

Н. С. Городецька, д. ф.-м. наук, проф.;
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0003-3305-522X
e-mail: nsgihm@gmail.com

І. В. Старовойт, к. ф.-м. наук;
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0003-0956-7153
e-mail: inna-mail@ukr.net

Т. В. Соболев, к. ф.-м. наук;
Інститут гідромеханіки НАН України, м. Київ
orcid.org/0000-0003-0446-653X
e-mail: sobol2017liza@gmail.com

Т. М. Щербак, к. ф.-м. наук;
Національний університет біоресурсів
і природокористування України
orcid.org/0000-0002-3242-4698
e-mail: mirgtanya@gmail.com

ВПЛИВ СИМЕТРІЇ КОЛИВАНЬ І СПІВВІДНОШЕННЯ ШИРИН ПІВШАРІВ НА ПРОЗОРИСТЬ МЕЖІ В СТУПІНЧАТОМУ ХВИЛЕВОДІ

Вступ

Дослідження процесів дифракція пружних хвиль на неоднорідностях та резонансні явища, які можуть виникати при цьому, є підґрунтям як для розробки методів ідентифікації дефектів, так і для оцінки міцності та руйнування матеріалу конструкції. Поряд з цим самостійний інтерес мають процеси проходження та блокування хвиль, що поширюються. Зокрема, в акустоелектроніці явище різкого екранування сигналу системою періодичних неоднорідностей використовується при створенні частотних фільтрів на поверхневих хвилях. Аналогічні явища мають місце в пружних середовищах з періодичним набором тріщин. З цього приводу виникає питання щодо можливості управління прозорістю межі розділу неоднорідних пружних хвилеводів в певних частотних діапазонах без використання значної кількості періодичних неоднорідностей. Добре відомо, що в пружних напівобмежених хвилеводах в області високих частот, коли з'являються хвилі вищих порядків, відбувається суттєва трансформація енергії падаючої хвилі в хвилі інших порядків. Відмічене явище спостерігається як при відбитті хвилі від вільного торця

хвилеводу, так і від жорстко защемленого. Такий ефект обумовлений спектральними особливостями задачі. Зокрема, при антисиметричних коливаннях пружного півшару він проявляється в околі критичних частот для другої нормальної хвилі, а для симетричних коливань - на частоті, на якій з'являється обернена хвиля. Дисперсійний характер нормальних хвиль в пружних хвилеводах і можливість варіювати критичні частоти в хвилеводних конструкціях, утворених з'єднанням півшарів, за рахунок зміни механічних і геометричних характеристик окремих елементів дозволяє сподіватись на можливість управління прозорістю границі на заданих частотах.

Напевно, [1] є однією з перших робіт, в якій було знайдено явище зміни прозорості межі розділу в циліндричному хвилеводі, який утворений з'єднанням пружного і рідкого циліндрів. Було показано, що за рахунок значного збудження неоднорідних хвиль в пружному циліндрі, збільшується узгодженість хвильових полів випромінюючого пружного циліндра і рідкого середовища, що приводить до збільшення ефективності випромінювання. При цьому область частот, в

якій відбувається збільшення енергії пройденого поля, дуже вузька. Із зростанням частоти, коли у відбитому полі (пружний циліндр) з'являються хвилі вищих порядків, енергії пройденого поля різко падають. Така специфічна поведінка енергії в складеному хвилеводі стимулювала вивчення енергетичних полів в пружних хвилеводах, утворених з'єднанням пружних тіл. При цьому розглядалися різні види контакту: жорсткий або гладкий; при жорсткому контакті окремі компоненти складеного хвилеводу мали різні механічні характеристики при однаковій геометрії [2], [3], за умови однакових механічних характеристик товщина хвилеводу змінювалась поступово [4], (в цьому випадку відсутні кутові точки) або товщина змінювалась стрибком [5], [6], [7] та останній варіант, коли змінювались як геометричні характеристики, так і механічні [8]. В усіх значених роботах у складених хвилеводах було знайдено частотний діапазон, в якому енергія пройденого поля різко змінювалась.

При аналізі звукових полів у складених хвилеводах можна виділити два напрямки робіт. Перший – це розробка методів розв'язання відповідної граничної задачі. На сьогодні інтенсивно розвиваються чисельні методи, які дозволяють знайти характеристик хвильового поля в хвилеводах будь-якої конфігурації. Відмітимо роботу [6], в якій методом кінцевих елементів були знайдені коефіцієнти проходження і відбиття від виїмки в пружному хвилеводі. Розглядався лише низькочастотний діапазон, в якому може поширюватись лише одна нормальна хвиля. В роботі [9] запропоновано гібридний метод, який полягає в тому, що хвильове поле в околі неоднорідності розраховується методом кінцевих елементів, а в дальньому полі – чисельно-аналітичним методом нормальних хвиль. Загальним недоліком “чисто”чисельних методів аналізу полів в складених хвилеводах є неможливість структурного аналізу поля, тобто неможливо виділити окремі нормальні хвилі і проаналізувати їх вплив на частотні характеристик поля в цілому.

Чисельно-аналітичні методи дозволяють встановити фізичні причини специфічних ефектів, які мають місце в складених хвилеводах, зокрема ефект «запирання» на основі визначення ролі різних нормальних хвиль у відбитому та пройденому від неоднорідності поля. Крім того, ці методи дозволяють враховувати локальні особливості поля напружень в околі точки зміни типу граничних умов або в кутових точках, що дозволяє адекватно описати ближнє поле. Відмітимо, що при жорсткому контакті пружних хвилеводів, при зміні як механічних так і геометричних характеристик контактуючих середовищ, в

кутовій точці може виникати локальна особливість по напруженням, врахування якої ускладнює розв'язання граничної задачі. На сьогодні запропоновано ряд підходів, які дозволяють враховувати дану особливість. При цьому відмітимо, що характер особливості (логарифмічна або степенева) і показник степені відомі апріорно з розв'язку відповідної статичної задачі. В роботах [2, 5, 8, 10] розвивався чисельно-аналітичний метод суперпозиції, який дозволяє врахувати особливість по напруженням в кутовій точці і отримати характеристики хвильових полів в ближньому до неоднорідності полі з бажаною точністю.

