

УДК 621.891+539.375.6

DOI: 10.18372/0370-2197.3(96).16836

Ю. О. МАЛІНОВСЬКИЙ<sup>1</sup>, С. Л. ЦВІРКУН<sup>1</sup>, Р. В. МІНЕНКО<sup>1</sup>, Д. П. ВЛАСЕНКОВ<sup>1</sup>,  
Д. М. ДВОРЕЦЬКИЙ<sup>1</sup>, Д. П. РИБАК<sup>1</sup>, С. С. ТЕРЕШИНА<sup>1</sup>, С. Ю. ОЛІЙНИК<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», Кривий Ріг, Україна

<sup>2</sup>Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

## ДЕФОРМАЦІЙНО-ХВИЛЬОВИЙ АСПЕКТ ВТОМНОГО РУЙНУВАННЯ ПОВЕРХНЕВИХ ШАРІВ ДЕТАЛЕЙ ПРИ ТЕРТІ ТА ЗНОШУВАННІ

Сучасні вимоги до надійності й довговічності експлуатованих і проєктованих машин вимагає вдосконалення для них методик розрахунків на тертя й зношування. Для оцінки умов тертя й зносостійкості деталей в основному розглядаються геометричні, молекулярні, деформаційні й комбіновані теорії. Однак, при взаємодії деталей часто мають місце деформаційні процеси, які проявляються у вигляді гофрованих поверхонь, що мають у поперечному перерізі криві, близькі до синусоїд. Амплітуди синусоїд, що утворилися, можуть бути розглянуті як деформаційні мікронерівності, причому розміри цих мікронерівностей можуть бути порівнянні з геометричними мікронерівностями, а іноді можуть їх перевершувати. Такі додаткові (невраховані) шорсткості повинні бути вивчені при виконанні розрахунків на тертя й зношування. Однак дотепер не була розроблена подібна теорія. Тому нами було поставлено завдання створити передумови для розробки теорії тертя й зношування з урахуванням деформаційно-хвильових процесів при переміщенні плоского штамп або ролика, що котиться по півплощині. Для формулювання поставленого завдання, розглянуті деформаційні процеси, що відбуваються в тонких поверхневих шарах штамп й заготівлі. При такій постановці завдання тонкий поверхневий шар півпростору або втрачає стійкість і одержує хвилеподібні деформації, або поверхневий шар є під впливом циклічних напружень. В обох випадках відбувається зношування й викривлення дотичних поверхонь. У цілому, з урахуванням зазначених особливостей процесів тертя й зношування може суттєво змінитися площа всіх виступів на кожному з контактуючих тіл, а також може змінитися висота найбільших мікронерівностей. Для правильного розрахунку ступеня зношування розглянутих поверхонь необхідно скорегувати дані по площі виступів контактуючих тіл, і висоті найбільших мікронерівностей. Також в роботі передбачена можливість урахування збільшення еквівалентного напруження  $\sigma_e$ , за рахунок швидкості взаємного ковзання деталей  $V$ , шляхом введення в розрахунки коефіцієнту динамічності  $\delta_d$ .

**Ключові слова:** тертя, зношування, мікронерівність, зміцнений шар, штамп, півпростір, дотичне зусилля, нормальний тиск, критичне сила.

**Вступ.** Постійне збільшення вимог щодо надійності та довговічності сучасних машин та механізмів вимагає покращення методів розрахунку на тертя та зношування. Зазори, що змінюються в процесі взаємодії вузлів та деталей, можуть суттєво впливати на безперебійну роботу двигунів, енергетичних машин, передач та виконавчих механізмів, тощо.

Незважаючи на значну кількість теорій тертя та зношування, викладених у великих та чисельних джерелах, наприклад, [1, 2], питання хвилеутворення на поверхнях, що контактують, та деформаційно-хвильовий підхід у питаннях про тертя та зношування, поки не отримали достатнього розвитку.

Тому в роботі була зроблена спроба пояснити та доповнити механізм тертя та зношування з точки зору виникнення та трансформації деформаційних хвиль на контактуючих поверхнях.

Довговічність та надійність машин та механізмів у багатьох випадках, пов'язані зі зносостійкістю їх вузлів. Зміна зазорів у третьових з'єднаннях на десяти або соті частки міліметра часто призводить до порушення роботи точних механізмів. Не менший вплив має зношування на продуктивність навантажених великих машин.

Для оцінки тертя та ступеня зношування деталей, що контактують (лінійних, прямокутних, циліндричних та інших форм), прийнято розглядати групи теорій [1, 2]: 1) геометричні; 2) молекулярні (адгезійні); 3) деформаційні; 4) комбіновані.

Перша група теорій пояснює тертя як наслідок підйому мікронерівностей при взаємодії двох шорстких тіл (Паран).

