УДК 66.017:539.3:519.63 DOI: 10.18372/0370-2197.3(96).16839

В. Л. АЛЕКСЕНКО[1], *С. О. СМЕТАНКІН*[1], *П. П. ФОСТИК*[2], *О. А. БУКЕТОВ*[3]

[1]Херсонська державна морська академія, Україна
[2]Харківський національний університет будівництва та архітектури, Україна
[3]Морський коледж Херсонської державної морської академії, Україна

ЧИСЕЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ З УРАХУВАННЯМ ФІЗИЧНОЇ ТА ГЕОМЕТРИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ

Стаття знайомить фахівців, які розробляють композитні матеріали із заздалегідь заданими фізико-механічними властивостями, а також фахівців із суміжних галузей із проблемою дослідження напружено-деформованого стану об'єктів при врахуванні їх фізичної та геометричної нелінійності. Відзначені основні шляхи забезпечення міцності: емпіричний, експериментальний та розрахунковий, у якому за рахунок відповідного теоретичного апарату емпірична складова мінімізована, внаслідок чого його роль по мірі розвитку науки і техніки зростає. Зазначено, що при розрахунку міцності необхідно послідовно і у взаємній відповідності вирішити три проблеми: проблему зовнішніх сил (нормування навантажень); проблему внутрішніх сил (визначення механічних напруг) і проблему напруг, що допускаються (нормування міцності). Під взаємною відповідністю розуміється те, що остаточна точність розрахунків визначається переважно найменшою точністю при послідовному вирішенні цих проблем і локальне збільшення точності для однієї або двох з них не забезпечує суттєвого зростання загальної точності. Дана розробка присвячена проблемі розрахунку напружено-деформованого стану композитів методами теорії пружності, яка в її класичній постановці через прогрес ЕОМ та розвиток чисельних методів вирішення завдань математичної фізики в даний час виявилася певною мірою завершеною, чого не можна сказати про нелінійні задачі. На прикладі двовимірної лінійної задачі аналізуються загальні підходи отримання вирішуючих рівнянь лінійної теорії пружності для ортотропного тіла в напруженнях і переміщеннях. Відзначено труднощі та громіздкість запису їх аналогів для нелінійних задач. Запропоновано спосіб безпосереднього інтегрування всіх груп рівнянь нелінійної теорії пружності в розгорнутій формі чисельними методами, коли визначення кожної з груп невідомих ведеться ітераціями у поєднанні з розпаралелюванням обчислень на багатоядерному процесорі, що дозволяє повніше використовувати можливості сучасних ЕОМ щодо нелінійних задач механіки матеріалів. Даний алгоритм апробовано та протестовано за результатами відомого рішення у переміщеннях задачі для системи «полімерне покриття – сталева основа». Заміна геометричних та (або) фізичних співвідношень їх нелінійними аналогами не викликає при цьому принципових труднощів.

Ключові слова: *композитні матеріали, напружено-деформований стан, теорія пружності, фізична та геометрична нелінійність, чисельні методи, ітераційні алгоритми, багатоядерні процесори, розпаралелювання обчислень.*

Постановка проблеми. Нинішній п’ятий технологічний уклад [1, 2] і хвиля чергового, що зароджується, сприяють невпізнанному перетворенню світової промисловості. Нові види транспорту з покращеними характеристиками (велика вантажопідйомність, швидкість, дальність, вартість), комбіновані транспортні системи, екологічно чисті відновлювані джерела енергії, виробництво конструкційних матеріалів із заздалегідь заданими властивостями, новітні мікроі нанотехнології, забезпечать небувале фондове-, енерго- та працезбереження, що звісно впливатиме на загальні можливості людства.

Міцність – одна з найважливіших експлуатаційних властивостей композитних матеріалів, що розробляються. Першорядне значення механічної міцності відзначають ще мислителі давнини. Так Вітрувій [3] формулює наступну послідовність бажаних експлуатаційних якостей: міцність, користь, краса.

Зважаючи на важливість, різні аспекти проблеми міцності розглядаються в цілому циклі наук: опорі матеріалів, теоріях пружності, пластичності і повзучості пластин та оболонок, механіці руйнування, будівельній механіці, гідро- та аеропружності.

Зазначимо, що найбільш результативними є технічні рішення, отримані в суміжних галузях знань та споріднених з ними наукових дисциплінах. Для матеріалознавства однією з таких є наука про міцність.