Суттєвим недоліком чисельно-аналітичних методів є неможливість розрахунку хвильових полів в неканонічних областях.

Другий напрямок робіт, присвячених аналізу хвильового поля в складених хвилеводах, пов'язаний із розробкою рекомендацій щодо зміни фізичних або геометричних параметрів складених хвилеводів для «запирання» певних частотних діапазонів. Для складених хвилеводів дуже складної форми це здебільшого експериментальні методи.

Крім того, аналіз структури хвильового поля у відносно простих модельних задачах дозволяє сформулювати рекомендації щодо геометрії, механічних характеристик і способу збудження хвилеводу, щоб з максимальною ефективністю виділити частотні діапазони, в яких хвилевід «запертий».

В даній роботі для симетричних та антисиметричних коливань складеного хвилеводу, утвореного жорстким контактом двох півшарів з однаковими механічними характеристиками, але з різною шириною, на основі аналізу структури хвильового поля виділені діапазони частот, в яких енергія падаючої хвилі практично не проходить в інше середовище.

Постановка проблеми

На протязі останніх десятиліть значна увага приділялась використанню періодичних структур для контролю поширення хвиль. Для періодичних структур може існувати частотний діапазон, в якому пружні хвилі, які переносять енергію, не поширюються, а можуть існувати лише неоднорідні хвилі. Такі періодичні структури мають або порядок довжини хвилі, для електромагнітних хвиль це так звані фотонні кристали для електромагнітних хвиль [11] та фотонні кристали – для пружних (акустичних) хвиль [11], або період структури може перевищувати довжину хвилі. Фотонні кристали складаються з періодично розташованої решітки, параметри (густина, механічні

характеристики) якої відрізняються від загальних характеристик середовища. В таких системах спостерігається ряд специфічних ефектів обумовлених відмінностями в дисперсійних властивостях. Одним з таких ефектів є локалізація енергії або «запирання» проходження енергії. Таке явище спостерігається як для п'єзоелектричних матеріалів, так і для пружних. Якщо для п'єзоелектричних матеріалів основна увага зосереджена на зміні фізичних властивостей періодичних структур, то для пружних систем акцент робиться на зміні геометричних характеристик. При чому геометричні властивості можуть змінюватися в одному, двох або навіть трьох напрямках [12]. Не дивлячись на те, що використання особливостей коливань пружних періодичних структур має широке практичне застосування, на сьогодні питання вибору геометрії таких систем залишаються відкритими. Саме тому, дослідження хвильових полів на модельних задачах, в яких змінюється геометрія хвилеводу в напрямку поширення хвиль, дозволяє виявити умови «запирання» хвилеводів і дати фізичну інтерпретацію процесів, які спостерігаються. Зауважимо, що не тільки зміна геометрії впливає на хвильове поле, але і тип симетрії коливань, і спосіб збудження поля. В даній роботі акцент робиться на аналіз впливу зміни геометрії хвилеводу і типу симетрії коливань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Встановлення механізмів керування поширенням хвиль в хвилеводних структурах обумовило зростаючий інтерес для цієї проблеми в різних областях фізики. Зокрема для електромагнітних [13], акустичних [14] та пружних систем [4] були запропоновані різні методи управління переносом енергії. При цьому виявилось, що на основі аналізу особливостей поля в пружних хвилеводах складної конфігурації вдається найбільш повно встановити фізичні причини зміни прозорості границі, оскільки в таких системах дисперсійні властивості окремих компонентів системи значно змінюються при зміні геометричних, механічних характеристик і типу симетрії коливань. Крім того, зміна симетрії складного хвилеводу в напрямку поширення хвиль призводить до значних змін хвильового поля. Все це дозволяє реалізовувати нові різноманітні режими роботи.

В роботах [15], [16] запропоновані конструкції пружних хвилеводів, які показують принципову можливість управління потоком енергії за рахунок трансформації одного типу хвиль в ін-

Фізичні властивості середовища задаються коефіцієнтом Пуассона ν і модулем зсуву μ .

ший та зміні симетрії хвилеводу. При цьому акцент робиться на зміні симетрії хвилеводу, що призводить до зміни симетрії коливань.

В даній роботі на прикладі модельної задачі про розсіяння хвильового поля на границі розділу в складеному хвилеводі, утвореного жорстким контактом двох півшарів з різною товщиною, проводиться оцінка енергії розсіяного поля в залежності від частоти і типу симетрії коливань.

Така постановка задачі дозволяє на основі аналізу впливу окремих компонент розсіяного поля виділити фізичні причини, що обумовлюють пропускання або «запирання» енергії в другий півшар, при зміні геометрії (варіація товщини одного з півшарів), а також оцінити вплив зміни симетрії коливань на енергетичні характеристики розсіяння.

Метою даної роботи є:

- порівняння частотних діапазонів «запирання» складеного хвилеводу при повздовжніх та згинних коливаннях і встановлення фізичних причин їх відмінностей;
- розробка чисельно-аналітичних методів розв'язку відповідних граничних задач;
- трактування енергетичних характеристик для різних видів симетрії коливань на основі аналізу структури хвильового поля.

Постановка задачі

Розглядається модельна задача про збудження хвильового поля в пружному ізотропному складеному хвилеводі, утвореному жорстким контактом двох півшарів з однаковими механічними характеристиками, але різною шириною. Бічні поверхні хвилеводу вільні від напружень. Геометрія задачі представлена на рис. 1. В подальшому всі величини нормовані на ширину більшого півшару H .

