) в іншій формі і формально позначимо

$$\varphi(0,N,t)=\frac{a_0^*}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}\left[a_k^*C_k(N,t)+b_k^*S_k(N,t)\right], \qquad (9)$$

де

$$C_k(N,t)=\cos kt+\sum_{m=1}^{\infty}\cos(mN+k)t+\cos(mN-k)t;$$

$$S_k(N,t)=sinkt+\sum_{m=1}^{\infty}\sin(mN+k)t-\sin(mN-k)t.$$

Як основні функції, де розглядають узагальнені тригонометричні функції, застосовують парні функції з певним порядком спадання їх коефіцієнтів Фур'є. Так, припустимо, що коефіцієнти Фур'є $\nu_k(r)$ основної функції $\mu(r,t)$ мають порядок спадання $O(k^{-r})$, $r>1$. Тоді, як вже зазначалось, згортку

$$F(\varphi,0,N,\mu,r,t)=\varphi(0,N,t)*\mu(r,t)$$

можна подати у вигляді [2]

$$F(\varphi,0,N,\mu,r,t)=\frac{a_0^*}{2}+$$
$$+\pi\sum_{k=1}^{n}\left[a_k^*C_k(\nu,r,N,t)+b_k^*S_k(\nu,r,N,t)\right], \qquad (10)$$

де

$$C_k(\nu,r,N,t)=\nu_k(r)\cos kt+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)\cos(mN+k)t+\nu_{mN-k}(r)\cos(mN-k)t;$$
$$S_k(\nu,r,N,t)=\nu_k(r)\sin kt+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)\sin(mN+k)t-\nu_{mN-k}(r)\sin(mN-k)t.$$

Зрозуміло, що ряд (10) збігається рівномірно. Будемо вимагати, щоб згортка $F(\varphi,0,N,\mu,r,t)$ інтерполювала тригонометричний многочлен (6) (а отже, і функцію $f(t)$) у вузлах сітки Δ_N. Для цього введемо у вираз (10) множник $H_k(r,N)^{-1}$ який оберемо з умов інтерполяції.

Обчислюючи значення згортки у вузлах сітки Δ_N, отримуємо

$$F(\varphi,0,N,\mu,r,t_i)=\frac{a_0^*}{2}+$$
$$+\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{H_k(r,N)}\left[a_k^*C_k(\nu,r,N,t_i)+b_k^*S_k(\nu,r,N,t_i)\right].$$

Ураховуючи, що

$$\cos(mN\pm k)t_i=\cos kt_i,\quad \sin(mN+k)t_i=\sin kt_i,$$
$$\sin(mN-k)t_i=-\sin kt_i,$$

та рівності

$$C_k(\nu,r,N,t_i)=$$
$$=\cos kt_i\left[\nu_k(r)+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)+\nu_{mN-k}(r)\right],$$
$$S_k(\nu,r,N,t_i)=$$
$$=\sin kt_i\left[\nu_k(r)+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)+\nu_{mN-k}(r)\right],$$

остаточно маємо

$$F\left(\varphi,0,N,\mu,r,t_i\right)=\frac{a_0^*}{2}+ \tag{11}$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{H_k(r)}\left[\nu_k(r)+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)+\nu_{mN-k}(r)\right]\times$$

$$\times\left[a_k^*\cos kt_i+b_k^*\sin kt_i\right].$$

Із порівняння отриманого виразу з виразом (6), випливає, що згортка $F\left(\varphi,0,N,\mu,r,t\right)$ інтерполює тригонометричний многочлен $T_n^*(t)$ (а відповідно і функцію $f(t)$) у вузлах сітки Δ_N тоді, і лише тоді, коли мають місце рівності

$$\frac{\pi}{H_k(r)}\left[\nu_k(r)+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)+\nu_{mN-k}(r)\right]=1,$$
$$(k=1,2,\ldots,n).$$

Отже, необхідні і достатні умови інтерполяції згорткою $F\left(\varphi,0,N,\mu,r,t\right)$ тригонометричного многочлена $T_n^*(t)$ у вузлах сітки Δ_N мають вигляд

$$H_k(r)=\pi\left[\nu_k(r)+\sum_{m=1}^{\infty}\nu_{mN+k}(r)+\nu_{mN-k}(r)\right], \tag{12}$$
$$(k=1,2,\ldots,n).$$

Враховуючи вираз (12), інтерполяційну згортку $F\left(\varphi,0,N,\mu,r,t\right)$ можна записати у вигляді

$$F\left(\varphi,0,N,\mu,r,t_i\right)=\frac{a_0^*}{2}+ \tag{13}$$

$$+\pi\sum_{k=1}^{n}H_k(r)^{-1}\left[a_k^*C_k(\nu,r,N,t_i)+b_k^*S_k(\nu,r,N,t_i)\right].$$

Розглянемо тепер конкретні класи головних функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають певні порядки спадання. Як вже було показано, тут можливі кілька підходів.

