

УДК 621.891:539.375.6

DOI: 10.18372/0370-2197.2(107).20165

Ю. О. МАЛІНОВСЬКИЙ¹, Д. П. ВЛАСЕНКОВ¹, С. Ю. ОЛІЙНИК³,
С. О. СИТНИК¹, О. А. ШЕВЧЕНКО², А. О. БОНДАРЕЦЬ³

¹Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», Кривий Ріг, Україна

²Державний університет «Київський авіаційний інститут», Київ, Україна

³Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

ПЕРЕДУМОВИ ДО РУЙНУВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ ДЕТАЛЕЙ ПІД ЧАС ЇХ ТЕРТЯ ТА ЗНОШУВАННЯ

В процесі виконання розрахунків на тертя і знос поверхневих шарів значне місце займають розрахунки на місцеве розтягнення в зоні контакту і поздовжню стійкість шарів матеріалу. Зазвичай розрахунки виконуються виходячи з дії класичних законів Гука і Ейлера. Так, при розрахунках на розтягнення використовують закони Гука, де напруження σ_x пропорційне деформації ϵ_x , при цьому $\sigma_x \leq \sigma_{\text{пл}}$. Крім того, при розрахунках зовнішніх шарів матеріалу на стійкість використовують формулу Ейлера. Якщо $\sigma_x \leq \sigma_{\text{пл}}$, то матеріал зовнішнього шару, пов'язаного з основою матеріалу деталі, втрачає свою первинну форму, то елементи такого шару, підперті більш глибокими пластичними шарами, можуть отримувати крихке тріщиноутворення і втратити поздовжню стійкість. У більшості випадків навантаження нормальні напруження в зоні під штампом слідує закону Гука, при цьому розривні напруження, в основному, не виникають. В області перед штампом, часто, при тих же навантаженнях, виникає втрата місцевої стійкості шару, з утворенням гофрованої поверхні. Зміна форми шару свідчить про те, що мають місце залишкові непружні деформації. Розрізнені літературні джерела, що містять дані по різним видам поверхневих шарів, що працюють, як правило, на розтягнення і стискання, свідчать про те, що матеріал в зоні стискання перед штампом, поводить як пружно-пластичний матеріал і тому деплація (плоских до деформації зовнішніх перерізів) і хвилоподібність (гофри), які за своїм виглядом аналогічні первинним геометричним мікронерівностям після їх взаємного зрізання в результаті механічної взаємодії. Таке неоднозначне поведіння матеріалу при деформації говорить про те, що замість законів Гука і Ейлера виявляються їх непружні аналоги. А також тонкий поверхневий шар в результаті наклепу і перенаклепу при зміцненні пружною основою поводить як стрижень з невисоким коефіцієнтом гнучкості λ . У цьому випадку місцева втрата стійкості поверхневого шару може не статися, а відбудеться крихке втомне руйнування шару. Цей процес може завершитися утворенням місцевої тріщинуватості. Дані джерел по різним видам параметрів поверхневих шарів - пластичні, пружні, пружно-пластичні свідчать про те, що отримані висновки були підтверджені шляхом складання математичної моделі задачі, де знайшло відображення виявлення нелінійних властивостей матеріалу деталей, після врахування геометричної і фізичної нелінійності деформованого шару. У математичній моделі задачі може бути встановлено вплив крихкого руйнування зовнішнього шару, його тріщиноутворення і відколювання на деформаційних гребенях. Результати роботи можуть бути уточнені при введенні в диференційне рівняння задачі доданка, що описує крихке руйнування зовнішніх шарів.

Ключові слова: тертя, знос, поверхневий шар, пружні деформації, остаточні деформації, модуль пружності, втрата стійкості, глибина шару, деплація плоских перерізів, закон Гука, формула Ейлера.

Аналіз виконаних досліджень і публікацій. Як відомо [1], під час взаємодії деталей відбувається пружна та непружна деформація на рівні мікронерівностей їх поверхневих шарів (рис. 1). Ділянка OA (l_1) отримає поздовжнє пружне переміщення розтягнутого шару. Ділянка AB (l_2) отримає поздовжнє стискаюче переміщення поверхневого шару, яке може бути пружним або непружним.

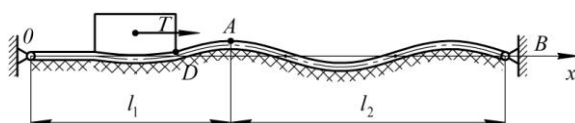


Рис. 1. Схема взаємодії штамп з напівпростором

На ділянці l_1 балки-смуги (зовнішнього шару) відбувається пружне переміщення шару під дією поздовжнього зусилля T , і матеріал у зоні поздовжньої деформації відповідає закону Гука [2] (у межах шару)

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad (1)$$

На ділянці l_2 , в основному мають місце непружні деформації і матеріал шару не відповідає закону Гука, і у ряді випадків, поверхневий шар матеріалу втрачає пружну стійкість і при цьому шар змінює свою плоску форму [3] на хвиляподібну, що впливає з формули стійкості Ейлера для шару (рис. 2). Під час розрахунків поверхневих шарів матеріалу деталі на стійкість вводиться коефіцієнт зниження поздовжньої стійкості φ [4], який залежить від гнучкості шару λ^{**} . Для шару, підтримуваного пружною основою, пропонуємо використовувати формулу зниження гнучкості в разі підвищення жорсткості основи β у вигляді

$$\lambda^{**} = \lambda^* - \Delta \lambda^*, \quad (2)$$

де $\lambda^* = \frac{l_2}{i}$ – геометрична гнучкість балки-смуги без поперечних зв'язків; $\Delta \lambda^*$ – приріст гнучкості балки-смуги ($\Delta \lambda^* = \frac{\beta}{E_c}$), зазвичай $\beta \ll E_c$; β – жорсткість пружної основи, якщо $\beta = 0$, то пружна основа відсутня; E_c – модуль пружності (пружної) основи.

Гіпотетична формула (2) корелює з даними експериментів щодо поздовжньої стійкості балок з різною гнучкістю.

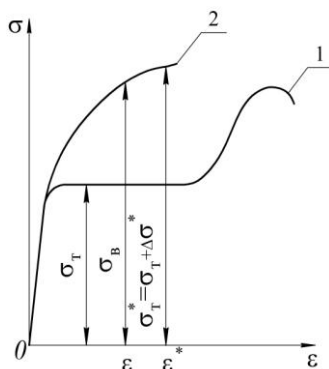


Рис. 2. Діаграми розтягування – стиснення (1 – діаграма для матеріалу у стані поставки; 2 – діаграма поверхневого шару матеріалу після тривалої притирки та зміцнення (відповідно до закону нелінійної пружності)): σ_T – межа текучості матеріалу 1; σ_B – межа міцності матеріалу 2 (σ_B^* – руйнівне напруження); $\varepsilon_B \rightarrow \varepsilon_B^*$ – руйнівна деформація деталі; $\Delta \sigma^*$ – приріст напруження для матеріалу 2.

Поняття гнучкості та її розрахунок використовуються при оцінці міцності та стійкості стрижнів, балок (балок-смуг), де за формулою Ейлера визначаються критичні напруження з урахуванням модуля пружності (E) та гнучкості (λ)

деталі. Під час виконання технічних розрахунків для балок-смуг, окрім формули Ейлера, також використовується формула (закон) Гука.

Однак, при використанні зазначених формул, пряма пропорційність між σ_x і ε_x дотримується при малих приростах $\Delta\sigma_x$ і $\Delta\varepsilon_x$.

Зауважимо, що форма зазначених законів є зручною для технічних розрахунків, тому в інженерній практиці використовуються класичні формули, але через E^* вони наповнюються новим змістом.

При розрахунках на стійкість поверхневих шарів від розрахункових формул хочуть зберегти в класичній формі, піддаючи зміні лише вид конкретної залежності для модуля пружності, наприклад $\frac{d\sigma_x}{dx}$.

Або використовувати деякий приведенний модуль пружності. Так в формулі Ейлера часто використовують формулу модуля пружності, яка запропонована Т. Карманом [2], у вигляді:

$$E^{**} = \frac{4EE^*}{(\sqrt{E} + \sqrt{E^*})^2}, \quad (3)$$

де E – модуль пружності для абсолютно пружного матеріалу (за законом Гука), E^* – дотичний модуль пружності ($E^* = \frac{d\sigma_x}{dx}$) [5].

Тобто у формулу Ейлера закладається модуль, який має змінний характер, інакше матеріал балки-смуги не відповідає закону Гука в лінійній постановці.

Деякі дослідники використовують закон Гука в нелінійній постановці. Зауважимо, що академіком Н. Х. Арутюняном [4] була запропонована нелінійна залежність напруження від деформації, яка є узагальненою формулою закону Гука у вигляді:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x^n, \quad (4)$$

де $n \leq 1$ – показник ступеня, який характеризує нелінійні (пластичні) властивості матеріалу та визначається на основі експериментальних даних. Якщо $n \approx 1$, то переходимо до закону Гука в класичній (лінійній) постановці.