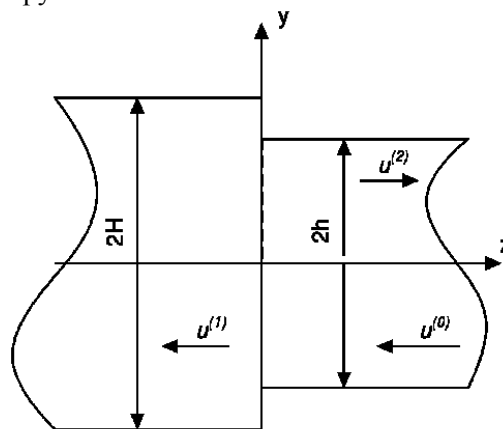


Рис. 1. Геометрія задачі

Залежність від часу, для кінематичних та силових характеристик поля, має вигляд $e^{-i\omega t}$. Коливання

збуджуються першою нормальною хвилею, яка поширюється з $+\infty$ і позначається індексом (0). Необхідно знайти хвильове поле $\vec{u}(y, z)$, яке задовольняє векторному рівнянню Ламе:

$$\mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}. \quad (1)$$

Умови спряження на поверхні $z = 0$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{zz}(y, 0) + \sigma_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \sigma(y, 0), & |y| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \\ \tilde{\tau}_{zz}(y, 0) + \tau_{zz}^{(0)}(y, 0) &= \begin{cases} \tau_{zz}(y, 0), & |y| \leq \alpha \\ 0, & \alpha < |y| \leq 1, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= iA_0 \Omega_1 e^{\Omega_1 z} - \sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(s)}(\tau) U_z^{(s)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_y &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(s)}(\tau) U_y^{(s)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \quad \beta_k = k\pi. \quad (4) \\ U_z^{(s)}(\tau, y) &= \tau \left(p_2 \frac{ch p_2 y}{sh p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2p_1} \frac{ch p_1 y}{sh p_1} \right), \quad U_y^{(s)}(\tau, y) = \tau^2 \frac{sh p_2 y}{sh p_2} - \frac{\tau^2 + p_2^2}{2} \frac{sh p_1 y}{sh p_1} \end{aligned}$$

б) антисиметричне поле

$$\begin{aligned} u_z &= -\sum_{k=1}^{\infty} (A_k q_1 e^{-q_1 z} + B_k \beta_k e^{-q_2 z}) \sin \beta_k y + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)}(\tau) U_z^{(a)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \\ u_y &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \beta_k e^{-q_1 z} + B_k q_2 e^{-q_2 z}) \cos \beta_k y + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x^{(a)}(\tau) U_y^{(a)}(\tau, y) e^{i\tau z} d\tau, \end{aligned} \quad \beta_k = \frac{2k-1}{2} \pi \quad (5)$$

Для антисиметричних коливань вираз для $U_z^{(a)}$ отримуємо за рахунок заміни в виразі для $U_z^{(s)} sh p_i$ на $ch p_i$, а для $U_y^{(s)}$ в $U_y^{(a)}$ змінюємо $sh p_i y / sh p_i$ на $ch p_i y / ch p_i$.

Введені позначення $\Omega_i = \omega H / c_i$, c_i – швидкість поздовжніх ($i = 1$) і поперечних ($i = 2$) хвиль.

$$q_j = \begin{cases} \sqrt{\beta_k^2 - \Omega_j^2}, & \beta_k \geq \Omega_j \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \beta_k^2}, & \beta_k < \Omega_j. \end{cases}$$

$$p_j(\tau) = \begin{cases} \sqrt{\tau^2 - \Omega_j^2}, & |\tau| \geq \Omega_j, \\ -i\sqrt{\Omega_j^2 - \tau^2}, & |\tau| < \Omega_j, \quad j = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Напруження, що відповідають цим переміщенням, знаходяться з закону Гука

$$\begin{aligned} u_z(y, 0) &= \tilde{u}_z(y, 0) + u_z^{(0)}(y, 0), \\ |y| \leq \alpha, \quad u_y(y, 0) &= \\ &= \tilde{u}_y(y, 0) + u_y^{(0)}(y, 0), \quad |y| \leq \alpha. \end{aligned} \quad (2)$$

Бічні поверхні вільні від напружень:

$$\sigma_{yy}(\pm 1, z) = 0, \tau_{zy}(\pm 1, z) = 0 \quad z \geq 0. \quad (3)$$

Розглядаються симетричні та антисиметричні хвильові поля відносно площини $y = 0$.

Метод розв’язання

В даній роботі для розв’язання поставленої граничної задачі використовувався метод суперпозицій, у відповідності до якого хвильове поле може бути представлено у вигляді:

а) симетричне поле

Переміщення для падаючої хвилі мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_z^{(a,s)} &= -U_z^{(a,s)}(\xi_1, y) e^{-i\xi_1 z}, \\ u_y^{(a,s)} &= iU_y^{(a,s)} e^{-i\xi_1 z} \end{aligned}, \quad (6)$$

де ξ – стала поширення, яка дорівнює першому дійсному кореню дисперсійного рівняння

а) симетричні коливання

$$\Delta(\tau) = (2\tau^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 th p_1 - 4\tau^2 p_1^2 p_2 th p_2 = 0,$$

б) антисиметричні коливання

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= (2\tau^2 - \Omega_2^2)^2 p_1 cth p_1 - \\ &- 4\tau^2 p_1^2 p_2 cth p_2 = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

В поставленій граничній задачі в кутовій точці $z = 0, y = \alpha$ існує локальна особливість

по напруженням, показник (ϵ) якої визначається з рівняння

$$\sin^2 3\epsilon\pi/2 - \epsilon^2 = 0.$$

Для одержання розв'язку, що адекватно описує хвильове поле в ближній зоні, на границі розділу, необхідно використати асимптотичні властивості невідомих. Аналіз асимптотики невідомих у сумах оснований на властивостях збіжності рядів для напружень поблизу кутових точок на лінії контакту двох півшарів. З огляду на характер особливості в околі кута, нормальне $\sigma_{zz}(y = \pm\alpha, 0)$ і дотичне $\tau_{zy}(\pm\alpha, 0)$ напруження можуть бути представлені у вигляді:

$$\frac{\sigma_{zz}(\pm\alpha, z)}{2\mu} = \frac{\sigma^{(+)}}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi(y),$$

$$\frac{\tau_{zy}(\pm\alpha, z)}{2\mu} = \frac{\tau^{(+)}}{(1-y^2)^{1-\epsilon}} + \psi_1(y)$$

тут $\sigma^{(+)}, \tau^{(+)}$ – постійні величини, а $\psi(y), \psi_1(y)$ – деякі гладкі функції.