Загальні зауваження щодо проблеми механічної міцності. Взагалі існують такі шляхи забезпечення міцності:

– історично перший – емпіричний, коли міцні розміри конструкції задають на підставі досвіду створення та експлуатації аналогічних конструкцій із конкретних матеріалів;

– експериментальний, заснований на спеціально поставлених натурних, напівнатурних або модельних експериментах, що включає планування та певний обсяг обчислень, а також подальшу дослідну експлуатацію;

– розрахунковий, у якому за рахунок відповідного теоретичного апарату емпірична складова мінімізована.

З розвитком науки та техніки значення останнього має все більше значення.

При розрахунку міцності необхідно послідовно та у взаємній відповідності вирішити три наступні проблеми:

– проблему зовнішніх сил (нормування навантажень);

– проблему внутрішніх сил (визначення механічних напружень);

– проблему напружень, що допускаються (нормування міцності).

Під взаємною відповідністю розуміється те, що остаточна точність розрахунків визначається переважно найменшою точністю при послідовному вирішенні згаданих проблем. Тому локальне збільшення точності для однієї або двох з них не забезпечить суттєвого зростання загальної точності.

Упродовж минулого століття, коли з’явились досить продуктивні електронні обчислювальні машини (ЕОМ), мабуть, найбільші труднощі дослідників міцності пов’язані з розрахунком напружено-деформованого стану (НДС) елементів споруд і машин складної форми, або великою кількістю елементів навіть простої форми. Невисока точність вирішення кожної з трьох проблем і можливість появи значної кількості помилок покривалися коефіцієнтами запасу, які іноді інженери називають «коефіцієнтами незнання».

Зазначений вище прогрес ЕОМ призвів до переоцінки методів обчислень: від методів зі значною аналітичною складовою, пов’язаних із підбором відповідних для кожної конкретної задачі систем базисних функцій до машинно-орієнтованих методів. У механіці деформованого тіла, останні через різні варіанти кінцево-різницевих і варіаційно-різницевих методів призвели згодом до створення потужних обчислювальних комплексів методу кінцевих елементів (МКЕ). У результаті проблема внутрішніх сил у її класичній постановці виявилася певною мірою завершеною.

Слід також зазначити, що, незважаючи на успіхи МКЕ, досить широке поширення зберігають підходи прикладної технічної дисципліни – опору матеріалів (сопромату). Перевага сопромату – простота його розрахункових залежностей, досягнута за рахунок зведення задачі до одномірної, коли два інші вимірювання враховуються приблизно через так звані геометричні характеристики плоских перерізів. Розрахункові залежності опору матеріалів виходять при цьому дуже наближеними, але досить простими і доступними рядовим інженерам у їхній повсякденній практиці, а обчислення можуть бути виконані вручну з використанням найпростішої обчислювальної техніки (логарифмічна лінійка, калькулятор).

Аналогічно, в силу певних проблем розглянутих нижче, що виникають при використанні МКЕ, набувають розвитку нові ефективні алгоритми та програми вирішення приватних завдань механіки деформованого тіла, наприклад [4], плоскої задачі теорії пружності (ПЗТП), мірність якої збільшена порівняно з опором матеріалів на одиницю. Зберігаючи спільність міркувань, надалі обмежуватимемося прикладами двовимірної задачі.

Аналіз традиційних підходів до вирішення задачі теорії пружності. Визначення внутрішніх сил і деформацій методами класичної теорії пружності (ТП), що ґрунтується на тих же гіпотезах, що і опір матеріалів, але без обмежень щодо форми об’єкта досліджень, дозволяє вирішити зазначену проблему, проте математична складова завдання при цьому істотно ускладнюється. У останньому випадку, навіть за наявності програмного забезпечення, необхідна висока кваліфікація інженера, яка вимагає розуміння суті фізичної та математичної моделі задачі та методів її вирішення.

Розглянемо основні залежності лінійної теорії пружності для ортотропного тіла. Розрізняють два типи двовимірної (плоскої) задачі: плоску деформацію (ПД) та плоский напружений стан (ПНС). Останній виникає у тонкостінних елементах конструкцій, до яких належить більшість суднових. Обидва типи завдань описуються однаковими рівняннями та відрізняються лише механічними константами у фізичних залежностях.