Для деяких випадків розшарування механічних властивостей матеріалу по висоті ущільненого шару, ми пропонуємо гіпотетичну формулу закону Гука, сутність якої переформулюється з поняттям дотичного модуля пружності, тоді аналог закону Гука представимо у вигляді:

$$\sigma_x = E^v \varepsilon_x, \quad (5)$$

де v – деякий змінний по висоті шару коефіцієнт зміни модуля ($v \leq 1$ – визначається експериментальним шляхом, при $v \approx 1$ залежність (5) співпадає з класичною формою закону Гука).

Вираз E^v в першому наближенні, можна апроксимувати за допомогою формули дотичного модуля. Знаючи закон зміни E^v , можна розрішити диференціальне рівняння

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = E^v \quad (6)$$

відносно невизначеного коефіцієнта v для кожного шару з різними даними.

При розрахунках поверхневих шарів деталей на міцність з наступним їх руйнуванням, слід розглядати окремо ділянку l_1 (рис. 1), де відбувається розтягнення з накладеними фрикційними коливаннями і матеріал шару веде себе пружно.

А також ділянка l_2 , де відбуваються непружні деформації і поверхневий шар за остаточної пластичності втрачає свою форму та набуває вигляду хвилеподібної поверхні, тобто має місце прояв нелінійних законів Гука та Ейлера.

У випадку багатоциклічного поверхневого припрацювання, поверхневий шар металу отримує помітне зміцнення та стає крихкими (рис. 2). Значить втрата поздовжньої стійкості шару може й не статися, а шар отримає крихке руйнування. При цьому має місце крихкий злам хвильових мікронерівностей. Розглянутий поверхневий шар після пружного зміцнення, та одних і тих самих деформацій, що й для незміцненого шару сприймає більше навантаження і в матеріалі виникнуть критичні напруги, близькі до границі міцності зміцненого поверхневого шару металу, в місцях виникнення амплітудних значень хвильових деформацій.

Згідно Гріффітсу [5], в поверхневих шарах металу виникають мікротріщини, таким чином аналізуючи поведінку матеріалу поверхневого шару під дією дотичних зусиль зовнішні шари матеріалу можуть робити як в границях пружно-пластичних, так і крихких деформацій (рис. 3, 4).



Рис. 3. Механізм крихкого руйнування поверхневих шарів деталі при хвилеподібних деформаціях (ефект руйнування деформаційних мікронерівностей): λ_1 – довжина хвилі деформації.

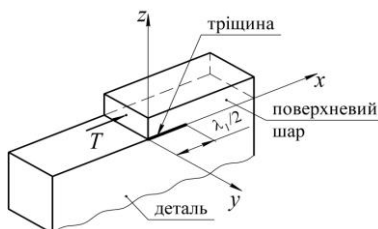


Рис. 4. До оцінки крихкого руйнування елемента деформаційної хвилі: T – дотичне зусилля; λ_1 – довжина хвилі деформації.

Метою роботи є обґрунтування передумов розвитку механізму зносу в результаті тріщиноутворення та крихкого руйнування шарів як багат шарового матеріалу при їх поверхневому і багатоциклічному зміцненні у випадку наклепу, що розвивається.

Виклад основного матеріалу. В процесах тертя та зношування і подальшого припрацювання взаємодіючих деталей, їх фізичні характеристики $\sigma_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{т}}$, $\sigma_{\text{у}}$, $E_{\text{с}}$, σ_{-1} та інші з плином часу контактування деталей змінюються в деяких межах, тому в результаті крихкої поведінки матеріалу попереду штампа виникає складчаста (пластинчаста поверхня), яка, в більшій мірі характеризується відривом утвореного складчастого поверхневого шару від пружної основи деталі [6]. Причому лусочки цієї поверхні, які являються

елементами зносу, чергуються з недеформованими (плоскими) елементами взаємодіючих поверхонь.

За рахунок взаємодії деталей, у яких деформовані мікронерівності схильні до утворення мікротріщин довжиною $\lambda_1/2$ (див. рис. 3), відбувається відрив частинок поверхневого шару під дією стискаючого навантаження та згинаючого моменту [7].

Розглянемо поздовжні та згинальні деформації балки-смужки на ділянках l_1 , l_2 під дією зусилля T . Попередньо звернемось до майданчика контакту деталей розміром b , h , l_1 , розподіленої маси m та жорсткістю зміцненого шару EF (рис. 5).

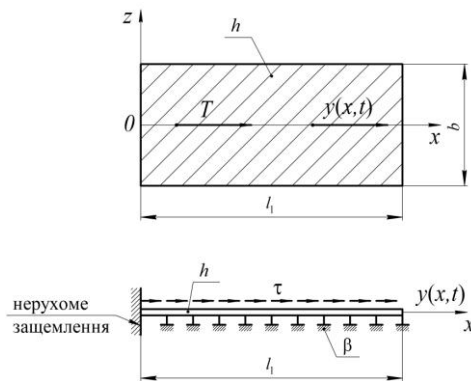


Рис. 5. Розрахункова схема майданчика контакту

Під $y(x, t)$ будемо розуміти поздовжнє зміщення (деформацію) площадки контакту (zOx рухома система координат). Розглянемо розтягнення ділянки l_1 під дією сумарного зусилля T .

$T = \sum_{i=1}^n \tau_i$ – сума елементарних зусиль на довжині площадки контакту; τ_i – інтенсивність дотичних зусиль на площадці контакту.

Вважаємо, що балка-смуга (її зовнішні волокна) навантажена зовнішнім розподіленим зусиллям з боку протилежної деталі, при цьому балки-смуги на взаємодіючих деталях підкріплені пружною основою (з коефіцієнтом основи β).

У роботі [8] розглянуто задачу про розтягнення рухомої балки-смуги в рухомій системі координат, з урахуванням рухомої пружної основи. Зовнішніми силами для цього завдання є вага штампа P і сила тертя T (як і коефіцієнт тертя f), представлені у вигляді кубічної залежності від швидкості ковзання деталей $v_{ск}$.

З урахуванням викладених міркувань змінна $y(x, t)$ є пружним переміщенням точки x у межах площадки контакту.

Як впливає з [8], диференціальне рівняння для визначення поздовжніх переміщень балки-смуги має вигляд

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E_c F}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta y}{m} + \frac{T}{b l_1 m}, \quad (7)$$

де E_c – модуль пружності поверхневого шару; F – площа поперечного перерізу поверхневого шару деталі; m – погонна маса матеріалу деталі; P – вертикальне навантаження на деталь (її вага); b , l_1 – лінійні розміри рухомої

деталі; β – коефіцієнт основи по відношенню до модифікованого поверхневого шару.

Силу тертя T запишемо з урахуванням коефіцієнта тертя f , представленого у вигляді кубічної залежності від швидкості ковзання деталей $v_{\text{ск}}$ [9]

$$f = f_0 - a v_{\text{ск}} + \bar{b} v_{\text{ск}}^3, \quad (8)$$

або з врахуванням уявлення $v_{\text{ск}} = \frac{\partial y}{\partial t}$

$$f = f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3, \quad (9)$$

де f_0 – коефіцієнт тертя спокою; $a = \frac{3(f_0 - f_{\text{min}})}{2v_{\text{кр}}}$ – коефіцієнт характеристики тертя для спадного відрізка залежності $f = f(v_{\text{ск}})$ [9]; $\bar{b} = \frac{f_0 - f_{\text{min}}}{2v_{\text{кр}}^3}$ – коефіцієнт характеристики тертя для параболічної ділянки залежності $f = f(v_{\text{ск}})$ [9]; f_{min} – мінімальне значення коефіцієнта тертя [9], згідно характеристики тертя.

Критична швидкість ковзання ($v_{\text{кр}}$) – швидкість при якій реалізується рівність $f = f_{\text{min}}$. $v_{\text{кр}}$ може бути визначена за формулою:

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{a}{3\bar{b}}}, \quad (10)$$

якщо відомі константи a та $\bar{b}$.

Використовуючи макромодель тертя, у вигляді (9), запишемо диференціальне рівняння для позовжніх автоколивань балки-смуги

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{E_c F}{m} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\beta y}{m} + \frac{P}{b l_1 m} \left[f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 \right]. \quad (11)$$

Рівняння (11) формально розв'яжемо відносно $y(x, t)$

$$y(x, t) = -\frac{m}{\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{E_c F}{\beta} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{P}{b l_1 \beta} \left[f_0 - a \frac{\partial y}{\partial t} + \bar{b} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^3 \right]. \quad (12)$$

Рівняння (11) і його модифікований запис (12) повинні розглядатися з урахуванням граничних умов (рис. 1), які представимо для лівого кінця балки-смуги при $x = 0$

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x}|_{x=0} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Окрім умов (13) для правого кінця балки-смуги можна записати граничну умову $y|_{x=l_1} = \xi_{\text{max}}$, що означає, що зміщення правого кінця ξ_{max} буде найбільшим переміщенням площадки контакту (при $x = l_1$), яке поки ще невідомо.