Припускаючи, що при великих значеннях k (більших деякого N) характер коефіцієнтів A_k, B_k визначається поведінкою напружень в околі кутової точки і використовуючи вирази для напружень для відбитого поля, асимптотика для коефіцієнтів A_k, B_k при симетричних коливаннях має вигляд:

$$A_k = \frac{2a_0}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \frac{J_{\epsilon-0.5}}{\beta_k^{\epsilon-0.5}}, B_k = \frac{-2b_0}{\Omega_1^2 - \Omega_2^2} \frac{J_{\epsilon-0.5}}{\beta_k^{\epsilon-0.5}}, a_0 =$$

$$= d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{4\beta_k(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right),$$

$$b_0 = d_0 \left(1 - \frac{\Omega_1^4 + \Omega_2^4}{4\beta_k(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)} \right) - \frac{\sigma^{(+) (\Omega_1^{(2)2} - \Omega_2^{(2)2})}}{2\beta_k},$$

$$d_0 = \sigma^{(+)} + \tan\left(\frac{\pi\epsilon}{2}\right) \tau^{(+)}$$

$J_{\epsilon-0.5}$ – функція Бесселя першого роду.

Визначивши асимптотичну поведінку невідомих у пройденому та відбитому полях і виконавши умови спряження (2), переходимо від інтегралгебраїчних рівнянь до системи $4N + 4$ лінійних алгебраїчних рівнянь з відповідним числом невідомих. При виконанні чисельних розрахунків для $N = 60$, похибка виконання закону збереження енергії не перевищувала 0,7 % енергії падаючої хвилі, а умови спряження виконувались з такими похибками

u_z, u_y до 4 % $u_z^{(0)}$, τ_{yz} до 0,2 % $\sigma_{zz}^{(0)}, |y| < \alpha$,
 $\sigma_{zz} < 8 \% \sigma_{zz}^{(0)}, |y| < 0.98\alpha$.

Аналіз результатів

Аналіз робіт, присвячених розсіяню поля на границі розділу в складних хвильоводних структурах, показує, що частотні залежності характеристик відбитого і пройденого полів суттєво залежать від спектральних характеристик складових системи. Оскільки при симетричних і антисиметричних коливаннях шару спектральні характеристики значно різняться, то варто очікувати, що прозорість границі також буде різною при зміні типу симетрії коливань. Для оцінки особливостей розсіяного на границі розділу поля в складеному хвильоводі, проаналізуємо енергетичні характеристики пройденого і відбитого полів. Відомо, що тільки хвилі, які поширюються, переносять енергію або середній за період потік потужності через поперечний переріз в дальнє поле. Середній за період потік потужності через поперечний переріз дорівнює сумі потужностей, які переносять окремо поширювані моди.

Для відбитого поля потік потужності (W_z) вздовж осі хвильоводу знаходиться за співвідношенням

$$E_z = \sum_{k=1}^K E_z^{(k)}; \quad E_z^{(k)} = \frac{i\Omega}{2} |C_k|^2,$$

$$\int_{-h}^h \left[\sigma_{zz}(\xi_k, y) u_z(\xi_k, y) - \tau_{zy}(\xi_k, y) u_y(\xi_k, y) \right] dy,$$

де $E_z^{(k)}$ – потужність, $C_k = \text{Re } s \ x(\tau)$ – амплітуда

k -ї поширюваної моди.

Спочатку розглянемо антисиметричні коливання. Кількісні обчислення, виконані з метою вивчення впливу зміни геометричних розмірів ступінчатого хвильоводу на трансформацію енергії падаючої хвилі у відбиті і пройдені. Розрахунки виконані для матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0,3$, для діапазону частот нижче критичної частоти для третьої поширюваної моди. Для випадку коли хвиля падає з вужчого хвильоводу, у пройденому полі з'являються поширювані хвилі вищих порядків раніше, ніж у відбитому.

Рис. 2 відображає частотну залежність потоку потужності у відбитому полі, нормовану на потік падаючої хвилі. Номер кривої відповідає різним співвідношенням ширин півшарів α . Для всіх величин α , енергія відбитого поля досягає першого локального максимуму на критичній частоті $\Omega_2 = \pi/2$, на якій у пройденому полі з'являється друга хвиля, що поширюється. Таким чином, перший максимум у відбитому полі обумовлений

трансформацією енергії падаючої хвилі у поширювані хвилі вищих порядків у пройденому полі. Підкреслимо, що частота, на якій спостерігається цей максимум, не залежить від співвідношення ширин контактуючих хвилеводів (α), а рівень збільшення енергії відбитого поля зменшується з ростом α .

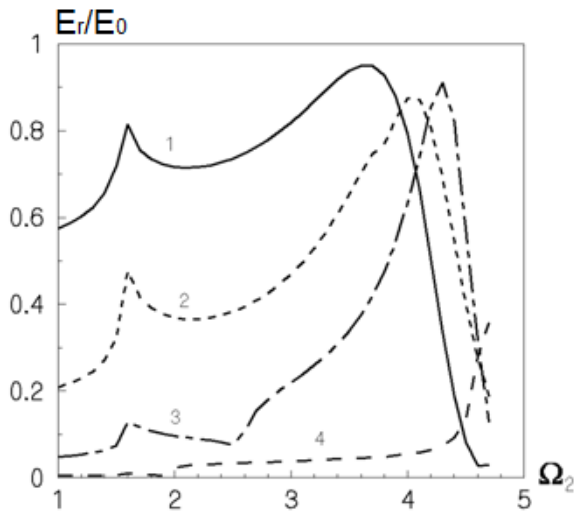


Рис. 2. Частотна залежність потоку потужності у відбитому полі, нормована на потік падаючої хвилі

Процентний вміст потоку потужності другої пройдені хвилі в залежності від частоти для різних величин α представлено на рис.3. Крива 1 відповідає $\alpha = 0.2$; 2 – 0.4; 3 – 0.6; 4 – 0.8.