Відома система 8 рівнянь плоскої класичної задачі включає [5, 6]:

– 2 рівняння рівноваги Нав’є щодо нормальних σ_x, σ_y та дотичних $\tau_{xy}= \tau_{yx}$ напружень

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0; \qquad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \tag{1}$$

які випливають з умов рівноваги малого прямокутного елемента (рис. 1);

– 3 рівняння Коші, тобто геометрично лінійний варіант залежностей між деформаціями ε_x, ε_y, γ_{xy} та відносно малими переміщеннями u і v у координатній площині $x0y$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad y_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \tag{2}$$

які неважко вивести з рис. 2 у припущенні відносної малості деформацій;

– 3 фізично лінійні рівняння закону Гука, що пов’язують деформації з напруженнями, які можуть бути записані наступним чином:

$$\varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y; \quad \varepsilon_y = a_{21}\sigma_x + a_{22}\sigma_y; \; y_{xy} = \tau_{xy}/c_{44}; \tag{3a}$$

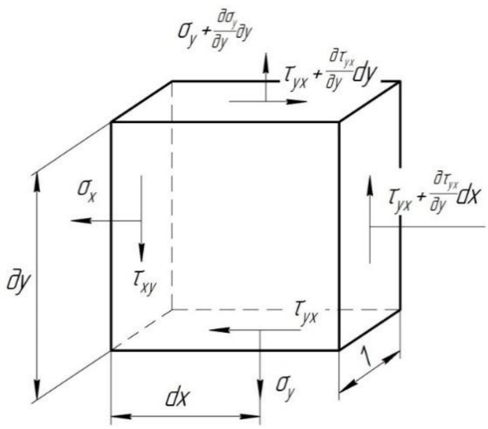

Рис. 1. Прямокутний елемент одиничної товщини, виділений усередині аналізованої області і напруги, що діють на його гранях. Грані, що лежать у площині креслення, вільні від навантаження (ПНС) або залишаються плоскими (ПД)

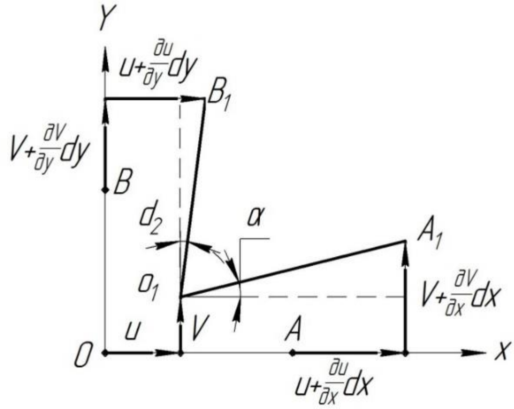

Рис. 2. Визначення малих лінійних деформацій ε_x та ε_y взаємно ортогональних відрізків dx та dy та кутової деформації $\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2$ між ними

або у зворотній формі

$$\sigma_x = c_{11}\varepsilon_x + c_{12}\varepsilon_y; \quad \sigma_y = c_{21}\varepsilon_x + c_{22}\varepsilon_y; \quad \tau_{xy} = c_{44}y_{xy}, \tag{3б}$$

де a_{ki} і c_{ki} відповідно коефіцієнти податливості та жорсткості, пов'язані при плоскій деформації з механічними константами ортотропного матеріалу [6]:

$$a_{11} = (1 - v_{13}v_{31})/E_1; \qquad a_{12} = -(v_{12} + v_{13}v_{32})/E_2;$$
$$a_{21} = -(v_{12} + v_{23}v_{31})/E_1; \qquad a_{22} = (1 - v_{23}v_{32})/E_2;$$

$$c_{11} = E_1(1 - v_{23}v_{32})/N; \qquad c_{12} = E_1(v_{12} + v_{13}v_{32})/N;$$
$$c_{21} = E_2(v_{21} - v_{23}v_{31})/N; \qquad c_{22} = E_2(1 - v_{13}v_{31})/N; \tag{4а}$$
$$c_{44} = G_{12}$$

де $N = (1 - v_{13}v_{31})(1 - v_{23}v_{32}) - v_{12}/v_{21}(v_{21} + v_{23}v_{31})^2$,

а при плоскому напруженому стані

$$a_{11} = 1/E_1; \qquad a_{12} = -v_{12};$$
$$a_{21} = -v_{21}; \qquad a_{22} = 1/E_2;$$

$$c_{11} = E_1/(1 - v_{12}v_{21}); \quad c_{12} = c_{11}v_{21}; \quad c_{21} = c_{22}v_{12};$$
$$c_{22} = E_2/(1 - v_{12}v_{21}); \quad c_{44} = G_{12} \tag{4б}$$

Тут E_k і ν_{ki} модулі поздовжньої пружності у напрямку k і коефіцієнти поперечної деформації за напрямом k від розтягнення у напрямку i, причому індексу *1* відповідає напрямок осі *X*, а *2* – *Y*.