Звертаючись до рівняння (11), робимо висновок, що його точний розв'язок отримати не вдасться. Тому розв'язок будемо будувати, виходячи з методу ітерацій та методу Фур'є [9]. Припустимо, що $y_1(x, t)$ є наближеним розв'язком (12)

$$y_1(x, t) = \sum_{i=1}^n Y_1(x) Z_1(t) = (C_1 \cos(p_n x) + C_2 \sin(p_n x)) \frac{v_0}{p_0} \sin(p_0 t), \quad (14)$$

де $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}} \cdot l\right)}$ – довільні постійні задачі, що визначаються з

граничних умов; p_n – частота коливань, що відповідає кожній n -ій формі коливань балки-смуги; p_0 – частота автоколивань балки-смуги; v_0 – початкова швидкість рухомого елемента контактуючої пари.

Наближене рішення (14), підставлене в (12), дає перше наближення за методом ітерацій.

Для подальших викладок, поки що перетворимо вираз дотичної сили, прикладеної до початкового гребеня балки-смуги в т. A (див. рис. 1, 3). Використовуючи вираз (14) і наближені значення функцій $Y_1(x)$, $Z_1(t)$ запишемо вираз дотичної сили для правого кінця балки-смуги

$$T = T_A(x, t) = \frac{P}{bl_1} [f_0 - y_{max} v_0 a \cos(pt) + y_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (15)$$

З виразів (12), (14), (15) знайдемо $y_{max}(x, t) = \xi_{max}$ виходячи з невикористаної граничної умови $y_{max}(x, t) = \xi_{max} = y(l_1, t)$, тоді

$$\begin{aligned} \xi_{max} = & \frac{mP}{\beta} v_0 \sin(pt) \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}} \cdot l_1\right) - \frac{EcF}{\beta} \cdot \frac{\xi_{max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}} \cdot l_1\right)} \times \\ & \times v_0 \sin(pt) \left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}}\right)^2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{EcF}} \cdot l_1\right) + \\ & + \frac{P}{bl_1 \beta} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Звернемося до рівняння (12), яке з урахуванням прийнятих позначень перетворюється на вигляд (16), якщо використовувати додаткову граничну умову

$$y(l_1, t)|_{x=l_1} = \xi_{max}. \quad (17)$$

Отримуємо, що рівняння (16) може бути розв'язано відносно ξ_{max} , якщо представити конкретне значення параметру t . Зазначимо, що перші два доданки (16) визначають перехідні процеси при коливаннях, і з часом вони затухають (як у реальних дисипативних системах). Тому при визначенні ξ_{max} приймемо $t = 0$. Розглядаючи силові складові (вираз у квадратних дужках), вони приймають найбільші значення. Виходячи з таких міркувань, запишемо вираз для визначення ξ_{max} як розв'язок кубічного рівняння

$$\xi_{max} = \frac{P}{bl_1 \beta} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)], \quad (18)$$

при $t = 0$ отримаємо

$$\xi_{max} = \frac{P}{bl_1 \beta} [f_0 - \xi_{max} v_0 a + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b}]. \quad (19)$$

Рівняння (19) може бути приведено до вигляду

$$\xi_{max}^3 - \xi_{max} \left(\frac{a}{\bar{b} v_0^2} + \frac{bl_1 \beta}{P \bar{b} v_0^3} \right) + \frac{f_0}{\bar{b} v_0^3} = 0. \quad (20)$$

Розв'язок (20) має три корені, спочатку будемо вважати, що серед коренів є хоча б один дійсний, а інші два комплексно-спряжені, тому вони не відповідають фізичному сенсу задачі. Кількість дійсних коренів залежить від знака дискримінанту рівняння D

$$D = \frac{f_0^2}{4\bar{b}^2 v_0^6} + \left(\frac{a}{3\bar{b} v_0^3} + \frac{b l_1 \beta}{3P \bar{b} v_0^3} \right)^3, \quad (21)$$

якщо $D > 0$, то рівняння (20) має один дійсний корінь.

З метою визначення дійсного кореня використаємо розв'язок Кардано

$$y_1 = u_1 + v_1, \quad (22)$$

де

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{f_0}{2\bar{b} v_0^3} + \sqrt{\left(\frac{f_0}{2\bar{b} v_0^3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3\bar{b} v_0^3} + \frac{b l_1 \beta}{3P \bar{b} v_0^3}\right)^3}},$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{f_0}{2\bar{b} v_0^3} - \sqrt{\left(\frac{f_0}{2\bar{b} v_0^3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3\bar{b} v_0^3} + \frac{b l_1 \beta}{3P \bar{b} v_0^3}\right)^3}}.$$

Для подальшого розв'язання кубічного рівняння, після визначення y_1 використаємо розклад лівої частини рівняння на множники

$$\xi_{\max}^3 - \xi_{\max} \left(\frac{a}{\bar{b} v_0^2} + \frac{b l_1 \beta}{P \bar{b} v_0^3} \right) + \frac{f_0}{\bar{b} v_0^3} = (\xi_{\max} - y_1)(\xi_{\max} - y_2)(\xi_{\max} - y_3). \quad (23)$$

Оскільки розв'язок y_1 знайдено, то добуток $(\xi_{\max} - y_2)(\xi_{\max} - y_3)$ дасть квадратне рівняння, розв'язок якого дозволяє знайти залишені корені рівняння (20).

Знайдемо найбільше значення ξ без спрощуючих допущень. З цією метою формально запишемо (16), виходячи з умови, що $y = \xi_{\max}$ і $x = l_1$. Тоді матимемо

$$\xi_{\max} = \xi_{\max} \frac{mP}{\beta} v_0 \sin(pt) - \xi_{\max} \frac{mP^2 - \beta}{\beta p} v_0 \sin(pt) + \frac{P}{b l_1 p} f_0 -$$

$$- \xi_{\max} \frac{P}{b l_1 p} v_0 a \cos(pt) + \xi_{\max}^3 \frac{P}{b l_1 p} v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt). \quad (24)$$

Визначимо, при яких значеннях t змінна $y_{\max}(x, t) = \xi$ приймає найбільше значення. З цією метою обчислимо похідну від (24) і прирівняємо її до нуля

$$0 = \xi_{\max} \frac{mP}{\beta} v_0 p \cos(pt) - \xi_{\max} \frac{mP^2 - \beta}{\beta} v_0 \cos(pt) + \xi_{\max} \frac{P}{b l_1} v_0 a \sin(pt) -$$

$$- \xi_{\max}^3 \frac{P}{b l_1 p} v_0^3 3 \bar{b} \cos^2(pt) \sin(pt). \quad (25)$$

Введемо позначення

$$\alpha_1 = \frac{v_0}{\beta p} [mPp - (mP^2 - \beta)], \alpha_2 = \frac{P}{b l_1 p} v_0 a, \alpha_3 = \frac{P}{b l_1 p} v_0^3 \bar{b}, \alpha_4 = \frac{P}{b l_1 p} f_0. \quad (26)$$

Тоді з урахуванням (26) запишемо (24) у компактному вигляді

$$\xi_{\max} = \xi_{\max} \alpha_1 \sin(pt) + \alpha_4 - \xi_{\max} \alpha_2 \cos(pt) + \xi_{\max}^3 \alpha_3 \cos^3(pt). \quad (27)$$

Після диференціювання (27) по t і виконання перетворень отримаємо

$$0 = \xi_{\max} \alpha_1 p \cos(pt) + \xi_{\max} \alpha_2 p \sin(pt) - 3 \xi_{\max}^3 \alpha_3 p \cos^2(pt) \sin(pt). \quad (28)$$

$$0 = \xi_{\max} \alpha_1 p \cos(pt) + [\xi_{\max} \alpha_2 p - 3 \xi_{\max}^3 \alpha_3 p \cos^2(pt)] \sin(pt). \quad (29)$$

$$[9 \xi_{\max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^4(pt) - 6 \xi_{\max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^2(pt) + \xi_{\max}^2 \alpha_2^2 p^2] \times$$

$$\times (1 - \cos^2(pt)) = \xi_{\max}^2 \alpha_1^2 p^2 \cos^2(pt). \quad (30)$$

$$9 \xi_{\max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^4(pt) - 6 \xi_{\max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^2(pt) + \xi_{\max}^2 \alpha_2^2 p^2 -$$

$$- 9 \xi_{\max}^6 \alpha_3^2 p^2 \cos^6(pt) + 6 \xi_{\max}^4 \alpha_2 \alpha_3 p^2 \cos^4(pt) -$$

$$- \xi_{\max}^2 \alpha_2^2 p^2 \cos^2(pt) = \xi_{\max}^2 \alpha_1^2 p^2 \cos^2(pt). \quad (31)$$

$$9\xi_{max}^6\alpha_3^2p^2(\cos^4(pt) - \cos^6(pt)) - 6\xi_{max}^4\alpha_2\alpha_3p^2(\cos^2(pt) + \cos^4(pt)) + \xi_{max}^2\alpha_2^2p^2(1 - \cos^2(pt)) = \xi_{max}^2\alpha_1^2p^2\cos^2(pt). \quad (32)$$

Зауважимо, що вирази в перших двох дужках (32) при $pt \rightarrow 0$ або $pt \rightarrow i\pi$, де $i = 1, 2, 3, \dots$ будуть малими величинами. Якщо ж $\cos(pt) \rightarrow 1$ (або $\cos(pt + i\pi) \rightarrow 1$), то приблизно можна визначити $\cos^2(pt)$ залишаючи в (32) тільки два останні вирази.