Друга група – це фізичні теорії, які пояснюють тертя як результат подолання сил молекулярної взаємодії між двома твердими тілами (ця група включає роботи І. Дезагульє, В. Гарді, Б. В. Дерягіна, Г. Томлісона, Ф. Р. Боудена та Ф. Лінга).

Третя група пояснює тертя через роботу, витрачену на деформацію об'єму, пов'язаного з взаємним введенням виступів контактуючих тіл. Розвиток цих поглядів збігається з розвитком теорій пружності та пластичності.

Деякі вчені цієї області вважали, що тертя є результатом пластичного відштовхування матеріалу (Л. Гюмбель, тощо).

Найбільш широке застосування знайшла точка зору, при якій тертя обумовлено пластичним відштовхуванням матеріалу та руйнуванням мостиків зварки – Ф. Р. Боуден та Д. Тейбор. Аналогічно теорії Ф. Р. Боуден інтерпретується гіпотеза Ернста та Мерченга, де тертя обумовлено адгезією та шорсткістю поверхні. Ця гіпотеза ще не отримала експериментального підтвердження.

У той же час експериментальні результати, отримані Ф. Р. Боуденом і Д. Тейбором, дозволили зробити висновок, що тертя (сила та коефіцієнт тертя) залежатиме як від сил адгезії, так і від деформації матеріалу в тонкому поверхневому шарі внаслідок введення мікронерівностей одного контактуючого тіла в інше.

Незалежно від гіпотези при дослідженні тертя і зношування всі ефекти, що виявляються в процесі контакту двох тіл, розглядаються як результат взаємодії виступаючих мікронерівностей (під впливом нормальної і зсувної сил). При цьому жорстка мікронерівність впроваджується у більш податливий матеріал напівпростору. В результаті такої взаємодії мікронерівність залишає на гладкій поверхні напівпростору подряпину позаду виступу, що рухається. Після відтіснення матеріал обтікає виступ, що рухається, який потім відновлює початкову форму (у разі пружної взаємодії, рис. 1). При розгляді такої моделі взаємодії мікронерівностей може відбутися пружне відтискання матеріалу, пластичне відтіснення, мікрорізання, адгезійний відрив, когезійний відрив [1].

**Постановка задачі.** У разі розгляду класичної задачі про тертя і зношування двох деталей звернемося до прикладу взаємодії пружного колеса, що спирається на пружну основу. При навантаженні колеса вертикальним навантаженням утворюється контакт тертя, форма якого залежить від багатьох чинників. Внаслідок видавлювання пружного матеріалу в сторони, по краях контакту тертя виникають зони ковзання, а в середині – зона зчеплення, рис. 1, 2.

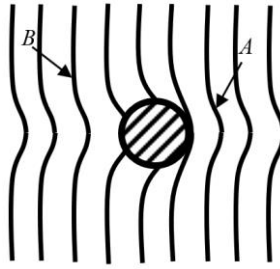


Рис. 1. Взаємодія твердого ідентора з пружним півпростором:  $A$  – зона стиснення,  $B$  – зона розтягування

Якщо прикласти до колеса момент  $M_c$ , що обертає, то з боку набігання колеса на основу навантаження зростає, а з боку збігання навантаження зменшується. Тому вершина епюри нормальних напруг зміщена до краю колеса, що набігає, і зона ковзання скорочується під набігаючою частиною колеса і розвивається під частиною, що збігає (рис. 2). Це явище стосується передачі тертя другого виду [3].

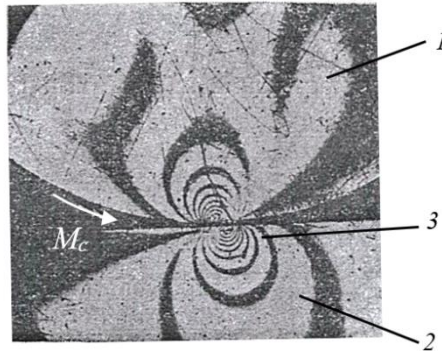


Рис. 2. Зміщення кругів Буссинеска при набіганні колеса на рейку на довжині хвилі деформації  $l_2$ : 1 – колесо; 2 – рейка; 3 – зона деформації попереду набігаючого колеса;  $M_c$  – момент, що обертає

У той же час, попереду набігаючої частини колеса утворюється деформаційний валик, до якого буде прикладена сила тертя при прокатуванні колеса по смузі (складається з сили тертя зчеплення  $T_{cc}$  і сили тертя проковзування  $T_{cp}$ ). Сила тертя прагне стиснути поверхневі шари ділянки, розташовані попереду точки набігання колеса на деформаційний валик, і викликати місцеву втрату стійкості поверхневих шарів.

У розглянутих теоріях тертя не враховані подовжні деформації поверхневих шарів, а також їх вплив на процеси тертя і зношування.