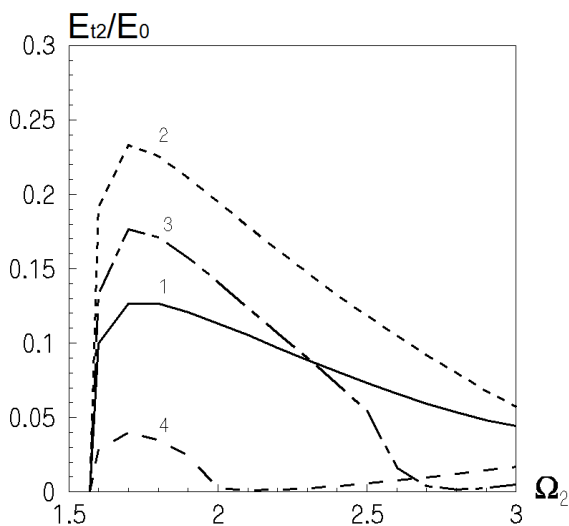


Рис. 3. Процентний вміст потоку потужності другої пройдені хвилі в залежності від частоти для різних величин α

Як видно з рисунку, для частот вище критичної частоти для другої нормальної хвилі в пройденому полі вона не стає домінуючою і переносить не більше 30 % потоку потужності падаючої хвилі. Зауважимо, що зростання енергії відбитого поля в околі частоти першого максимуму також

не перевищує 30 % енергії падаючої хвилі. Розсіяне поле в основному визначається першою відбитою хвилею, потік потужності якої в залежності від частоти представлено на рис. 4. Порівнюючи рис. 2 і рис. 4 відзначимо, що при збільшенні α падає як максимальна величина потоку потужності, який переносить перша хвиля, так і загальний потік у відбитому полі.

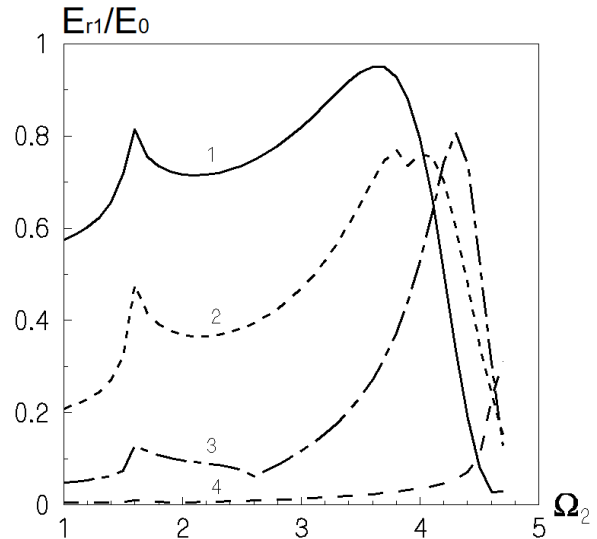


Рис. 4. Залежність потоку потужності першої відбитої хвилі від частоти

На рис. 2 в області більш високих частот спостерігається другий локальний максимум енергії відбитого поля. У цьому випадку, як частота, на якій спостерігається максимум відбитого поля, так і його величина значною мірою визначаються величиною α . Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений зростанням енергоємності першої відбитої поширюваної хвилі, як впливає з порівняння рис. 2 і рис. 4. Відзначимо, що для всіх величин α в околі частоти другого максимуму енергії у пройденому полі існує дві поширювані моди. У відбитому полі, в розглянутому частотному діапазоні, можуть поширюватися одна або дві моди. Якщо падаюча хвиля поширюється у більш вузькому хвилеводі, то у всьому розглянутому частотному діапазоні модуль амплітуди неоднорідної хвилі з першим комплексним хвильовим числом, як у відбитому, так і в пройденому полях, не перевищує амплітуду падаючої.

Перейдемо до випадку симетричних коливань. Як вже відмічалось, частотні залежності енергії розсіяного поля в значній мірі обумовлені спектральними характеристиками. Спектри симетричних і антисиметричних коливань пружного шару, в частотному діапазоні до критичної частоти для третьої поширюваної хвилі суттєво відрізняються. На рис. 5 представлено залежність сталої поширення від частоти. Номер кривої відповідає номеру нормальної хвилі, індексом s

позначені хвилі при симетричних коливаннях, а індексом a – при антисиметричних коливаннях. Для обох видів симетрії розглядався частотний діапазон до критичної частоти для третьої поширюваної хвилі. Характерною особливістю спектральних кривих при симетричних коливаннях є наявність від'ємної кривизни кривої $2s$, в даному частотному діапазоні існує «обернена» мода. Ще однією відмінністю симетричних коливань в області частот, де може поширюватись лише

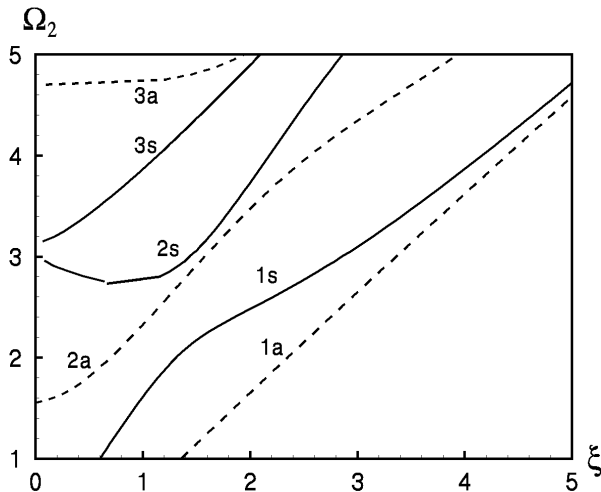


Рис. 5. Залежність сталої поширення від частоти

На відміну від симетричних коливань, як видно з рис. 6, для всіх кривих існує частота, на якій практично вся енергія падаючої хвилі проходить у ширший хвилевід (енергія відбитого поля прямує до 0).

Частота, на якій спостерігається даний ефект, зменшується із зростанням α . Як і при антисиметричних коливаннях складеного хвилеводу, в даному випадку існує два локальних максимуму енергії у відбитому полі.