Виходячи з теорем про взаємність переміщень та взаємність реакцій, маємо:

$$a_{ki} = a_{ik}; \quad c_{ki} = c_{ik}; \tag{4в}$$

Для отримання приватного рішення загальний інтеграл системи (1), (2), (3) має бути підпорядкований умовам на поверхні (контурі у даному випадку). Якщо на поверхні, нормаль v до якої в точці, що розглядається, має напрямні косинуси l і m, задані компоненти інтенсивності зовнішніх сил p_{vx} і p_{vy} (так звана перша крайова задача), то ця умова набуває вигляду (див. рис. 3)

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m = p_{vx}; \qquad \tau_{xy} l + \sigma_y m = p_{vx}, \tag{5а}$$

або

$$\bar{u} = u(\bar{x}, \bar{y}); \qquad \bar{v} = v(\bar{x}, \bar{y}); \tag{5б}$$

Друга крайова задача вирішується, коли задані переміщення $\overline{u}, \overline{v}$ точок контуру з координатами $\bar{x}, \bar{y}$.

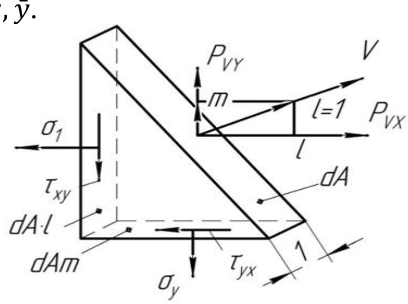

Рис. 3. Рівновага елемента на кордоні області (контуру)

У змішаній задачі на частині поверхні тіла, що деформується, задані зусилля, а на частині – переміщення.

Шукані функції деформацій та напруг ПЗТП передбачаються шматково-безперервними, а функції переміщень фізично є безперервними у всій області, яку займає тіло. Тому, якщо в процесі вирішення задачі переміщення у явній формі не присутні, необхідно забезпечувати їхню безперервність, використовуючи так звану умову нерозривності деформацій (суцільності) Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

Доводиться [5], що система рівнянь лінійної теорії пружності має єдине рішення.

Метою даної роботи є:

– ознайомлення фахівців, які розробляють композитні матеріали із заздалегідь заданими фізико-механічними властивостями, із сучасним станом проблеми дослідження напружено-деформованого стану при врахуванні фізичної та геометричної нелінійності;

– застосувати метод чисельного розв’язання нелінійних рівнянь теорії пружності в розгорнутій формі, що розроблений колективом Лабораторії епоксикомпозитних матеріалів у суднобудуванні Херсонської державної морської академії, для системи «полімерне покриття – сталева основа».

Результати досліджень та обговорення результатів. На сьогодні накопичено досить велику кількість практично важливих технічних рішень.

Проте, досі не знайдено загального рішення у замкнутому вигляді, тобто, через кінцеве число елементарних функцій. Тому в ТП широке застосування знаходять наближені методи математичного аналізу, які можна поділити на дві групи:

– методи, засновані на апроксимації шуканих компонентів НДС лінійними комбінаціями відомих функцій (аналітичні чисельні методи), що містять невизначені параметри, які тим чи іншим способом підбираються так, щоб за прийнятим критерієм найкращим способом задовольнити рівняння ТП або екстремуму деякого функціоналу. У процесі розробки алгоритму вимагається, зазвичай, значний обсяг аналітичних викладок;

– способи, засновані на пошуку дискретних значень параметрів НДС в окремих точках аналізованої області в принципі за тими ж критеріями, що й вище. У нижчих наближеннях вони за точністю поступаються аналітичним. Ці методи отримали подальший розвиток з моменту досить широкого застосування продуктивних ЕОМ і у поточний час переважають. Кожен з них має свої переваги та недоліки. Найбільшої популярності набули метод кінцевих елементів (МКЕ) та метод кінцевих різниць (метод сіток) (МКР).

МКЕ найбільш універсальний, безперервно розвивається, його сучасні програмні комплекси є плодом постійної роботи великих колективів науковців та програмістів (подібно до операційної системи Windows), але мають більш вузький ринок, а, отже, вони відносно дорогі. Легальне їх використання вимагає значних початкових вкладень і є доступним переважно великим організаціям. Метод мало чутливий до мірності завдань, має достатню точність у межах використовуваної фізичної моделі, але вимагає великих витрат при підготовці масивів вихідних даних та ще більших зусиль при обробці та осмисленні результатів обчислень. Тому значна частина зусиль розробників програмного забезпечення МКЕ нині спрямована на подолання двох останніх проблем.

Якщо задача математичної фізики приведена до одно- або двовимірної крайової для диференціального рівняння, то МКР дозволяє побудувати простіші та ефективніші алгоритми, ніж МКЕ.