Про вплив дотичної напруги (від сили тертя) на поверхневі шари смуги (рельса) побічно свідчить зміщення вертикальних вісей кругів Буссинеска під дією дотичної сили тертя (дотичних напружень) [3].

Тому для достовірного опису явищ між взаємодіючими деталями, на наш погляд, необхідно розглянути зону на рельсі попереду точки контакту його з колесом.

Процеси, що відбуваються попереду точки контакту двох взаємодіючих деталей аналогічні, як при ковзанні штампку по основі, так і при прокатуванні ролика по смузі.

Розглядаючи ці деталі, їх можна уподібнити двом взаємодіючим напівпросторам (у ряді випадків в «малому»).

Причому таке завдання контактної взаємодії по суті складається з трьох задач: 1. Контактної задачі Герца [4]; 2. Задачі про розтягування площини контакту (під дією плоского або обкресленого по дузі кола штампу); 3. Задача про стискування і подовжню стійкість поверхневих шарів попереду точки контакту двох взаємодіючих деталей.

На поверхнях, що контактують, знаходяться тонкі зміцнені шари певної товщини. Ці шари пружно пов'язані з основним металом. Під тонким зміцненим шаром, здебільшого, розуміють або накатану поверхню, або покриття у вигляді цементованого, азотованого, борованого шару або хромистого покриття.

При розгляді процесу взаємодії деталей, як правило, не враховується вплив робочих дотичних зусиль на деформаційний стан поверхонь у зоні, що випереджає деталь, яка рухається (штамп плоский або окреслений по дузі). Під дією дотичних зусиль ці поверхні поперемінно навантажуються зусиллями, що розтягують, або стискають. Залежно від величини діючих зусиль та механічних властивостей матеріалів, з яких виготовлені ці деталі, у разі стискаючих дотичних навантажень, на поверхнях тіл, що контактують, з'являються деформаційні хвилі стиснення [1] (див. рисунок 1), які можуть бути як пружними, так і залишковими. Тобто попереду штампу, що рухається, з'являється деформована поверхня, яка відразу виполажується після проходження штампу, і тому виявляється непоміченою.

Відзначимо, що так само, як і в задачі про рух плоского штампу по півпростору з пружної або в'язкопружної основи (рис. 3), так і в задачі про кочення ролика по смузі (площині) (рис. 4), переміщенню рухомої деталі передують хвилі стиснення. Тобто в обох випадках, для тертя ковзання та тертя кочення процес хвилеутворення може бути описаний з одних позицій [5].

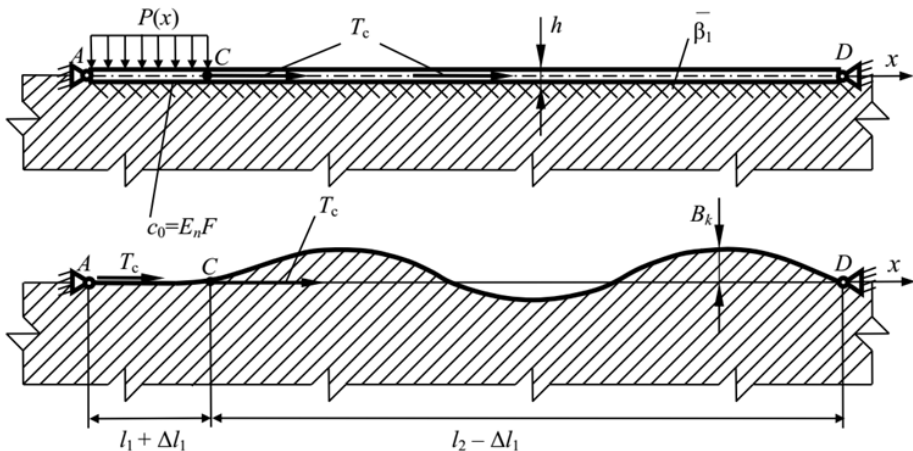


Рис. 3. Гіпотетична балка на пружній основі в рухомій системі координат під дією штампу, що переміщується:  $h$  – товщина балки, що лежить на пружній основі;  $B_k$  – амплітуда деформаційних мікронерівностей ( $k = 1, 2, 3, \dots$ );  $l_1, l_2$  – довжини ділянок балки;  $\Delta l_1$  – поздовжня деформація ділянки  $l_1$ ;  $P(x), T_c$  – діючі зусилля (в зоні штампу);  $\bar{\beta}_1$  – коефіцієнт відпору пружної основи;  $c_0 = E_n F$  – поздовжня жорсткість ділянки контакту штампу та балки на пружній основі;  $A, C, D$  – умовні опори балки