Перший максимум спостерігається на частоті, на якій у відбитому і пройденому полях можуть поширюватись тільки по одній нормальній хвилі. При збільшенні α , частота енергетичного максимуму відбитого поля зростає, а добротність резонансу зменшується. Така поведінка розсіяного поля може бути обумовлена тільки збудженням неоднорідних хвиль. На рис. 7 (*a*, *b*) представлена частотна залежність модуля амплітуд нормальних хвиль в розсіяному полі. Суцільні криві відповідають відбитому полю, а штрихові – пройденому полю. Криві з позначкою d – першій поширювальній хвилі, а з k – неоднорідній хвилі з першим комплексним коренем дисперсійного рівняння (7). Для $\alpha = 0.4$ рис. 7, *a*, а рис. 7, *b* – для $\alpha = 0.6$. На обох рисунках на частоті, на якій практично вся енергія падаючої хвилі відбива-

одна нормальна хвиля, є наявність крайового резонансу (резонансу на неоднорідних хвилях) для випадку півшару з вільним торцем. Для $\nu = 0.3$ це частота $\Omega_2 = 2,136$.

На рис. 6 представлено частотну залежність середнього за період потоку потужності у відбитому полі. Крива 1 відповідає $\alpha = 0,4$; 2 - $\alpha = 0,6$; 3 - $\alpha = 0,8$.

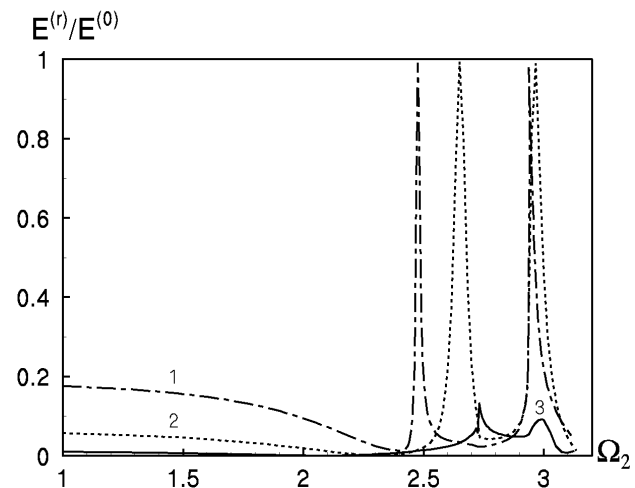


Рис. 6. Частотна залежність середнього за період потоку потужності у відбитому полі

ється від границі розділу в складеному хвилеводі, амплітуди неоднорідної хвилі, як у відбитому, так і в пройденому полі мають максимальне значення. Крім того, на даній частоті фаза неоднорідної хвилі змінюється. Максимум амплітуди та зміна фази характерна для резонансної ситуації. Для $\alpha = 0.4$ максимальна величина амплітуди неоднорідної хвилі у відбитому та пройденому полях практично співпадають. Для $\alpha = 0.6$ неоднорідна хвиля у пройденому полі збуджується сильніше, ніж у відбитому. При збільшенні α резонансна частота зростає і збільшується амплітуда неоднорідної хвилі в пройденому полі.

Не дивлячись на те, що амплітуди неоднорідних хвиль не перевищують амплітуду падаючої, перший максимум енергії відбитого поля обумовлений перебудовою розсіяного хвильового поля за рахунок резонансу на неоднорідних хвилях.

Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в поширювані хвилі вищих порядків у пройденому полі. На рис. 8 (*a*, *b*) представлено частотну залежність енергії поширювальних хвиль вищих порядків у пройденому полі.

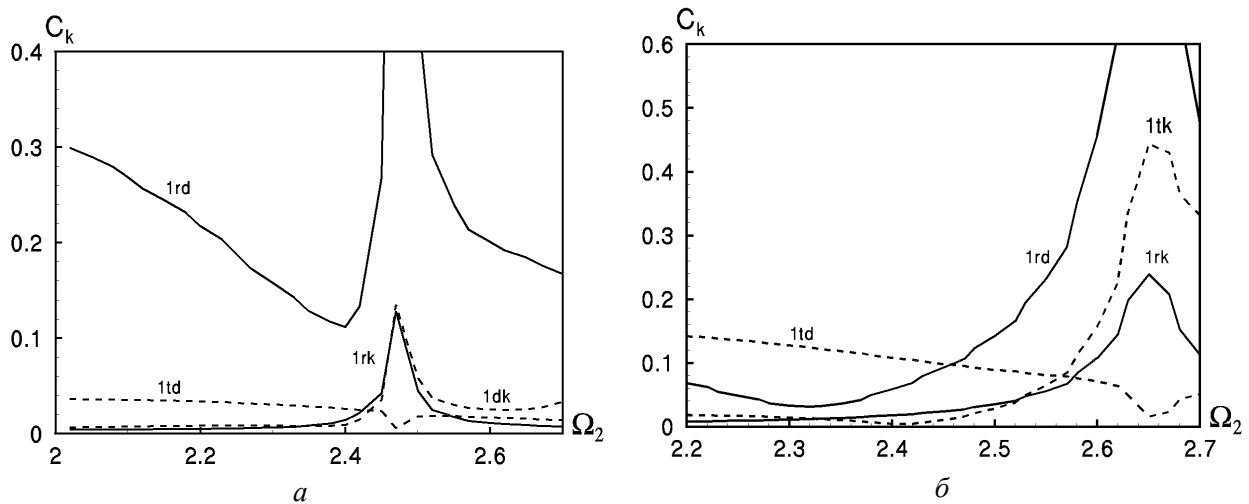


Рис. 7. Частотна залежність модуля амплітуд нормальних хвиль в розсіяному полі (для $a - \alpha = 0.4$, для $b - \alpha = 0.6$)