При вирішенні прямої задачі ТП, коли за заданими навантаженнями визначають компоненти НДС, з метою скорочення кількості невідомих, шляхом формальних перетворень виключають будь-які дві групи невідомих і одержують вирішуючі рівняння, які називають рішеннями в переміщеннях, напруженнях або деформаціях.

Рішення ПЗТП у напруженнях. У цьому випадку необхідно забезпечити умову спільності деформацій (6), яка після підстановки (3а) з урахуванням (1) перетворюється до виду:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[(a_{21}+1/c_{44})\sigma_x + a_{22}\sigma_y\right] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y\right) = 0 \qquad (7)$$

Наведене вище є аналогом рівняння Моріса Леві, але для ортотропного тіла. Дж. Ейрі запропонував замість 3-х компонентів напруг відшукувати одну функцію 2-х змінних φ (x,y), пов’язану з співвідношеннями:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2};\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2};\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}; \qquad (8)$$

У результаті (7) перетворюється до виду:

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\delta_1\frac{\partial^4\phi}{\partial^2 x\partial^2 y} + \delta_2\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0; \quad (9)$$

а умови рівноваги (1) задовольняються тотожно.

Тут

$$\delta_1 = (a_{12} + 1/2c_{44})/a_{22}; \quad \delta_2 = a_{11}/a_{22}. \quad (10)$$

Граничні умови (5а) набувають вигляду:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}l - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}m = P_{vx}; \quad -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}l + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}m = P_{vx}; \quad (11)$$

Ітераційний алгоритм і програма розв’язання в кінцевих різницях першої крайової задачі для рівняння (9) при граничних умовах (11) для ортотропної пластини отримані одним із авторів у праці [4] щодо розрахунку приєднаних поясків стапель-палуби та обшивки днища понтона композитного доку. Недоліком даного методу є підвищена складність задання граничних умов у переміщеннях у другій та змішаній крайових задачах.

Рішення ПЗТП у переміщеннях. Підставивши (2) у (3б), отримаємо:

$$\sigma_x = c_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{12}\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \sigma_y = c_{21}\frac{\partial u}{\partial x} + c_{22}\frac{\partial v}{\partial y}; \quad \tau_{xy} = c_{44}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad (12)$$

Підставивши (12) у (1) рівняння рівноваги перетворимо до виду [6]:

$$\beta_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta_4\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (\beta_3 + \beta_4)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + X = 0;$$
$$\beta_4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_2\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (\beta_3 + \beta_4)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + Y = 0, \quad (13)$$

де $\beta_1 = c_{11}$; $\beta_2 = c_{22}$; $\beta_3 = c_{12}$; $\beta_4 = c_{44}$.

Інтегруючи систему двох диференціальних рівнянь у приватних похідних другого порядку від функцій u(x,y) та v(x,y) та задовольняючи крайовим умовам (5б) та (або) (5а) отримують шукане приватне рішення конкретної задачі. Як зазначено вище, система рівнянь (1) – (3), а, отже, (7) та (13) у загальному випадку не мають рішення у замкнутому вигляді [5]. Наближене рішення (13), як і в попередньому випадку, може бути отримано одним із чисельних методів вищого аналізу [4 -7].

Проблема інтегрування рівнянь теорії пружності та розгорнута форма чисельного розв’язання. Як рішення у напруженнях, так і рішення в переміщеннях передбачають досягнення очевидної мети – скорочення кількості невідомих у системі рівнянь. Останнє було актуальним як при ручних обчисленнях із використанням логарифмічної лінійки, механічного арифмометра та довідкових таблиць, так і на ранньому етапі розвитку ЕОМ, коли можливості рядового користувача для кінцевих алгоритмів вирішення лінійних систем обмежувалися, як правило, декількома десятками невідомих та дещо пізніше декількома сотнями.

Слід також зазначити про загальний недолік дискретних методів. Зі зростанням кількості вузлів сітки і, отже, числа невідомих як і в МКЕ, так і у МКР точність зростає до певної межі, якщо система рівнянь вирішується за схемою типу Гауса чи іншого кінцевому алгоритму. Доводиться збільшувати розрядність, що також має обмеження. Остання обставина, обумовлена малими різницями близьких величин, свого часу, наводилася як аргумент прибічниками аналітичних методів і була стимулом для їх вдосконалення [5, 6]. Ці напрацювання і сьогодні становлять, користуючись аналогією О.М. Крилова, цінний «інструментарій» для фахівців при вирішенні низки технічних завдань, наприклад, отримання матриць жорсткості та податливості кінцевих елементів.