Звідки

$$\cos^2(pt) = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\cos(pt) = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right). \quad (33)$$

Тоді

$$\sin(pt) = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}}. \quad (34)$$

Підставляючи (33), (34) у вирази (27), отримаємо

$$-\xi_{max} + \xi_{max}^3\alpha_3 \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} + \xi_{max} \left(\alpha_1 \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}} - \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}} \right) + \alpha_4 = 0. \quad (35)$$

Розв'язавши (35) відносно ξ_{max} за методом Кардано отримаємо або один, або три дійсні корені. Найбільший (позитивний) корінь (один із трьох) або один дійсний корінь дадуть найбільше позитивне зміщення контактної площадки.

Таким чином, отримано найбільше значення переміщення кінця контактної площадки при $x = l_1$ з урахуванням і без урахування спрощуючих допущень. Це рішення буде використано надалі при визначенні амплітуд коливань балки-смушки на ділянці l_2 .

Зауважимо, що дотичне зусилля $T^* = T + \Delta T$ є параметричним навантаженням для поверхневого шару в межах ділянки балки-смушки l_2 , який може бути описаний диференціальним рівнянням четвертого порядку з частинними похідними [10]

$$E_c I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \beta v + T^* \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0. \quad (36)$$

Розглянемо рівняння (36) з урахуванням граничних умов для шарнірно опертих країв балки-смушки.

У наведеному виразі:

$v(x, t)$ – поперечний прогин балки-смушки; E_c – модуль пружності поверхневого шару балки-смушки; I – момент інерції поперечного перерізу балки-смушки; β – коефіцієнт пружної віддачі основи.

Для багатьох випадків навантаження балок-смушок розподілене дотичне зусилля може бути описане за допомогою формули (15), яка представлена для довільної точки ділянки l_1 контакту деталей.

Враховуючи той факт, що зусилля T передається балці-смушці в точці A при $x = l_1$, то

$$T = T_A(x, t) = T_A(l_1, t) = \frac{P}{bl_1} [f_0 - \xi_{max} v_0 a \cos(pt) + \xi_{max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (37)$$

Для аналізу виразів T^* , $T + \Delta T$ запишемо на підставі [8] вираз $y(x, t)$ у розгорнутій формі на ділянці l_1 .

На підставі даних [9] запишемо наближений вираз для поздовжнього переміщення точок балки-смушки довжиною l_1

$$\begin{aligned}
 y(x, t) = & \frac{P}{\beta} v_0 \sin(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) - \\
 & - \frac{E_c F}{\beta} \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) \cdot \frac{v_0}{p} \sin(pt) + \\
 & + \frac{P}{\beta b l_1} \cdot \left[f_0 - v_0 \cos(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) + \right. \\
 & \left. + v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt) \cdot \frac{\xi_{\max}^3}{\sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot l_1\right)} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{mP^2 - \beta}{E_c F}} \cdot x\right) \right]. \quad (38)
 \end{aligned}$$

Для попереднього спрощення викладок у розв'язанні рівняння (36) не були враховані інерційні та деформаційні складові, тому вирази для $T(x, t)$ мають вигляд (37), тоді поздовжні переміщення балки-смушки представимо у формі

$$y(x, t) = \frac{P}{\beta b l_1} \cdot [f_0 - \xi_{\max} v_0 \cos(pt) + \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (39)$$

Як впливає з [1], при коливаннях і багаторазовому переформуванні поверхневих шарів у межах взаємодії контактних майданчиків на ділянці l_1 (при циклічному переміщенні елементів поверхневого шару спостерігається зближення кінців (умовних опор) ділянки l_2 балки-смушки, в результаті цього переміщення, на ділянці l_2 виникає додаткова поздовжня сила у вигляді параметричного навантаження

$$\Delta T = -c y(x, t), \quad (40)$$

де c – розподілена поздовжня жорсткість балки-смушки з підповерхневими шарами матеріалу деталі. Тоді, відповідно до формул (37), (39), (40), повна поздовжня сила, викликана силами тертя і зміщення кінців стрижня (T^*) запишеться у вигляді

$$T^* = T + \Delta T = \frac{P(1-c)}{\beta l_1} \cdot [f_0 - \xi_{\max} v_0 \cos(pt) + \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (41)$$

Введемо позначення $P^* = P(1-c)$, при цьому вираз T^* за формою збігатиметься з (37)

$$T^* = \frac{P^*}{\beta l_1} \cdot [f_0 - \xi_{\max} v_0 \cos(pt) + \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt)]. \quad (42)$$

Тоді як розв'язок (42) скористаємося отриманим раніше розв'язком [1].

Шуканий розв'язок (36) знайдемо у вигляді добутку двох функцій

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n z_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l_2}\right) \quad (43)$$

з урахуванням граничних умов для задачі про поздовжній вигин балки-смушки на ділянці l_2 (при шарнірному опиранні кінців)

$$\begin{cases} v(0, t) = 0; v(l_2, t) = 0 \\ v''(0, t) = 0; v''(l_2, t) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

де $l_1 \leq x \leq l_2$.

Підставляючи (43) в початкове рівняння (36), отримаємо

$$E_c I \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} z_k(t) + m \ddot{z}_k(t) + \beta z_k(t) - T^* \frac{k^2 \pi^2}{l_2^2} z_k(t) = 0 \quad (45)$$

або

$$\ddot{z}_k + \left[E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - T^* \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \right] z_k = 0. \quad (46)$$

Якщо підставити в (46) замість T^* його значення (42), то отримаємо:

$$\ddot{z}_k + \left[E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P^*}{b l_1} \cdot f_0 + \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P^*}{b l_1} \cdot \xi_{\max} v_0 a \cos(pt) - \right. \\ \left. - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P^*}{b l_1} \cdot \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cos^3(pt) \right] z_k = 0. \quad (47)$$

Оскільки рівняння (47) відрізняється від відповідного рівняння [1] лише величиною зусилля P^* , тому за аналогією з отриманим раніше рішенням скористаємося методом варіації параметрів.

Згідно з алгоритмом розв'язання [11] вираз (47) приводиться до вигляду

$$\ddot{z}_k(t) + \omega_{0k}^{*2} [1 - \alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)] z_k = 0, \quad (48)$$

де ω_{0k}^* – власна частота коливань балки-смушки l_2 для форми (коливань) з індексом k , яка знаходиться з виразу

$$\omega_{0k}^{*2} = E_c I \frac{k^4 \pi^4}{m l_2^4} + \frac{\beta}{m} - \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P^*}{b l_1} \cdot f_0,$$

де $P^* = P(1 - c)$ – приведенне вертикальне навантаження;

$$\alpha_k^* = \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot \frac{P^*}{b l_1} \cdot \xi_{\max} v_0 a \cdot \frac{\beta m l_2^4 b l_1}{E_c I k^4 \pi^4 b l_1 + \beta l_2^4 b l_1 + k^2 \pi^2 P^* l_2^2 f_0}, \\ \beta_k^* = \frac{k^2 \pi^2}{m l_2^2} \cdot P^* \cdot \xi_{\max}^3 v_0^3 \bar{b} \cdot \frac{\beta m l_2^4}{E_c I k^4 \pi^4 b l_1 + \beta l_2^4 b l_1 + k^2 \pi^2 P^* l_2^2 f_0}.$$

Для розв'язання задачі цим методом необхідно скласти функцію $\varphi_k^*(t)$ і задатися значенням параметра μ з діапазону ($0 < \mu \leq 1$). Приймаємо $\mu = 1$, при цьому періодична функція рівняння має вигляд

$$\varphi_k^*(t) = \beta_k^* \cos^3(pt) - \alpha_k^* \cos(pt). \quad (49)$$

Функція $\varphi^*(t)$ повинна задовольняти умову

$$\left| \frac{\varphi_k^{*'}(t)}{\varphi_k^*} \right| + \frac{\omega_{0k}^*}{2\pi} \ll 1. \quad (50)$$

Якщо виконується умова (50), то рівняння (48) представляємо у формі Каннінгема [11]

$$\ddot{z}_k(t) + \omega_{0k}^{*2} [1 + \mu \varphi_k^*(t)] z_k = 0. \quad (51)$$

Відповідно до методу варіації параметрів, породжуюче рішення запишемо у формі

$$z_k(t) = A_k^* \cos(\omega_{0k}^* t + \Theta_k^*) = A_k^* \cos \psi_k, \quad (52)$$

де ψ_k – часова змінна ($\psi_k = \omega_{0k}^* t + \Theta_k^*$); A_k^* , Θ_k^* – параметри, що підлягають варіації (A_k^* – амплітуда деформаційних хвиль для k -ої гармоніки; Θ_k^* – початкова фаза для k -ої гармоніки).