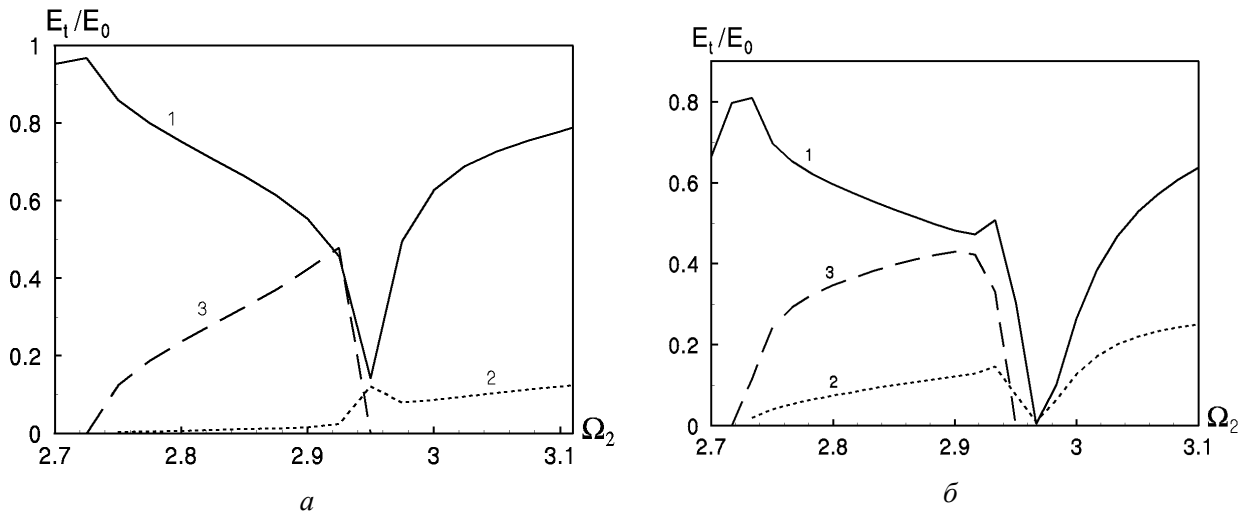


Рис. 8. Частотна залежність енергії поширювальних хвиль вищих порядків у пройденому полі (для $a - \alpha = 0.4$, для $b - \alpha = 0.6$)

Рис. 8, *a* для $\alpha = 0.4$, а рис. 8, *б* – для $\alpha = 0.6$. Крива 1 – перша поширювана хвиля, 2 – друга, 3 – «обернена» хвиля. Для $\alpha = 0.4$ другий локальний максимум відбитого поля (рис. 6) відбувається на частоті 2,95. Це частота (рис. 8, *a*), на якій у пройденому полі «обернена» хвиля вироджується в неоднорідну хвилю, а друга поширювана хвиля досягає свого локального максимуму. Для $\alpha = 0.6$. (рис. 8, *б*) максимум відбитого поля спостерігається на частоті 2.97. У даному випадку на цій частоті «обернена» хвиля виродилась в неоднорідну, а друга поширювана хвиля досягає мінімальної величини. Не дивлячись на поведінку другої поширюваної хвилі, при зміні α перша поширювана хвиля має мінімальне значення на частоті, на якій спостерігається максимум відбитого поля. Частота другого максимуму енергії відбитого поля зростає (в діапазоні 1 %) при збільшенні α , а добротність резонансу падає. Другий максимум енергії відбитого поля обумовлений трансформацією

енергії падаючої хвилі в хвилі вищих порядків у пройденому полі. Зміна характеру поведінки другої поширюваної хвилі обумовлена зміною величини радіаційного демпфірування при зміні α .

Висновки

В статті проведено аналіз зміни прозорості межі розділу в ступінчатому хвилеводі при зміні співвідношення ширин півшарів і зміні симетрії коливань. Показано, що при симетричних коливаннях резонансний характер відбитого (пройденого) полів має місце на більш низьких частотах і має вищу добротність ніж при антисиметричних коливаннях.

ЛІТЕРАТУРА

[1] Miller G. K. Axisymmetric stress-wave propagation across the common end face between two semi-infinite Cylinders, solid to fluid, *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1968, Vol. 44, №4. P. 1040-1051. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1911194>

- [2] Городецкая Н. С., Недилько Е. А. Влияние механических характеристик контактирующих сред на отражающие свойства границы в составном упругом волноводе. *Акустичний вісник*, 2012, Том 15, № 4. С. 14–24.
- [3] Tamine M. Scattering and transmission of elastic waves from an interface between two planar waveguides. *Surface Review and Letters*, 2003, Vol. 10, № 5, P. 727-736. DOI: 10.1142/S0218625X0300558X
- [4] Pagneux V., Maurel A. Lamb wave propagation in elastic waveguides with variable thickness. Published By: Royal Society, 2006, Vol. 462, P. 1315-1339. DOI: <https://doi.org/10.1098/rspa.2005.1612>
- [5] Городецкая Н. С., Недилько Е. А. Распространение антисимметричных волн в ступенчатом упругом волноводе. *Акустичний вісник*, 2013–2014. Том 16, № 1. С. 16–27.
- [6] Benmeddour F., Grondel S., Assaad J., Moulin E. Study of the fundamental Lamb modes interaction with symmetrical notches. *NDT&E International*, 2008, Vol. 41, P. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ndteint.2007.07.001>
- [7] Cegla F.B., Rohde A., Veidt M. Analytical prediction and experimental measurement for mode conversion and scattering of plate waves at non-symmetric circular blind holes in isotropic plates. *Wave Motion*, January 2008, Vol. 45, Iss. 3, P. 162–177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2007.05.005>
- [8] Городецька Н. С., Неділько О. О. Трансформація енергії згинної хвилі на сходінці при різних механічних параметрах контактуючих середовищ. *Наукоємні технології. Фізика*, 2015, Том 25, № 1, С. 52–56. DOI: <https://doi.org/10.18372/2310-5461.25.8229>
- [9] Koji Hasegawa, Masanori Koshiba, Michio Suzuki. Analysis of finite periodic waveguides for elastic waves using finite-element method. *Electronics and Communications in Japan, Part 2*, 1987, Vol. 70, Iss. 6, P. 27-36. DOI: – <https://doi.org/10.1002/ecjb.4420700604>
- [10] Грінченко В.Т., Городецька Н.С. Метод суперпозиції стосовно граничних задач для неоднорідних хвильоводів. *Математичні методи та фізико-механічні поля*, 2006, Том 49, № 1, С. 20–30.
- [11] Cebrecos A.; Picó R.; Sánchez-Morcillo V. J.; Staliunas K.; Romero-García V.; Garcia-Raffi L. M. Enhancement of sound by soft reflections in exponentially chirped crystals. *AIP Advances*, December 2014, Vol. 4, Iss. 12. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4902508>
- [12] Hussein M. I., Leamy M. J., and Ruzzene M. Dynamics of phononic materials and structures: historical origins, recent progress, and future outlook. *Applied Mechanics Reviews*, July 2014, 66(4): 040802 (38 pages). DOI:10.1115/1.4026911
- [13] Khanikaev A. B., Mousavi S. H., Tse W.-K., Kargarian M., MacDonald A. H., Shvets G. Photonic topological insulators. *Nature Materials*, 2012, Vol. 12, P. 233–239.
- [14] Yang Z., Gao F., Shi X., Lin X., Gao Z., Chong Y., Zhang B. Topological acoustics. *Physical Review Letters*, 20 March 2015, Vol. 114, Iss. 11. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.114301>
- [15] De Ponti J. M., Iorio L., Riva E., Ardito R., Braghin F., Corigliano A. Selective mode conversion and rainbow trapping via graded elastic waveguides. *Physical Review Applied*, 15 September 2021, Vol. 16, Iss. 3. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.16.034028>
- [16] De Ponti J. M., Iorio L., Ardito R. Graded elastic meta-waveguides for rainbow reflection, trapping and mode conversion. *EPJ Applied Metamaterials*, January 2022 9:6. DOI: 10.1051/epjam/2022004