Ще одна обставина, яку слід враховувати, це сучасний стан обчислювальної техніки. З одного боку, сучасна персональна електронно-обчислювальна машина (ПЕОМ), маючи незрівнянно більшу продуктивність, ніж супер-ЕОМ колективного користування 70-80 років ХХ ст., є загальнодоступним, відносно недорогим предметом індивідуального користування. З іншого боку, нинішній розвиток елементної бази комп’ютерів наштовхнувся на проблему тепловідведення, що обмежує продуктивність одноядерних процесорів (4-5 ГГц). Тому нові технології розвиваються у напрямку багатоядерних процесорів. Сам по собі багатоядерний процесор не дозволяє збільшити швидкодію програми, написаної для одноядерного процесора. Потрібно так зване розпаралелювання обчислювального процесу, що недоступно для багатьох класичних обчислювальних схем, наприклад, прямий хід за Гаусом. Однак, ітераційні алгоритми дозволяють не тільки вирішувати задачі, що призводять до нелінійних систем рівнянь, але й розділити обчислювальний процес на частини із загальною базою даних, коли з’являється можливість підвищення продуктивності за рахунок одночасної роботи кількох пов’язаних програм, причому операційна система автоматично завантажить кожну з них на окремий процесор.

Вищесказане повною мірою відноситься до лінійних рівнянь класичної ТП. Облік фізичної та (або) геометричної нелінійності в загальному випадку становить значні труднощі при спробі їхнього аналітичного запису в напруженнях або переміщеннях. Наприклад, один з авторів свого часу відмовився від отримання формул типу Чезаро [5, стор. 53], необхідних для складання граничних умов у переміщеннях для рівнянь Кармана [5, стор. 599] вигину пластин великого прогину і вирішив перейти до вирішення більш загальної задачі у переміщеннях [8]. Крім того, за будь-якого методу зведення нелінійної задачі математичної фізики до алгебри виникає необхідність вирішення систем нелінійних рівнянь, для яких, у загальному випадку, немає кінцевих алгоритмів відшукання коренів. При цьому відзначається висока ефективність та стійкість ітераційних алгоритмів [9]. Ітераційні методи вирішення систем рівнянь винятково зручні для розпаралелювання обчислювальних потоків, і, отже, ефективного використання можливостей сучасних комп’ютерів з багатоядерними процесорами.

Порівнюючи та узагальнюючи різні сторони розглянутої вище проблеми розв’язання лінійної та нелінійної задач ТП для змішаних граничних умов з урахуванням сучасного стану обчислювальної техніки, нами розроблено метод безпосереднього інтегрування розгорнутої форми (всіх груп) рівнянь ТП одним із чисельних методів вищого аналізу, при якому визначення невідомих кожної з груп рівнянь відбувається ітераціями у поєднанні з розпаралелювання схеми обчислень.

Запропонований алгоритм дозволяє повніше використовувати можливості сучасних ЕОМ щодо нелінійних завдань ТП.

Заміна геометричних (2) та (або) фізичних (3) співвідношень їх нелінійними аналогами не викликає при цьому принципових труднощів.

Наприклад, у випадку великих деформацій (геометрично нелінійна задача) замість рівнянь Коші (2) слід скористатися точними формулами [5, стор. 46]:

$$\varepsilon_x = \sqrt{\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} - 1;$$

$$\varepsilon_y = \sqrt{\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} - 1;$$

$$\sin\gamma_{xy} = \left[\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right] / \left[(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_x)\right]$$

Ще раз підкреслюємо, що все вищесказане відноситься і до тривимірної задачі.

Апробація способу безпосереднього чисельного інтегрування розгорнутої форми рівнянь ТП на прикладі розрахунку НДС системи «полімерне покриття – сталева основа».

У праці [10] запропоновані ітераційний алгоритм та програма методу кінцевих різниць вирішення рівнянь (13) ПЗТП у переміщеннях, що розповсюджується у відкритих кодах, та рекомендована для використання і вдосконалення як альтернатива програмним комплексам МКЕ для двовимірних областей, обмежених довільним контуром. Виконано дослідження системи «полімерне покриття – сталева основа» і розраховані нормальні та дотичні напруження у покритті. Встановлено, що результати розрахунку напружено-деформованого стану системи «полімерне покриття – сталева основа» добре узгоджуються з характером руйнування епоксикомпозитних покриттів, як це спостерігається в експериментах. Це, у свою чергу, дозволяє зробити кількісну оцінку їх адгезійної та когезійної міцності. Результати зазначених розрахунків були використані для тестування роботи програми щодо визначення НДС методом безпосереднього інтегрування рівнянь (1) – (3) у розгорнутому вигляді при тій же сітці методом кінцевих різниць. Збіг результатів становив три і більше значущих цифр.