Відповідно до алгоритму розв'язання [11]

$$\frac{dA_k^*}{dt} = \mu_k \omega_{0k}^* A_k^* \varphi_k^*(t) \sin \psi_k \cos \psi_k, \quad (53)$$

$$\frac{d\Theta_k^*}{dt} = \mu_k \omega_{0k}^* \varphi_k^*(t) \cos^2 \psi_k. \quad (54)$$

Розв'язання (53) знаходимо в результаті його інтегрування

$$A_k^* = B_k \exp \left[\frac{\mu_k \omega_{0k}^*}{2} \int \varphi_k^*(t) \sin 2\psi_k dt \right]. \quad (55)$$

Відповідно до формули (55), можна записати наближену рівність

$$\int \varphi_k^*(t) \sin 2\psi_k dt \cong -\frac{\varphi_k^*(t)}{2\omega_{0k}^*} \cos 2\psi_k. \quad (56)$$

Якщо (50) не виконується, то можна виконати безпосередньо інтегрування (56). З урахуванням (56) отримаємо наближене значення виразу (55)

$$A_k^*(t) = B_k \exp \left[-\frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \cos 2\psi_k(t) \right]. \quad (57)$$

Рівняння (57) виражає коливання амплітуд з частотою, яка визначається кутом $2\psi_k(t) = 2(2\omega_{0k}^*t + \Theta_k^*)$.

Виходячи з умов (50), амплітуда може реалізовувати лише малі зміни кожного циклу коливань. Тому має сенс розглядати значення A_k^* в момент, коли $z_k(t)$ досягає максимуму, враховуючи, що протягом найближчого періоду $A_k^*(t)$ будуть зберігати ті ж значення. Тоді, враховуючи вигляд породжуючого рішення, максимум $\max z_k(t)$ досягається при $\cos 2\psi_k = +1$, і рівняння для амплітуд набуде вигляду

$$A_k^*(t) = B_k \exp \left[-\frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \right] \approx B_k \left[1 - \frac{\mu_k}{4} \varphi_k^*(t) \right], \quad (58)$$

де B_k – довільна стала, яка визначається з початкових умов задачі і трактується як початкове зміщення.

Для визначення кута змін Θ_k^* достатньо скористатися середнім значенням кута за цикл коливань.

$$\left(\frac{d\Theta_k^*}{dt} \right)_{cp} = \frac{\mu_k \omega_{0k}^*}{2} \varphi_k^*(t), \quad (59)$$

тоді

$$\Theta_k^* = -\frac{\mu_k \omega_{0k}^* \alpha_k^*}{2p} \sin(pt) + \frac{\mu_k \omega_{0k}^* \beta_k^*}{2p^2} \left(\sin(pt) - \frac{\sin^3(pt)}{3} \right), \quad (60)$$

і рівняння амплітуд набуде вигляду

$$A_k^* = B_k \left[1 - \frac{1}{4} \cdot (-\alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)) \right]. \quad (61)$$

Після обчислення похідної від A_k^* і прирівнювання її до нуля, визначимо $2_{max} \psi_k$ і знайдемо вираз $\max A_k^*$ через α_k^* , β_k^* , B_k у вигляді

$$\max A_k^* = B_k \left[1 + \frac{2}{3} \cdot \alpha_k^* \cdot \sqrt{\frac{\alpha_k^*}{3\beta_k^*}} \right]. \quad (62)$$

Розглядаючи спільно деформаційний процес на суміжних ділянках балки-смуги l_1 , l_2 відзначаємо, що ділянка l_1 знаходиться в зоні розтягування під дією зусилля T , а ділянка l_2 знаходиться в зоні стискання під дією того ж зусилля, це викликає подовження ділянки l_1 і зближення (віддалення) рухомого і нерухомого кінців ділянки l_2 (при коливаннях).

У такому випадку центральна частина балки-смуги може бути вигнута, у проміжку між опорами по дузі з кількома напівхвилями. Розглянута деформація ділянки l_2 має нелінійний характер. Виконаний розрахунок амплітуд хвиль деформації методом варіації параметрів дає рішення лінеаризованої задачі без урахування геометричної та фізичної нелінійності. Розглянемо процес деформування балки-смуги на ділянках l_1 , l_2 з урахуванням взаємозв'язку між

поздовжнім переміщенням (приростом зусилля ΔT) і хвилеподібними деформаціями балки-смуги $v(x, t)$ на ділянці l_2 .

В процесі взаємодії (при русі) деталей фрикційної пари, в шарі можна виділити дві ділянки на подовженій деталі (рис. 1):

1. Ділянка в зоні розтягування поверхневих шарів – стрічка OA ;
2. Ділянка в зоні стиснення поверхневих шарів (стрічка AB).

Як впливає з результатів спостережень та експериментальних досліджень з деталями таких кінематичних пар, ділянка OA піддається впливу сили T , яка викликає розтягнення ділянки (на розтягувальні деформації ділянки накладаються автоколивальні рухи). Накладені автоколивання, що нагадують абсолютно пружні (вільні) коливання, зі незначним розсіюванням енергії коливань, яке компенсується за рахунок енергії руху взаємодіючих тіл. Для опису процесів тертя з високим ступенем достовірності може бути використана теорія тертя [6], яка свідчить про те, що має місце пружна деформація тіл і матеріали деталей суворо дотримуються закону Гука, при цьому $\sigma_x \leq \sigma_{\text{пц}}$ ($\tau_{xy} \leq \tau_{\text{пц}}$). Однак при переході точки D (штампом) в точку A , балка-смуга, яка, як раніше було встановлено, під дією зусилля T може призвести до утворення хвилястих нерівностей (гребенів) на ділянці AB , незважаючи на пружний вертикальний підпор, що чиниться підповерхневими шарами матеріалу на поверхневі шари в результаті пружно-пластичного поведіння деформованої основи матеріалу.

При цьому, через значний внутрішній підпор деформації поверхневого шару можуть бути залишковими. Разом з тим при багатократному наклепі поверхневих шарів під впливом пружно-пластичного підпору зі сторони деформованої хвилеподібної внутрішньої поверхні матеріалу деталі може відбутися крихке руйнування зовнішнього ущільненого пружного шару металу, з попереднім утворенням поверхневих тріщин. Згідно з [12], існує два механізми утворення тріщин під час повзучості. Один з них головну роль відводить концентрації напружень, що виникає при скупченні дислокацій, інший – вакансійному механізму. У верхній частині кристалу, де розташовані екстра площини дислокацій, виникає велике стисне напруження для пластичних шарів металу і ущільнених поверхневих шарів. У нижній частині кристалу виникають розтягувальні напруження, які схильні до тріщиноутворення і можуть викликати руйнування шару відривом. Зародженню тріщини сприяє також те, що первинне порушення суцільності матеріалу виникає біля перешкоди (якою є скупчення дислокацій) ще до появи тріщини. Такий механізм розвитку тріщин маємо при нелінійному пружно-пластичному стані як поверхневих, так і підповерхневих шарів металу [13]. Ця нелінійність має як геометричну, так і фізичну складові. Для врахування нелінійності завдання розглянемо деформацію поздовжнього вигину ділянки AB у вигляді $v(x, t)$ разом з поздовжнім подовженням ділянки OA – $y(x, t)$ (рис. 1). При цьому на ділянці AB поздовжня деформація ділянки трансформується в гофровану (хвилеподібну) поверхню. У цьому випадку виразимо приріст поздовжньої сили ΔT через параметри деформаційної хвилі (амплітуди A_x^* і приріст довжини балки-смуги Δy).

З цією метою звернемося до виразу для приросту поздовжньої сили ($\Delta T = -cy$) і взаємозв'язку між поздовжніми переміщеннями ділянки

$l_1 \approx y(x, t)$ і амплітудою коливань деформаційної хвилі – хвилі на ділянці l_2 (її прогином $v(x, t)$ при втраті балкою-смугою поздовжньої стійкості [14]).