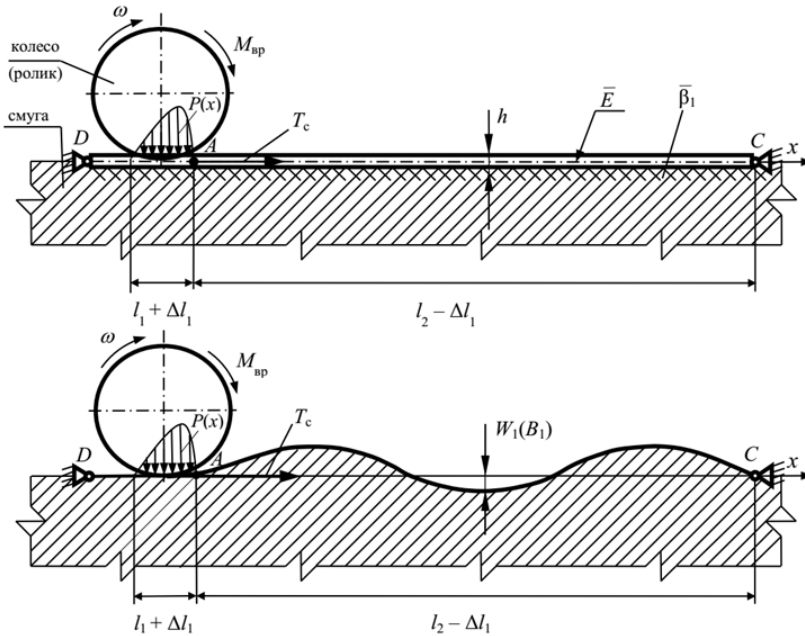


Рис. 4. До деформування поверхневих шарів смуги попереду ролика, що набігає:  $\bar{E}$  – поверхневий шар смуги у вигляді балки на пружній основі;  $\bar{\beta}_1$  – коефіцієнт відпору пружної основи;  $h$  – товщина балки;  $W_1$  – прогин смуги;  $P(x)$  – тиск на ділянці контакту;  $T_c$  – дотичне зусилля;  $D, A, C$  – умовні опори балки.

**Виклад основного матеріалу.** Як впливає з умов постановки, це завдання є завданням навантаження пружного напівпростору з тонким поверхневим шаром (тонким покриттям), через «штамп», дотичними зусиллями [6].

Товщина тонкого поверхневого шару при нанесенні покриття визначається товщиною покриття і є заданою величиною. У разі поверхневого зміцнення деталей при їх взаємодії товщина шару ущільненого може бути визначена виходячи з співвідношення

$$h = \sqrt{P/\sigma_m}, \text{ мм} \quad (1)$$

де  $P$  – вертикальне навантаження на пару (деталей);  $\sigma_m$  – межа плинності для аналізованої деталі.

Дамо обґрунтування застосування розрахункової моделі тонких поверхневих шарів двох взаємодіючих деталей з її внутрішніми шарами за рахунок використання вертикальних зв'язків. При цьому врахуємо, що поверхневі шари деталей, які взаємодіють, мають більш високі механічні характеристики в порівнянні з внутрішніми шарами. І, крім того, всі основні процеси, що відбуваються на рівні взаємодії мікронерівностей, та прояви деформаційно-хвильових особливостей цього контакту протікають у поверхневих шарах. Тому припустимо, що внутрішні шари деталі впливають на зовнішні за допомогою вертикальних пружних зв'язків, тобто за аналогією з пружною Вінклеровою основою, яка моделюється пружним внутрішнім середовищем деталі.

Сформулюємо передумови для опису задачі з хвилеутворення на поверхні напівпростору при його взаємодії з рухомих «штампом» (плоским у плані або циліндром, що котиться) (рис. 3, 4).

Розглянемо пов'язану задачу з штампом, що рухається, за наявності зовнішнього навантаження і тертя, тобто завдання про передачу дотичного навантаження під «штампом» і перед «штампом» на напівплощину. Умовно розглянемо балку, навантажену вздовж осі поздовжнім навантаженням, і лежачу на пружній Вінклеровій основі. Вважатимемо, що балка вільно спирається на пружну основу. Під дією стискаючого дотичного навантаження відбувається деформація поверхневих шарів напівпростору, що призводить до поздовжнього вигину смуги перед штампом, при цьому виникають нормальні переміщення поверхневих шарів. Якщо деформації будуть залишковими, то хвилі, що утворилися, призведуть до появи так званих деформаційних шорсткостей, які в ряді випадків виявляться порівняними з початковими геометричними нерівностями (а в ряді випадків можуть їх перевищити). Характер зносу деформаційних мікронерівностей визначається тим, що при багаторазовому проходженні однієї деталі по відношенню до мікронерівностей на іншій деталі, ці нерівності будуть виникати при кожному проході «штампу» і багаторазово викладатися при кожному подальшому його проході, тобто деформаційні мікронерівності схильні до втомного руйнування. Крім того, в результаті взаємодії двох контактуючих деталей у зоні їх взаємодії виникають ділянки тертя з негативним демпфуванням, де можливе самозбудження коливань на ділянці під «штампом». Одночасно з цим процесом відбувається розвиток параметричних коливань в області перед штампом, причому пульсуюча сила тертя в зоні контакту є зовнішнім навантаженням для процесу параметричних коливань перед штампом.