Висновки:

1. У загальному вигляді розглянуто проблему міцності, як найважливішої властивості конструкційних матеріалів.

2. На прикладі двовимірної лінійної задачі теорії пружності для ортотропного тіла проаналізовані вирішуючі рівняння в напруженнях і переміщеннях.

3. Відзначено труднощі самого запису аналогів цих рівнянь у напруженнях або у переміщеннях для нелінійних задач.

4. Запропоновано спосіб безпосереднього інтегрування розгорнутої форми (всіх груп) рівнянь нелінійної теорії пружності чисельними методами вищого аналізу, коли визначення невідомих у кожній із груп рівнянь ведеться ітераціями у поєднанні з розпаралелюванням обчислень на багатоядерному процесорі.

5. Запропонований алгоритм апробовано та протестовано за результатами відомого рішення у переміщеннях при вирішенні задачі визначення НДС у системі «полімерне покриття – сталева основа».

Перспективи подальших розвідок у даному напряму

У подальшому авторами заплановано провести експериментальні дослідження згідно апробованого і протестованого алгоритму незалежно стальних зразків, виробів із епоксидних композитів, а також системи «полімерне покриття – сталева основа». Надалі порівняти отримані результати із розробленими моделями, що дозволить підтвердити їх достовірність.

Список літератури

1. Глазьев С.Ю., Львов Д.С., Фетисов Г.Г. Эволюция технико-экономических систем: возможности и границы централизованного регулирования. – М.: Наука, 1992. – 208 с.

2. Каблов Е. Наука и общество // Наука и жизнь. – 2010. – №4. – С. 2-7.

3. Витрувий М.П. Десять книг об архитектуре / Витрувий; пер. с лат. Ф.А. Петровского. — 3е изд. — М.: URSS: КомКнига, 2005. – 317 с.

4. Исследование прочности корпуса композитного дока с концевыми понтонами при эксплуатации и перегоне. Отчёт по договору № 2.1. Пр.180 с ЦКБ «Изумруд», НКИ им. адм. С.О. Макарова, Николаев, 1990.

5. Суслов В.П., Кочанов Ю.П., Спихтаренко В.Н. Строительная механика корабля и основы теории упругости. – Л.: Судостроение, 1972. – 720 с.

6. Справочник по строительной механике корабля / Бойцов Г.В., Палий О.М., Постнов В.А., Чувиковский В.С. / В трёх томах. Том 2. Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы. – Л.: Судостроение, 1982. – 464 с.

7. Варвак П.М., Варвак Л.П. Метод сеток в задачах расчёта строительных конструкций. – М.: Стройиздат, 1977. – 160 с.

8. Алексенко В.Л. Решение в перемещениях уравнений равновесия пологой прямоугольной в плане ортотропной оболочки большого прогиба. – Труды НКИ, вып. 136, Николаев, НКИ, 1978. – С. 62-73.

9. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. – М.: Наука, 1964. – 192 с.

10. Алексенко В.Л., Богдан А.П. Исследование напряженно-деформированного состояния системы «металлическая основа – защитное покрытие» // Науковий вісник Херсонської державної морської академії. – 2017. – № 2 (17). – С. 130-135.

Стаття надійшла до редакції 07.07.2022

Алексенко В.Л. – старший викладач кафедри транспортних технологій та механічної інженерії Херсонської державної морської академії, проспект Ушакова, 20, м. Херсон, Україна, 73000, E-mail: aleksenko.vl.1944@gmail.com, https://orcid.org/0000-0003-4472-0934.

Сметанкін С.О. – PhD, доцент кафедри транспортних технологій та механічної інженерії Херсонської державної морської академії, проспект Ушакова, 20, м. Херсон, Україна, 73000, E-mail: rabota.hdma.10@gmail.com, https://orcid.org/0000-0002-9658-2492.