1. Як основні функції обирають функції з відомим аналітичним поданням, обчислюють їх коефіцієнти Фур'є і застосовують для обчислення згортки за формулами (12), (13).

2. Задають послідовності з певним порядком спадання; члени цієї послідовності надалі розглядають як коефіцієнти Фур'є і обчислюють згортку за формулами (12), (13). У разі потреби головну функцію будують через ряд Фур'є.

3. Комбінований підхід, за якого коефіцієнти Фур'є основної функції домножують на відповідні члени послідовності з певним порядком спадання.

Розглянемо ці підходи детальніше.

При першому підході, не втрачаючи загальності, обмежимося розглядом випадку, коли в якості основних функцій використовують класи періодичних поліноміальних B сплайнів, які розглянуті в праці [4]. Коефіцієнти Фур'є $\sigma_k(r)$ B-сплайнів порядку r, побудовані на сітці Δ_N, мають вигляд

$$\sigma_k(r)=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^{r+1}, \tag{14}$$

де $\operatorname{sinc}x=\dfrac{\sin x}{x}$, ($r=0,1,\ldots$) і відповідно мають порядок спадання $O\left(k^{-(r+1)}\right)$.

У разі другого підходу в якості коефіцієнтів Фур'є можна обирати члени послідовностей типу $\eta(k)k^{-r}$, $\eta(k)\sin\left(k^{-r}\right)$, $\eta(\mathrm{k})\sin^r\left(k^{-1}\right)$, де $\eta(k)$ — деяка обмежена функція.

Зрозуміло, основні функції, що відповідають цим коефіцієнтам Фур'є, будують як суми рівномірно збіжних (за $r>1$) рядів Фур'є.

Зауважимо, що цей підхід, за якого було використано коефіцієнти Фур'є у вигляді k^{-r}, детально розглядається в працях [4, 5].

Нарешті, за третього підходу комбінують перший і другий підхід, наприклад, коефіцієнти B-сплайну порядку m домножують на член послідовності $\eta(k)k^{-q}$ ($m,q=1,2,\ldots$) отримано вирази

$$\frac{1}{\pi}\frac{\eta(k)}{k^{-q}}\left[\operatorname{sinc}\left(\frac{\pi k}{N}\right)\right]^{m+1},\quad (k=1,2,\ldots)$$

розглядають надалі як коефіцієнти Фур'є з порядком спадання $O\left(k^{-(m+q)}\right)$.

Такий підхід зручно застосовувати у випадках, коли узагальнені тригонометричні функції належать класу $G(q,N)$.

Розглянемо приклад, що ілюструє поведінку інтерполяційних згорток різних типів. Нехай на відрізку $\left[0,2\pi\right)$ задано неперервну тестову функцію $f(t)$. Нехай також $N=9$, а послідовність значень функції $\left\{f_i\right\}_{i=1}^{9}$ на сітки Δ_9 має вигляд $\left\{2,1,3,2,4,1,3,1,3\right\}$. Обчислюючи коефіцієнти a_k^*, b_k^*, $(k=1,2,\ldots,n)$ інтерполяційного тригонометричного многочлена $T_n^*(\mathrm{t})$ за формулою (7), створимо узагальнену тригонометричну функцію 0-го порядку згідно з формулою (8).

Як основні функції оберемо B-сплайни, наприклад, першого і четвертого порядків, коефіцієнти яких мають вигляд (14).

Обчислимо згортки $FI\left(\varphi,N,\nu,r,t\right)$ ($N=9$, $r=1,4$) за формулами (12), (13).

Графіки цих згорток та графік многочлена $T_n^*(t)$ наведено на рис. 1, 2.