У роботі [14] встановлений взаємозв'язок між поздовжнім переміщенням ділянки l_1 і амплітудою зміни деформаційної хвилі на ділянці l_2

$$v(x, t) = \sum A_k^*(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l_2}\right). \quad (63)$$

Вважаючи, що переміщення $y(x, t)$ при деформаціях у зоні втрати поздовжньої стійкості набуває форми синусоїдальної кривої, при цьому

$$y(x, t) = y(l_1, t) = \frac{k^2 \pi^2 A_k^{*2}(t)}{4l_2} + \frac{3}{64} \cdot \frac{k^4 \pi^4 A_k^{*4}(t)}{4l_2^3}, \quad (64)$$

і беручи до уваги через малу величину $A_k(t)$ спрощену залежність

$$y(l_1, t) = \frac{k^2 \pi^2 A_k^{*2}(t)}{4l_2}, \quad (65)$$

можна перейти до виразу для приросту ΔT у вигляді $\Delta T \approx -\frac{ck^2 \pi^2}{4l_2} A_k^{*2}(t)$.

Вираз для A_k^* , формула (61) є рівнянням амплітуди коливань балки-смуги без урахування ΔT . Використаємо вираз закону коливань балки-смуги з урахуванням ΔT , тоді замість (48), (61) матимемо:

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \left[1 - \frac{\alpha_k^*}{4} \cos(pt) + \frac{\beta_k^*}{4} \cos^3(pt) + \frac{\Delta T}{T_k^*} \right] \bar{z}_k = 0. \quad (66)$$

У цьому випадку рівняння для визначення функції часу поперечного прогину [5], маємо

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 [1 - \alpha_k^* \cos(pt) + \beta_k^* \cos^3(pt)] \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \frac{ck^2 \pi^2}{4l_2 T_k^{*2}} \bar{z}_k^3 = 0. \quad (67)$$

З урахуванням перетворення функції $\cos^3(pt)$ до поєднання лінійних функцій $\cos(pt)$ і $\cos(3pt)$ запишемо рівняння (62) у вигляді

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \frac{ck^2 \pi^2}{4l_2 T_k^{*2}} \bar{z}_k^3 = \alpha_k^* \omega_{0k}^2 \cos(pt) - \frac{\beta_k^*}{4} \omega_{0k}^2 (3\cos(pt) + 3\cos(3pt)). \quad (68)$$

Таким чином, рівняння (67) перетворено на рівняння Дуффінга, яке описує вимушені коливання балки-смуги на ділянці l_2 з частотою p і нелінійною відновлювальною силою.

Далі розглянемо рівняння Дуффінга з правою частиною для основної частоти p та утроєної частоти $3p$

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \delta_1 \bar{z}_k^3 = \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right) \cos(pt), \quad (69)$$

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \bar{z}_k - \omega_{0k}^2 \delta_1 \bar{z}_k^3 = -\omega_{0k}^2 \frac{\beta_k^*}{4} \cos(3pt). \quad (70)$$

У наведених виразах використані позначення:

$$\delta_1 = \frac{ck^2 \pi^2}{4l_2 T_k^{*2}} - \text{постійний коефіцієнт};$$

c – жорсткість поздовжнього зв'язку балки-смуги з підповерхневими шарами матеріалу деталі; l_2 – довжина стиснутої ділянки балки-смуги;

$T_k^* = \frac{k^2 \pi^2 E_c}{l_2^2} + \frac{\beta l_2^2}{k^2 \pi^2}$ – критична сила для балки-смуги, підкріпленої пружною

основою з коефіцієнтом жорсткості β ; $\omega_{0k}^2 = \frac{1}{m} \left(\frac{k^4 \pi^4}{l_2^2} E_c I + \beta \right)$ – квадрат k -ої власної частоти ненавантаженої балки-смуги (з розмірами $l_2 \times b \times h$);

T – сумарна дотична сила, прикладена до балки-смуги (включає як змінну, так і постійну складові); T_0 – постійна складова дотичного зусилля; T_1 – половина амплітуди коливань дотичного зусилля; $\Omega^2 = \omega_{0k}^2 \left(\frac{T_k^* - T_0}{T_k^*} \right)$ – власна частота коливань балки-смуги у навантаженому стані; μ_k – коефіцієнт збудження коливальної системи балки-смуги ($\mu_k = \frac{T_1}{2(T_k^* - T_0)}$), для багатьох систем є малим параметром.

У роботі [14] показано, що коефіцієнт нелінійної пружності у виразі (67) збігається з виразом $\omega_{0k}^2 \delta_1$ і фактично є фізичним коефіцієнтом пружності балки-смуги при критичному (або закритичному) її навантаженні. Крім того, при критичному навантаженні балки-смуги виявляються ефекти геометричної нелінійності, тому коефіцієнт нелінійної пружності $\gamma_{\alpha\beta}$ може бути представлений у вигляді

$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{k^4 \pi^4 \omega_{0k}^2}{8 l_2^4} \left(\frac{2 c l_2}{T_k^*} + 1 \right), \quad (71)$$

тоді рівняння (48) з урахуванням нелінійного доданку $\Psi(z_k)$ запишемо у вигляді

$$\ddot{z}_k + \omega_{0k}^2 \left[1 - \frac{\alpha_k^*}{4} \cos(pt) + \frac{\beta_k^*}{4} \cos^3(pt) \right] z_k + \Psi(z_k) = 0, \quad (72)$$

а додатковий нелінійний доданок $\Psi(z_k)$ запишемо

$$\Psi(\bar{A}_k) = \gamma_{\alpha\beta} \bar{A}_k^3, \quad (73)$$

де $\Psi(\bar{A}_k)$ – нелінійна функція амплітуди.

Під час розв'язання рівнянь використовуємо метод, застосований у [11]. Розглянуті рівняння відрізняються від рівнянь з малою дисипацією [11] тим, що рівняння (69), (70) містять дисипативні елементи при коефіцієнтах α_k^* , β_k^* і функції $\cos(pt)$.

Розв'язання (69) і (70) шукаємо у вигляді

$$\bar{z}_k = \bar{A}_k^* \cos(pt), \quad (74)$$

$$\tilde{z}_k = \tilde{A}_k^* \cos(3pt). \quad (75)$$

Для визначення амплітуд коливань функцій $\bar{z}_k$, $\tilde{z}_k$ використовуємо алгебраїчні рівняння [11]

$$-p_k^2 \bar{A}_k^* + \omega_{0k}^2 \bar{A}_k^* + 3\omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \bar{A}_k^{*3} = \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right), \quad (76)$$

звідки

$$3\omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \bar{A}_k^{*3} + (\omega_{0k}^2 - p_k^2) \bar{A}_k^* - \omega_{0k}^2 \left(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^* \right) = 0, \quad (77)$$

або

$$\bar{A}_k^{*3} + \frac{4(\omega_{0k}^2 - p_k^2)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1} \bar{A}_k^* - \frac{4(\alpha_k^* - \frac{3}{4} \beta_k^*)}{3\delta_1} = 0. \quad (78)$$

Окрім алгебраїчного рівняння (78) також розглянемо алгебраїчне рівняння

$$-p_k^2 \tilde{A}_k^* + \omega_{0k}^2 \frac{\delta_1}{4} \tilde{A}_k^{*3} = -\frac{\beta_k^*}{4}. \quad (79)$$

Для спрощення розв'язків (78), (79) введемо в розгляд позначення

$$\gamma_1 = \frac{4(\omega_{0k}^2 - p_k^2)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1}; \gamma_2 = -\frac{4(\alpha_k^* - \frac{3}{4}\beta_k^*)}{3\omega_{0k}^2 \delta_1}; \gamma_3 = \frac{-\beta_k^*}{\omega_{0k}^2 \delta_1} \quad (80)$$

З урахуванням позначень (80) рівняння для амплітуд $\bar{A}_k$ набуде вигляду

$$\bar{A}_k^{*3} + \gamma_1 \bar{A}_k^* + \gamma_2 = 0. \quad (81)$$

Шукаємо дійсні (позитивні) корені (81).

Для цього дослідимо дискримінант $D = \left(\frac{\gamma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_1}{3}\right)^3$, якщо $D < 0$, то рівняння має три дійсні корені, серед яких обираємо найбільший дійсний корінь. Якщо $D > 0$, то рівняння має один дійсний корінь, який при $\gamma_1 > 0$, буде розв'язком рівняння (81). Рівняння (82) описує збурювальний вплив з утроєною частотою. Часто розв'язки таких рівнянь виключають з розгляду коливального процесу з нелінійною характеристикою відновлювальної сили.

За необхідності це рівняння записують у вигляді

$$\bar{A}_k^{*3} + \gamma_1 \bar{A}_k^* + \gamma_3 = 0, \quad (82)$$

$$\text{де } \gamma_3 = \frac{-\beta_k^*}{\omega_{0k}^2 \delta_1}.$$

Алгоритм розв'язання (82) відповідає алгоритму розв'язання (83), тільки замість константи γ_2 слід використовувати γ_3 .