Якщо в зоні під штампом виникають ділянки з силою тертя, що змінюється, як функції швидкості прослизання, наприклад при сухому терті у разі тертя ковзання, або ділянок з проковзуванням для тертя кочення, то можливе виникнення автоколивань на ділянці під штампом. Ці коливання накладаються на дотичне зусилля, яке передається на деформаційну хвилю, що утворилася попереду штампу, який рухається.

Розглянемо деякі особливості взаємодії між штампом, що рухається, і основою. Якщо під штампом автоколивання не виникають, то дотичне зусилля  $T_c$  буде мати постійний характер і воно відповідатиме критичному дотичному навантаженню, яке впливає на зону попереду штампу, викликаючи «подовжній» вигин поверхневих шарів напівпростору. Причому довжина деформованої ділянки напівпростору (або смуги) наперед невідома. Тому для вирішення поставленої задачі необхідно визначити розміри зони контакту двох деталей (під штампом), обчислити критичне дотичне навантаження по заданому вертикальному тиску на штамп, визначити довжину деформованої ділянки напівплощини (або напівпростору) та обчислити найбільше значення деформаційної мікронерівності.

З метою оцінки можливості виникнення втомного руйнування елементів напівпростору попереду штампу, що рухається, додатково до знайдених значень параметрів взаємодії штампу і напівпростору, необхідно також ввести в розгляд характеристику тертя між зазначеними елементами як функцію швидкості їх взаємного проковзування.

Розглянемо процес контактної взаємодії при русі жорсткого штампу (як плоскої, так і криволінійної форми) в основі із зовнішнім поверхневим покриттям.

Змоделюємо механізм розвитку автоколивань на ділянці контакту. Для цього припустимо, що автоколивальний процес розвивається в тонкому поверхневому шарі напівпростору, який скріплений вертикальними пружними зв'язками з його підповерхневими шарами, але так як елементи зони контакту знаходяться під впливом змінного розтягуючого навантаження, то ці вертикальні зв'язки не поширюємо на контактну взаємодію, а вносимо в розгляд тільки горизонтальні пружні зв'язки. При описі автоколивального процесу необхідно знайти постійну та змінну частини дотичного зусилля. Автоколивальний процес на ділянці контакту можна вважати безперервним. Так, якщо звернутися спочатку до завдання взаємодії плоского штампу зі смугою (або напівпростором) при фіксованому положенні ділянки на штампі, яка контактує зі штампом, що переміщається зі швидкістю  $V$ , на напівпросторі. Якщо розглядати взаємодію обертового ролика з напівпростором, то площа контакту на ролик при безперервному його обертанні з кутовою швидкістю  $\omega$  переміщається смугою з лінійною швидкістю точок обода колеса  $\omega r$  (де  $r$  – зовнішній радіус колеса) (рис. 4). Під час переміщення штампу смугою на ці деталі (елементи) діють дотична сила зчеплення  $T_c$ , а також сили пружності  $T_{пр}$  та інерції  $T_i$ .

Для математичної побудови завдання будемо виходити з уявлення про те, що абсолютне переміщення будь-якої точки контакту на смугі  $x$  складатиметься із суми переносного переміщення  $Vt$  та відносного руху майданчика при колюванні  $\xi$

$$x = Vt + \xi, \quad (2)$$

де  $\xi = x - Vt$  – відносне переміщення майданчика контакту;  $V$  – лінійна швидкість переміщення штампу;  $t$  – час.

Складемо рівняння балансу сил, прикладених до зони контакту при взаємодії рухомого штампу зі смугою, яке матиме наступний вигляд

$$m\ddot{x} + cx = T_c(\dot{x} - V), \quad (3)$$

або для коливального руху ділянки контакту

$$m\ddot{\xi} + c(\xi + Vt) = T_c(\dot{\xi}). \quad (4)$$

У наведених рівняннях:

$m = \gamma l_1 bh$  – маса ділянки контакту між штампом та напівпростором;  $\gamma$  – щільність матеріалу напівпростору (смуги);  $l_1$  – довжина майданчика контакту штампу та напівпростору;  $b$  – ширина ділянки контакту;  $h$  – товщина ущільненого шару на ділянці контакту (ділянка контакту має або прямокутну або еліптичну форму при коченні ролика, у разі підрізки ролика еліпс витягується у прямокутник з тими ж межами);  $c = \frac{2bh}{\bar{k}l_1}$  – жорсткість пружного (поздовжнього)