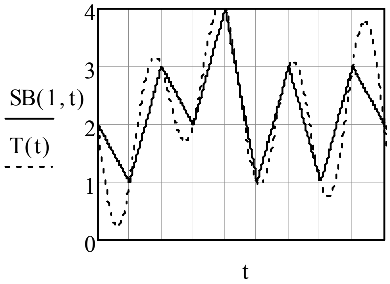

Рис. 1

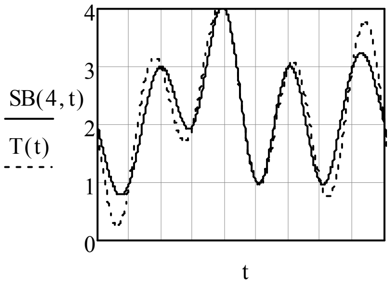

Рис. 2

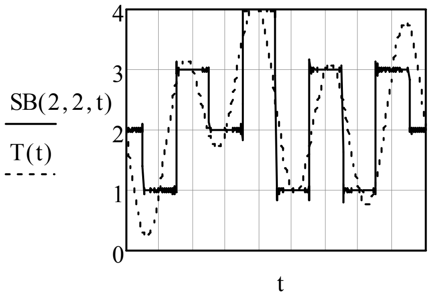

Рис. 3

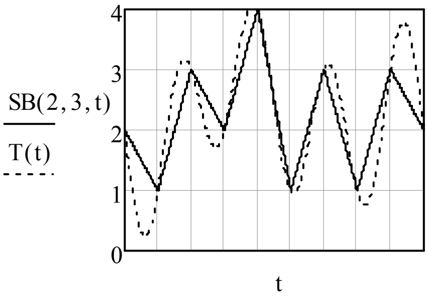

Рис. 4

Спираючись на результати чисельних експериментів, можна зробити висновок, що ці результати добре узгоджуються з теоретичними положеннями. Дещо складніше обстоять справи з побудовою інтерполяційних згорток для випадку узагальнених тригонометричних функцій класу $G(q,N)$. У цьому випадку при побудові нормуючого множника $H_k(r,N)$ множник k^q можна враховувати різними методами. Так, наприклад, як коефіцієнти Фур'є $\nu_k(r)$ основної функції можна розглядати коефіцієнти $k^{-q}\nu_k(r)$. Множник k^{-q} можна зазначити у нормуючий множник $H_k(r,N)$ на останньому етапі і розглядати нормуючий множник у вигляді $k^{-\rho}H_k(r,N)$. Зрозуміло, що ці обидва варіанти врахування множника k^q призводять до однакових результатів. Зауважимо, що при такому підході фактично клас $G(q,N)$ переводиться в клас $G(0,N)$.

Як було розглянуто раніше, тестову функцію $f(t)$, покладаючи для визначеності $\rho = 2$. При цьому обмежимось розглядом першого випадку, коли множник k^2 входить у коефіцієнти Фур'є за побудови нормуючого множника; при цьому як основні функції застосовуємо B-сплайни 2-го і 3-го порядків. На рис. 3, 4 наведені графіки тригонометричного многочлена та графіки таких згорток. Безумовно, наведений ілюстративний матеріал ніяк не вичерпує варіативність інтерполяційних згорток, побудованих наведеними методами.

Висновки

1. Введено операції диференціювання та інтегрування узагальнених тригонометричних функцій.

2. Розглянуто питання інтерполяції тригонометричних многочленів у вузлах рівномірних сіток згортками узагальнених тригонометричних функцій з основними функціями — періодичними B-сплайнами різних порядків. Отримані результати розповсюджуються і на задачу інтерполяції неперервних функцій у тих же вузлах.

3. Розроблені методи побудови інтерполяційних функцій можна розглядати як методи побудови таких функцій із заданими диференціальними властивостями; зокрема, їх можна розглядати як методи побудови інтерполяційних поліноміальних сплайнів довільного порядку.

4. Результати проведених чисельних розрахунків добре узгоджуються з теоретичними положеннями.

5. Розроблені методи інтерполяції з використанням класів поліноміальних і тригонометричних фундаментальних функцій потребують подальших досліджень.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Харди Г.* Расходящиеся ряды / Г. Харди. — М. : Изд-во иностранной литературы, 1951. — 504 с.

2. *Денисюк В. П.* Узагальнені тригонометричні функції та їх застосування / В. П. Денисюк // Вісник астрономічної школи, 2015. — № 2. — С. 164–168.

3. *Колмогоров А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Физматгиз, 1968. — 496 с.

4. *Денисюк В.П.* Фундаментальні функції та тригонометричні сплайни / В. П. Денисюк. — К. : ЗАТ «ВІПОЛ», 2015. — 296 с.

5. *Денисюк В. П.* Сплайни та сигнали. — К.:, ЗАТ «ВІПОЛ», 2007. — 228 с.

Стаття надійшла до редакції 29.02.2016