Фостик П.П. – студент Харківського національного університету будівництва та архітектури, вул. Сумська, 40, м. Харків, Україна, 61002, E-mail: defold.fp@gmail.com

Букетов О.А. – курсант морського коледжу Херсонської державної морської академії, проспект Ушакова, 18, м. Херсон, Україна, 73000, E-mail: het17kill@gmail.com

V. L. ALEKSENKO, S. A. SMETANKIN, P. P. FOSTIK, O. A. BUKETOV

NUMERICAL CALCULATION OF THE STRESS-STRAIN STATE OF COMPOSITE MATERIALS TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL AND GEOMETRIC NONLINEARITY

The article introduces specialists developing composite materials with predetermined physical and mechanical properties, as well as specialists from related industries, with the problem of studying the stress-strain state of objects, taking into account their physical and geometric nonlinearity. The main ways of ensuring strength are noted: empirical, experimental and calculated, in which, due to the corresponding theoretical apparatus, the empirical component is minimized, as a result of which, its role increases with the development of science and technology. It is noted that when calculating the strength, it is necessary to solve three problems consistently and in mutual compliance: the problem of external forces (normalization of loads); the problem of internal forces (determining mechanical stresses) and the problem of allowable stresses (rationing strength). Mutual correspondence means that the final accuracy of calculations is determined mainly by the lowest accuracy when these problems are solved sequentially, and a local increase in accuracy for one or two of them does not provide a significant increase in the overall accuracy. This development is devoted to the problem of calculating the stress-strain state of composites by methods of the theory of elasticity, which in its classical formulation, due to the progress of computers and the development of numerical methods for solving problems of mathematical physics, has now been completed to a certain extent, which cannot be said about nonlinear problems. On the example of a two-dimensional linear problem, the general approaches to obtaining the resolving equations of the linear theory of elasticity for an orthotropic body in stresses and displacements are analyzed. The difficulties and cumbersomeness of writing their analogues for nonlinear problems are noted. A method is proposed for direct integration of all groups of equations of the nonlinear theory of elasticity in an expanded form by numerical methods, when each of the groups of unknowns is determined by iterations in combination with parallelization of calculations on a multi-core processor, which makes it possible to more fully use the capabilities of modern computers in relation to nonlinear problems of mechanics of materials. This algorithm has been tested and tested based on the results of a well-known solution in the displacement of the problem for the "polymer coating - steel base" system. The replacement of geometric and (or) physical relations by their nonlinear analogs does not cause any fundamental difficulties.

Keywords: composite materials, stress-strain state, theory of elasticity, physical and geometric nonlinearity, numerical methods, iterative algorithms, multi-core processors, parallelization of calculations.

References

1. Hlazev S.Iu., Lvov D.S., Fetysov H.H. Эvoliutsyia tekhnyko-эkonomycheskykh system: vozmozhnosty y hranytsы tsentralyzovannoho rehulyrovanyia. – M.: Nauka, 1992. – 208 s.

2. Kablov E. Nauka y obshchestvo // Nauka y zhyzn. – 2010. – №4. – S. 2-7.

3. Vitruvij M.P. Desyat' knig ob arhitekture / Vitruvij; per. s lat. F.A. Petrovskogo. — 3e izd. — M.: URSS: KomKniga, 2005. - 317 s.

4. Yssledovanye prochnosty korpusa kompozytnoho doka s kontsevыmy pontonamy pry эkspluatatsyy y perehone. Otchёt po dohovoru № 2.1. Pr.180 s TsKB «Yzumrud», NKY ym. adm. S.O. Makarova, Nykolaev, 1990.

5. Suslov V.P., Kochanov Yu.P., Spykhtarenko V.N. Stroytelnaia mekhanyka korablia y osnovы teoryy upruhosty. – L.: Sudostroenye, 1972. – 720 s.

6. Spravochnyk po stroytelnoi mekhanyke korablia / Boitsov H.V., Palyi O.M., Postnov V.A., Chuvykovskyi V.S. / V trёkh tomakh. Tom 2. Plastynы. Teoryia upruhosty, plastychnosty y polzuchesty. Chyslennыe metodы. – L.: Sudostroenye, 1982. – 464 s.

7. Varvak P.M., Varvak L.P. Metod setok v zadachakh raschёta stroytelnыkh konstruktsyi. – M.: Stroiyzdat, 1977. – 160 s.

8. Aleksenko V.L. Reshenye v peremeshchenyiakh uravnenyi ravnovesyia polohoi priamouholnoi v plane ortotropnoi obolochky bolshoho prohyba. – Trudы NKY, vыp. 136, Nykolaev, NKY, 1978. – S. 62-73.

9. Kornyshyn M.S. Nelyneinыe zadachy teoryy plastyn y polohykh obolochek y metodы ykh reshenyia. – M.: Nauka, 1964. – 192 s.

10. Aleksenko V.L., Bohdan A.P. Yssledovanye napriazhenno-deformyrovannoho sostoianyia systemы «metallycheskaia osnova – zashchytnoe pokrыtye» // Naukovyi visnyk Khersonskoi derzhavnoi morskoi akademii. – 2017. – № 2 (17). – S. 130-135.