зв'язку ущільненого шару на ділянці контакту:  $\bar{k} = \frac{4(1-\bar{\mu}^2)}{\pi E}$  – коефіцієнт пружної податливості поверхнього (зміцненого) шару напівпростору;  $E$  – модуль пружності І роду (модуль Юнга) для напівпростору (або його поверхнього шару);  $\bar{\mu}$  – коефіцієнт Пуассона для матеріалу напівпростору;  $T_c$  – сила опору перекочування ролика [7]

$$T_c = \frac{f}{2k} \left( \sqrt{8kPr} + \frac{\delta r}{f} \right);$$

$\delta = -\frac{\xi}{V}$  – коефіцієнт відносного ковзання ролика по смугі згідно з гіпотезою Картера [8];  $P$  – вертикальне навантаження на ролик;  $r$  – зовнішній радіус ролика;

$T'_c = fP$  – сила опору при ковзанні плоского штампу по напівпростору (або напівплощині).

Як відомо [9], коефіцієнт тертя  $f$  є деякою функцією від швидкості прослизання штампу по напівпростору  $f = f(\dot{\xi})$

$$f(\dot{\xi}) = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} \right)^3, \quad (5)$$

де  $f_0$  – найбільше значення коефіцієнта тертя ковзання (тертя спокою);  $\Delta f = (f_0 - f_{min})$  – збільшення коефіцієнта тертя;  $f_{min} = f(\dot{\xi}_{кр})$  – значення коефіцієнта тертя при критичному значенні швидкості прослизання (тобто  $\dot{\xi}_{кр}$  значення швидкості прослизання у якому реалізується  $f_{min}$ ), тобто мінімум функції  $f(\dot{\xi})$ .

Звернемося до виразу (4), якщо припустити, що  $V = 0$ , це буде еквівалентно розгляду автоколивань в рухомій системі координат, де початок системи координат переміщається вздовж горизонтальної осі, з лінійною швидкістю  $V$  руху штампу.

Тоді рівняння автоколивань плями контакту (ущільненого шару) на штампі (або смузі) для загального випадку запишемо у вигляді

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = -\frac{T_c(\dot{\xi}, \dot{\xi}^3)}{m}, \quad (6)$$

де  $\omega_0$  – власна частота коливань поверхневого шару смузи.

Представимо вираз для сили опору переміщенню плоского штампу  $T_c$  по смузі, враховуючи її взаємозв'язок з вертикальним навантаженням та коефіцієнтом тертя у вигляді залежності від взаємної швидкості прослизання контактуючих деталей [9]

$$T_c = \left( f_0 - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \dot{\xi} + \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \dot{\xi}^3 \right) P. \quad (7)$$

Тоді вираз (6) з урахуванням (7) має вигляд

$$\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = - \left( f_0 - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \dot{\xi} + \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \dot{\xi}^3 \right) \frac{P}{m}. \quad (8)$$

Введемо позначення:

$$\alpha = \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{\xi}_{кр}} \frac{P}{m}; \quad \beta = \frac{\Delta f}{2 \dot{\xi}_{кр}^3} \frac{P}{m}; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}. \quad (9)$$

Рішення (8) будемо шукати у формі

$$\xi = \xi_0 + \xi_1. \quad (10)$$

Якщо прийняти  $\xi_0$  у вигляді

$$\xi_0 = -\frac{f_0 P}{c}, \quad (11)$$

то ми отримуємо приватне рішення (8), тоді для визначення  $\xi_1$  використовуємо рівняння

$$\ddot{\xi}_1 + \omega_0^2 \xi_1 = \alpha \dot{\xi}_1 - \beta \dot{\xi}_1^3. \quad (12)$$

Розглянемо рівняння (6) з урахуванням сили опору перекочування ролика напівпростором з урахуванням вертикального навантаження  $P$ , і зміни коефіцієнта тертя на ділянці контакту  $f = f(\dot{\xi})$ , як функції швидкості проковзування  $\dot{\xi}$ .

Спочатку звернемося до правої частини (6), яку за аналогією з джерелом [7], запишемо так

$$\frac{T'_c}{m} = -\frac{\sqrt{kPr}}{k} \frac{f_0}{m} + \left( \frac{3\sqrt{kPr}\Delta f}{2k\dot{\xi}_{кр}} + \frac{r}{2kV} \right) \dot{\xi} - \frac{\sqrt{kPr}\Delta f \dot{\xi}^3}{2k\dot{\xi}_{кр}^3}. \quad (13)$$



Введемо позначення:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\xi_{кр}} \frac{\sqrt{kPr}}{km} + \frac{r}{2kmv}; \quad \beta_1 = -\frac{\sqrt{kPr} \Delta f}{2km \xi_{кр}^3}. \quad (14)$$

Тоді рівняння для визначення зсувів площини контакту при її коливаннях, за аналогією з (12) матиме вигляд

$$\ddot{\xi}_2 + \omega_0^2 \xi_2 = \alpha_1 \dot{\xi}_2 - \beta_1 \dot{\xi}_2^3 - \frac{\sqrt{kPr} f_0}{k m}. \quad (15)$$