Запишемо розв'язок (81)

$$\bar{A}_{1k} = \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{2} + \sqrt{\frac{\gamma_2^2}{4} + \gamma_1^3}} + \sqrt[3]{\frac{\gamma_1}{2} - \sqrt{\frac{\gamma_2^2}{4} + \gamma_1^3}}. \quad (83)$$

У випадку $D > 0$ знаходимо єдиний корінь, який визначає амплітуду коливаний $\bar{A}_{k1} = \max \bar{A}_k$. У випадку $D < 0$ рівняння (81) має три дійсні корені. За формулою (83) визначаємо один корінь.

Решта коренів визначаємо, розкладаючи поліном третього ступеня на прості множники (див. формули (29), (22), (23)). З цих трьох коренів визначаємо найбільший позитивний. Це буде $\bar{A}_{ki}$ або $\bar{A}_{ki}$, тобто амплітуди коливаний відповідних гармонік.

Для уточнення розв'язання (74), враховуючи малу нелінійність відновлювальної сили, наступне наближення функції $\bar{z}_k(t)$ шукаємо в формі

$$\bar{z}_k(t) = \bar{A}_{1k}^* \cos(pt) + \bar{A}_{3k}^* \cos(3pt). \quad (84)$$

Суть рішення полягає в тому, що воно містить як основну (першу), так і третю гармонічні складові. Підлягають визначенню $\bar{A}_{1k}^*$, $\bar{A}_{3k}^*$. При визначенні $\bar{z}_k(t)$ додатково використовуємо функцію $\bar{z}_k(t) = \bar{A}_{2k}^* \cos(3pt)$, тоді отримаємо

$$\bar{z}_k^*(t) = \bar{A}_{1k}^* \cos(pt) + (\bar{A}_{3k}^* + \bar{A}_{2k}^*) \cos(3pt). \quad (85)$$

Коефіцієнти $\bar{A}_{1k}^*$, $\bar{A}_{3k}^*$ визначаємо як розв'язки кубічних рівнянь (81), (82). Крім того, коефіцієнт $\bar{A}_{3k}^*$ визначаємо згідно з [11], використовуючи співвідношення

$$\frac{\bar{A}_{3k}^*}{\bar{A}_{1k}^*} = \frac{-\frac{1}{4}\omega_{0k}^2 \delta_1 A_{1k}^2}{\omega_{0k}^2 - 9p_1^2}. \quad (86)$$

В якості $\bar{A}_{1k}^*$ приймаємо вираз (83). Підставляючи дійсний позитивний корінь ($\bar{A}_{1k}^*$) у вираз (86) знаходимо $\bar{A}_{3k}^*$. Після визначення $\bar{A}_{3k}^*$ і підстановки його значення у (85), імітуючи метод ітерацій, отримуємо уточнене значення $\bar{z}_k^*(t)$.

Згідно даних проведених експериментальних [13] та теоретичних досліджень встановлено, що балка-смуга поза площиною контакту знаходиться в пружнопластичному стані (з зміцненим поверхневим шаром), при цьому композиція поверхневих і підповерхневих шарів є вогнищем утворення дислокацій та мікротріщин, які в ряді випадків навантаження поверхневих шарів не схильні до втрати пружної стійкості, а піддаються місцевому крихкому руйнуванню через низьку гнучкість поверхневого шару.

Висновки

1. У роботі обґрунтована роль самозбуджуваних нестационарних напружень і деформацій взаємодіючих деталей у розвитку багатоциклових втомних руйнувань поверхневих шарів на мікро- та макрорівнях для зовнішніх шарів балки-смужки на ділянці під штампом і перед штампом при фрикційному та параметричному їх збудженні.

2. Досліджено причини пружно-пластичної поведінки зовнішніх шарів металевих деталей, які обумовлені як геометричною, так і фізичною нелінійною залежністю між поздовжніми та вигинними деформаціями деталей при нестационарних фрикційних процесах.

3. Авторами встановлена можливість виникнення нестійких станів поверхневих шарів, обумовлених їх крихкою структурою, які можуть руйнуватися за рахунок тріщиноутворення ще до втрати ними поздовжньої стійкості.

4. У роботі поставлено та розв'язано динамічну задачу про виникнення додаткової поздовжньої сили, яка за рахунок зміщення «рухомої» опори балки-смужки призводить до нелінійних фізичних моделей у зовнішніх зміцнених шарах деталей, які описуються за допомогою нелінійного рівняння Дуффінга.

5. Проведені дослідження призвели до створення фізичної моделі задачі, де зовнішні шари деталей представлені у вигляді сукупності анізотропних композицій поверхневих і підповерхневих шарів, які мають як крихкі (пружні), так і нелінійно пружні властивості, навантажені нестационарною дотичною силою, яка при депланації плоских перерізів призводить як до крихкого руйнування, так і до пружно-пластичного деформування шарів.

6. Практичне значення роботи полягає в тому, що виявлені режими експлуатації машин, коли виникає додаткове дотичне зусилля, яке призводить до додаткових поздовжніх переміщень і депланації верхніх шарів деталей, при цьому виникають додаткові (нерегламентовані) вертикальні прогини, що сприяють додатковій тріщиноутвореності та частковому крихкому руйнуванню цих шарів.

Такий механізм порушення цілісності зовнішніх шарів є передумовою для зносу поверхонь при циклічному навантаженні.

В цілому, процес зношування поверхневих шарів пов'язаний як з попереднім зміцненням зовнішніх шарів, їх переходом у крихкий стан, втратою поздовжньої стійкості шару від внутрішнього підпору підповерхневих шарів і крихким

руйнуванням (частковим) зовнішнього шару без втрати його поздовжньої стійкості.

Список літератури

1. Маліновський Ю. О., Мікосянчик О. А., Власенков Д. П., Ситник С. О., Рибак Д. П., Олійник С. Ю. Параметричні й автоколивальні процеси в поверхневих шарах деталей як зовнішні джерела їхнього руйнування під час тертя і зношування. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2024. № 4. С. 4-25. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(105\).19386](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(105).19386)
2. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. 3-е изд. М., «Наука», 1979. 384 с.
3. Маліновський Ю. О., Даниліна Г. В., Даценко С. Ю. та ін. Квазистатичні особливості постановки деформаційно-хвильових задач при терті та зношуванні. *Металургійна та гірничорудна промисловість*. Дніпро. 2018. № 3. С. 66-71.
4. Цурпал И.А. Краткий курс сопротивления материалов. Київ, «Вища школа», 1989. 311 с.
5. Учитель А. Д., Маліновський Ю. О., Даниліна Г. В. та ін. Вплив параметричного резонансу на механізм руйнування контактуючих поверхонь при терті та зношуванні. *Металургійна та гірничорудна промисловість*. Дніпро. 2018. №4. С. 65-73.
6. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М., «Машиностроение», 1977. 526 с.
7. Учитель А. Д., Маліновський Ю. О., Панченко А. Н. та ін. Передумови виникнення автоколивальних і хвильових процесів у формоутворювальних машинах під час обробки заготовок і деталей методом пластичного деформування. *Металургійна та гірничорудна промисловість*. Дніпро. 2018. №6. С. 21-29. DOI: 10.33101/S063456734
8. Маліновський Ю. О., Власенков Д. П., Цвіркун С. Л., Олійник С. Ю. Термомеханічні явища в поверхневих шарах контактуючих деталей при терті та зношуванні. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2023. № 2. С. 39-64. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.2\(99\).17625](https://doi.org/10.18372/0370-2197.2(99).17625)
9. Смирнов В. В., Яковлев Р. А. Механика приводов прокатных станов. М., «Металлургия», 1977. 216 с.
10. Маліновський Ю., Цвіркун С., Власенков Д., Олійник С. Деформаційний аспект прояву ударно-хвильової природи тертя та зношування. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2023. № 1 (98). С. 70-97. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.1\(98\).17361](https://doi.org/10.18372/0370-2197.1(98).17361)
11. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем. М.-Л., «Госэнергоиздат», 1962. 456 с.
12. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974. 640 с.
13. Рабинович М. Х. Прочность. Температура. Время. М., «Наука», 1968. 160 с.
14. Маліновський Ю. О., Власенков Д. П., Ситник С. А., Терюшина С. С., Олійник С. Ю. Трактання енергетичних методів у теорії тертя та зношування з позицій механіки суцільних середовищ та теорії дислокацій. *Проблеми тертя та зношування*. Київ. 2023. № 4. С. 97-120. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(101\).18083](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(101).18083)

Стаття надійшла до редакції 06.05.2025.

Маліновський Юрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: malinovsky129@gmail.com, тел.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

Власенков Дмитро Петрович – старший викладач, заступник директора, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com, тел.: +38 067 296 71 75.