Городецька Н.С., Старовойт І. В., Соболев Т. В., Щербак Т. М.

ВПЛИВ СИМЕТРІЇ КОЛИВАНЬ І СПІВВІДНОШЕННЯ ШИРИН ПІВШАРІВ НА ПРОЗОРІСТЬ МЕЖІ В СТУПІНЧАТОМУ ХВИЛЕВОДІ

Стаття присвячена аналізу розсіяного поля на межі ступінчатого хвильоводу, утвореного жорстким контактом двох півшарів з однаковими механічними характеристиками, але з різними ширинами. Хвильове поле збуджується першою нормальною хвилею, що поширюється з нескінченності у вужчому півшарі. Математичні труднощі поставленої граничної задачі обумовлені наявністю ступеневої особливості по напруженням в точці зміни граничних умов на межі двох півшарів. Розв'язок будується методом суперпозиції, який дозволяє врахувати локальну особливість через асимптотичні особливості невідомих. Критерієм якості отриманого розв'язку був контроль точності виконання умов спряження на межі двох півшарів. Основна увага в роботі зосереджена на встановленні умов зміни прозорості межі в залежності від частот, симетрії коливань і співвідношення ширин півшарів. В роботі було показано, що як для симетричних, так і для антисиметричних коливань ступінчатого хвильоводу існують частотні діапазони, в яких прозорість межі суттєво змінюється. Для обох видів симетрії в діапазоні частот до критичної частоти для третьої поширюваної нормальної хвилі існує два частіх діапазони, в яких прозорість межі досить різко зростає. Частоти, на яких спостерігається локальні максимуми енергії у відбитому полі, для симетричних і антисиметричних коливань різні. Для симетричних коливань перший максимум енергії у відбитому полі спостерігається на частоті, коли в обох півшарах може поширюватись тільки одна хвиля. Цей ефект обумовлений збільшенням ролі неоднорідних хвиль у пройденому полі. Другий максимум енергії у відбитому полі обумовлений трансформацією енергії падаючої хвилі в поширю-

вані хвилі вищих порядків. При антисиметричних коливаннях обидва максимуми обумовлені енергетичними особливостями поширюваних хвиль вищих порядків. Добротність резонансу енергії у відбитому полі виявилась також значно залежною від симетрії коливань. Встановлені особливості розсіяного поля дозволяють розробляти рекомендації щодо управління прозорістю межі в ступінчатому хвилеводі.

Ключові слова: пружні хвилі; прозорість межі розділу, енергетичний аналіз.

Gorodetskaya N., Starovoit I., Sobol T., Shcherbak T.

THE INFLUENCE OF THE SYMMETRY OF OSCILLATIONS AND THE RATIO OF THE HALF-LAYER WIDTHS ON THE TRANSPARENCY OF THE BOUNDARY IN A STEPPED WAVEGUIDE

The article is devoted to the analysis of the scattered field at the boundary of a stepped waveguide formed by the rigid contact of two half-layers with the same mechanical characteristics, but with different widths. The wave field is excited by the first normal wave propagating from infinity in the narrower half-layer. Mathematical difficulties of the posed boundary problem are due to the presence of a local singularity in the stresses at the point of change of the boundary conditions at the boundary of the two hemispheres. The solution is built by the superposition method, which allows taking into account the local singularity due to the asymptotic features of the unknowns. The quality criterion of the obtained solution was the control of the accuracy of the fulfillment of the conjugation conditions at the boundary of the two half-layers. The main attention in the work is focused on the established conditions for changing the transparency of the boundary depending on the frequencies, the symmetry of the oscillations, and the ratio of the half-layer widths. It was shown in the work that for both symmetric and antisymmetric oscillations of a stepped waveguide, there are frequency ranges in which the transparency of the boundary changes significantly. For both types of symmetry, in the frequency range up to the critical frequency for the third propagating normal wave, there are two frequency ranges in which the transparency of the boundary increases rather sharply. The frequencies at which local energy maxima are observed in the reflected field are different for symmetric and anti-symmetric oscillations. For symmetric oscillations, the first energy maximum in the reflected field is observed at the frequency when only one wave can propagate in both half-layers. This effect is due to the increase in the role of inhomogeneous waves in the transmitted field. The second energy maximum in the reflected field is due to the transformation of the energy of the incident wave into propagating waves of higher orders. In the case of antisymmetric oscillations, both maxima are due to the energy features of propagating waves of higher orders. The quality of energy resonance in the reflected field was also significantly dependent on the symmetry of the oscillations. The established features of the scattered field make it possible to develop recommendations for controlling the transparency of the boundary in a stepped waveguide

Key words: elastic waves; interface transparency, energy analysis.

Стаття надійшла до редакції 27.08.2022 р.
Прийнято до друку 14.09.2022 р.