Рішення (15) шукаємо у вигляді суми

$$\xi_2 = \xi_{20} + \xi_{01}. \quad (16)$$

Приватне рішення (16) шукаємо у вигляді

$$\xi_{01} = \frac{\sqrt{kPr}}{kc} f_0. \quad (17)$$

Для отримання рішення  $\xi_{20}$  розглянемо окремий випадок рівняння (15)

$$\ddot{\xi}_{20} + \omega_0^2 \xi_{20} = \alpha_1 \dot{\xi}_{20} - \beta_1 \dot{\xi}_{20}^3, \quad (18)$$

де  $\omega_0$  – власна частота коливань поверхневого шару смуги.

Порівнюючи рівняння (12) і (18) робимо висновок, що вони збігаються за формою, тобто диференціальне рівняння коливань поверхневого шару смуги при взаємодії з плоским штампом і штампом криволінійної (кругової) форми збігаються формою з точністю до постійних коефіцієнтів. Тому для визначення переміщення при автоколиваннях поверхневих шарів площини контакту зупинимося на диференціальному рівнянні (12), а рішення (18) може бути легко отримано виходячи з рішення (12).

Отже, рівняння (18) як і (12) є диференціальним рівнянням другого порядку з нелінійним загасанням.

Для вирішення (12) використовуємо метод амплітуд, що повільно змінюються (метод Ван дер Поля) [10].

Згідно з методом, наближене рішення (12) може бути подане у вигляді:

$$\xi_1 = A(t) \cos \omega_0 t, \quad (19)$$

де  $A(t)$  – функція часу, що повільно змінюється.

Справедливість подання рішення у такому вигляді можна легко пояснити, якщо  $\alpha$  та  $\beta$  досить малі.

Умови повільності зміни  $A(t)$  можна записати

$$\frac{dA}{dt} \leq \omega_0 A, \quad (20)$$

$$\frac{d^2 A}{dt^2} \leq \omega_0^2 A. \quad (21)$$

Після підстановки (19) в (12) і виконання перетворень, відкидаючи доданки з потрібною частотою  $3\omega_0$ , а також заздалегідь малозначущі доданки при виконанні умов (20), (21) [10], можна отримати диференціальне рівняння для амплітуди

$$2 \frac{dA}{dt} - \alpha A + \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 A^3 = 0. \quad (22)$$

Рівняння (22) є рівнянням з змінними, що розділяються.

Розділяючи змінні отримаємо

$$2 \int_a^A \frac{dA}{(\alpha - \frac{3}{4} \beta \omega_0^2 A^2) A} = t. \quad (23)$$

В результаті інтегрування (22) запишемо вираз для амплітуди  $A(t)$  від часу

$$A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 - (\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 - \frac{\alpha}{a^2})e^{-\alpha t}}}, \quad (24)$$

де  $a$  – початкова амплітуда.

При  $t \rightarrow \infty$   $A(t) \rightarrow A_0$

$$A_0 = \frac{2}{\omega_0} \sqrt{\frac{\alpha}{3\beta}}, \quad (25)$$

$A = A_0$  – амплітуда режиму, що встановився.

Таким чином, рішення диференціального рівняння (6) або (8) матиме вигляд

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 - (\frac{3}{4}\beta\omega_0^2 - \frac{\alpha}{a^2})e^{-\alpha t}}} \cos \omega_0 t - \frac{f_0 P}{c}. \quad (26)$$

За аналогією з (8) запишемо рішення диференціального рівняння (15)

$$\xi_2(t) = \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta_1\omega_0^2 - (\frac{3}{4}\beta_1\omega_0^2 - \frac{\alpha_1}{a_1^2})e^{-\alpha_1 t}}} \cos \omega_0 t - \frac{\sqrt{kPr} f_0}{\bar{k} m}. \quad (27)$$

Отримані вирази (26), (27) входять до формул (7) і (13) для визначення сили опору переміщенню штамп (7) – плоского, (13) – криволінійного. Безпосередня підстановка  $\xi(t)$  і  $\xi_2(t)$  в вирази (7) і (13) призводять до громіздких результатів.

З метою визначення приблизного значення дотичного зусилля  $T_c$  вважаємо, що маса  $m$  ділянки контакту товщиною  $h$  є малим параметром. Тоді звернемося безпосередньо до рівнянь (8) та (15). Знайдені величини  $\xi$ ,  $\xi_2$ , будучи помноженими на жорсткість поздовжньої балки-полоси з точністю до нескінченно малих величин дають дотичне навантаження (тобто, фактично використовуємо метод «малого» параметра). Таким чином, вирази  $c\xi(t)$ ,  $c\xi_2(t)$  є дотичним навантаженням, яка викликає розтягнення зони контакту між штампом і смугою. Якщо слідувати результатам роботи [10], то це навантаження, крім розтягування зони контакту між «штампом» і смугою, також викликає стиск ділянки довжиною  $l_2$  (яка поки невідома), розташованого попереду штамп, що рухається.