Олійник Світлана Юріївна – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: olynik.syu@knu.edu.ua, тел.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>

Ситник Сергій Олександрович – завідувач відділення, Криворізький фаховий коледж Державного університету «Київський авіаційний інститут», вул. Олега Антонова, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: [sytnykteacher@gmail.com](mailto:sytynykteacher@gmail.com), тел.: +38 097 930 69 24

Шевченко Олег Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри прикладної механіки та інженерії матеріалів, Державний університет «Київський авіаційний інститут», пр. Любомира Гузара, 1, м. Київ, Україна, 03058, тел.: +38 095 209 00 10, E-mail: oashev@kai.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-7559-0573>.

Бондарець Андрій Олександрович – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: bondarets@knu.edu.ua, тел.: +38 067 638 07 97

Yu. MALINOVSKY, D. VLASENKOV, S. OLIYNYK, S. SYTNYK, O. SHEVCHENKO, A. BONDARETS

PREREQUISITES FOR THE DESTRUCTION OF THE SURFACE LAYERS OF DETAILS DURING THEIR FRICTION AND WEAR

In the process of calculating friction and wear of surface layers, significant emphasis is placed on calculations for local stretching in the contact zone and the longitudinal stability of the material layers. Calculations are usually performed based on the classical laws of Hooke and Euler. For example, Hooke's laws are used for tensile calculations, where the stress σ_x is proportional to the strain ϵ_x , with $\sigma_x \leq \sigma_{\text{тн}}$. Additionally, the Euler formula is used for the stability calculations of the outer layers of the material. If $\sigma_x \geq \sigma_{\text{тн}}$, the outer layer material, associated with the base material of the part, loses its original shape, and elements of such a layer, supported by deeper plastic layers, can become brittle and lose longitudinal stability. In most loading cases, normal stresses in the zone under the stamp follow Hooke's law, and rupture stresses generally do not occur. In the zone ahead of the stamp, local stability of the layer is often lost under the same loads, leading to the formation of a corrugated surface. The change in the layer's shape indicates the presence of residual inelastic deformations.

Scattered literary sources containing data on different types of surface layers, mainly working under tension and compression, indicate that the material in the compression zone in front of the stamp behaves as an elastoplastic material. Consequently, deflection (initially flat cross-sections before deformation) and wave formation (corrugations) appear similar to initial geometrical micro-roughness after mutual shearing due to mechanical interaction. Such ambiguous material behavior during deformation suggests that instead of Hooke's and Euler's laws, their inelastic analogs manifest. Additionally, a thin surface layer due to strain hardening and re-hardening supported by the elastic base behaves like a rod with a low flexibility coefficient λ . In this case, local loss of stability of the surface layer may not occur, and brittle fatigue failure of the layer may occur. This process can end with the formation of local cracks.

Data from sources on different types of surface layer parameters, plastic, elastic, and elastoplastic, indicate that the conclusions obtained were confirmed by creating a mathematical model of the problem, reflecting the manifestations of the nonlinear properties of material parts after considering the geometric and physical nonlinearity of the deformed layer. In the mathematical model of the problem, the influence of brittle fracture of the outer layer, its cracking, and chipping on the deformation ridges can be established.

The results of the work can be refined by introducing a term describing the brittle fracture of the outer layers into the differential equation of the problem.

Key words: friction, wear, elastic deformations, elastic behavior of material, elastoplastic materials, metal creep, modulus of elasticity, shear modulus, reduced modulus, loss of stability, beam flexibility, residual deformations, deflection of flat sections, Euler's formula.

References

1. Malinovskiy Yu.O., Mikosianchuk O.A., Vlasenkov D.P., Sytnik S.O., Rybak D.P., Oliynyk S. Yu. Parametrychni y avtokolyvalni protsesy v poverkhnevyykh sharakh detalei yak zovnishni dzherela yikhnoho ruynuvannya pid chas tertia i znoshuvannya. *Problemy tertia ta znoshuvannya*. Kyiv. 2024. № 4. S. 4-25. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(105\).19386](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(105).19386)
2. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Ustojchivost i kolebaniya uprugikh sistem. 3 izd. M., «Nauka», 1979. 384 s.
3. Malinovskiy Yu. O., Danilina H. V., Datsenko S. Yu. ta in. Kvazistatychni osoblyvosti postanovky deformatsiino-khvyliovyykh zadach pry terti ta znoshuvanni. *Metalurhiina ta hirnychorudna promyslovist*. Dnipro. 2018. № 3. S. 66-71.
4. Curpal I.A. Kratkij kurs soprotivleniya materialov. Kiyiv, «Visha shkola», 1989. 311 s.

5. Uchytel A. D., Malinovskiy Yu. O., Danilina H. V. ta in. Vplyv parametrichnoho rezonansu na mekhanizm ruynuvannia kontaktuiuchykh poverkhon pry terti ta znoshuvanni. *Metalurhiina ta hirnychorudna promyslovist*. Dnipro. 2018. № 4. S. 65-73.

6. Kragelskij I.V., Dobychin M.N., Kombalov V.S. Osnovy raschetov na trenie i iznos. M., «Mashinostroenie», 1977. 526 s.

7. Uchytel A. D., Malinovskiy Yu. O., Panchenko A. N. ta in. Peredumovy vynykennia avtokolyvalnykh i khvyliovyykh protsesiv u formoutvoriuvannykh mashynakh pid chas obrobky zahotovok i detalei metodom plastychnoho deformuvannia. *Metalurhiina ta hirnychorudna promyslovist*. Dnipro. 2018. № 6. S. 21-29. DOI: 10.33101/S063456734.

8. Malinovskiy Yu.O., Vlasenkov D.P., Tsvirkun S.L., Oliinyk S. Yu. Termomekhanichni yavyscha v poverkhnevyykh sharakh kontaktuiuchykh detalei pry terti ta znoshuvanni. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv. 2023. № 2. S. 39-64. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.2\(99\).17625](https://doi.org/10.18372/0370-2197.2(99).17625).

9. Smirnov V.V., Yakovlev R.A. Mehanika privodov prokatnykh stanov. M., «Metallurgiya», 1977. 216 s.

10. Yu. Malinovskiy, S. Tsvirkun, D. Vlasenkov, S. Oliinyk. Deformatsiyni aspekt proiavu udarno-khvylovoi pryrody tertia ta znoshuvannia. *Problemy tertia ta znoshuvannia*. Kyiv. 2023. № 1 (98). S. 70-97. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.1\(98\).17361](https://doi.org/10.18372/0370-2197.1(98).17361).

11. Kanninghem V. Vvedenie v teoriyu nelineynykh sistem. M.-L., «Gosenergoizdat», 1962. 456 s.

12. Cherepanov G.P. Mehanika hrupkogo razrusheniya. M., «Nauka», 1974. 640 s.

13. Rabinovich M.H. Prochnost. Temperatura. Vremya. M., «Nauka», 1968. 160 s.

14. Malinovskiy Yu.O., Vlasenkov D.P., Sitnik S.A., Teroshina S.S., Oliinyk S.Yu. Traktuvannya energetichnykh metodiv u teorii tertya ta znoshuvannia z pozyciyi mehaniki sucilnykh seredovish ta teoriiy dislokacij. *Problemy tertya ta znoshuvannia*. Kyiv. 2023. № 4. S. 97-120. [https://doi.org/10.18372/0370-2197.4\(101\).18083](https://doi.org/10.18372/0370-2197.4(101).18083).

Malinovskiy Yuriy Olexandrovych – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kriviy Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: malinovsky129@gmail.com, tel.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

Vlasenkov Dmyro Petrovych – senior teacher, head's assistant, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kriviy Rih, 1 Oleha Antonova St., Ukraine, 50045, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com, tel.: +38 067 296 71 75.

Oliinyk Svitlana Yuriivna – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Kriviy Rih National University, Kriviy Rih, 11 Vitaly Matusevicha St., Ukraine, 50027, E-mail: olynik.syu@knu.edu.ua, tel.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>

Sytnyk Serhii Oleksandrovych – Head of Department, Kryvyi Rih professional college of State University «Kyiv Aviation Institute», Kriviy Rih, 1 Oleha Antonova St., 1, Ukraine, 50045, E-mail: sytnykteacher@gmail.com, tel.: +38 097 930 69 24

Shevchenko Oleh Anatoliyovych - Candidate of Technical Sciences, Docent, Associate Professor of the Department of Applied Mechanics and Materials Engineering, State University «Kyiv Aviation Institute», 1 Lubomyra Huzara Ave., Kyiv, Ukraine, 03058, phone: +38 095 209 00 10, E-mail: osheev@kai.edu.ua, <https://orcid.org/0000-0002-7559-0573>.

Bondarets Andrii Oleksandrovych – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Kriviy Rih National University, Kriviy Rih, 11 Vitaly Matusevicha St., Ukraine, 50027, E-mail: bondarets@knu.edu.ua, tel.: +38 067 638 07 97