Зазначене навантаження викликає поздовжній вигин, (а в ряді випадків) втрату поздовжньої стійкості поверхневих шарів, на деформації яких накладаються параметричні коливання (ці коливання часто бувають резонансними), тому навантаження

$$T_c = c\xi_1(t) = T_1(t) \cos \omega_0 t + T_{01}, \quad (28)$$

$$T_{c2} = c\xi_2(t) = T_2(t) \cos \omega_0 t + T_{02} \quad (29)$$

називається параметричним.

Зазначимо, що прийнята модель для опису автоколивань площини контакту є дискретною моделлю у вигляді вантажу на пружині під впливом дотичної сили  $T_c$ , спрямованої вздовж смуги. Ця сила, впливаючи на смугу попереду штамп, може сприяти виникненню двох складових деформаційної хвилі – статичної (квазистатичної) та динамічної, яка накладається на статичну у вигляді проявлених параметричних коливань (квазігармонічних коливань, а в ряді випадків релаксаційних).

Квазистатична деформаційна хвиля, що відбувається з основною частотою власних коливань «тонкої» площини контакту після настання базового числа циклу навантажень призводить до втомного руйнування поверхневих шарів, як на

смугі, так і на штампі, а накладені параметричні коливання можуть викликати додаткові хвилі, які призведуть до виникнення зростаючих параметричних коливань, а деяких випадках – до появи втомних тріщин і сколів.

Також слід зазначити, що при розгляді площини контакту штампу зі смугою може бути використана фізична модель з розподіленими параметрами. Цей підхід призводить до ускладнення завдання, яке, насамперед, зводиться до появи спектра частот коливань. Зазвичай такий спектр складно врахувати для реальних деталей, що взаємодіють. Представлені вирази для  $T_c$  (28), (29) використовуємо при складанні диференціального рівняння параметричних коливань «тонкого» поверхневого шару смуги попереду штампу (або ролика), що рухається, щодо рухомої системи координат, що переміщається вздовж горизонтальної осі з початком системи відліку  $O$  з лінійною швидкістю переміщення штампу « $V$ ».

Складемо диференціальне рівняння коливань умовної балки, що переміщається разом з опорами балки-полоси кінцевої довжини  $l_2$  (яка підлягає визначенню при розв'язанні задачі), навантаженою стискаючою змінною силою опору переміщенню «штампу»  $T_c = T_c(\xi, \xi^3)$ , причому балка-смужка ще додатково спирається на пружну основу коефіцієнтом відпору  $\bar{\beta}_1 = \frac{E\bar{\alpha}_1}{2}$  (рис. 3).

Реактивне зусилля від пружної основи внутрішніх шарів ролика пропорційно пружним (вертикальним) прогинам основи смуги.

У рівняння поздовжнього вигину вводимо вертикальне розподілене навантаження у вигляді відпору пружної основи, а також інерційне навантаження.

Тоді рівняння, що описує поздовжній вигин балки-полоси довжиною  $l_2$ , складене з ущільнених поверхневих шарів матиме вигляд

$$E_n I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T_c(\xi, \xi^3) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E\bar{\alpha}_1}{2} w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (30)$$

З урахуванням граничних та початкових умов

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ при } x = 0; x = l_2, \quad (31)$$

$$w(x_0, 0) = w_0(x_0); \frac{\partial w(x_0, 0)}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Зауважимо, що величина  $l_2$  залежить від геометрії перерізу балки-полоси, модулів пружності  $E_n, E$ , та підлягає подальшому визначенню.

У наведених виразах (30), (31), (32):

$w(x, t)$  – поперечний прогин балки-полоси під впливом поздовжнього зусилля  $T_c(\xi, \xi^3)$ ;  $\bar{\alpha}_1 = \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}$  – число напівхвиль балки-полоси на ділянці балки довжиною  $\pi$  [11];  $E_n, E$  – відповідно модулі пружності зовнішніх та внутрішніх шарів смуги;  $x_0$  – деяке значення поздовжньої координати  $x$  з інтервалу  $0 \leq x_0 \leq l_2$ ;  $\xi(t), \dot{\xi}(t)$  – відповідно відносне зміщення деталей пари при коливаннях і швидкість цих коливань;  $m_0$  – погонна маса балки-полоси товщиною  $h$ .

Припустимо, що функція  $w(x, t)$  припускає уявлення виду

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^n B_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l_2}. \quad (33)$$

Тоді після підстановки (33) у рівняння (30) отримаємо сукупність диференціальних рівнянь однієї змінної  $t$ .

$$m_0 \frac{d^2 B_k}{dt^2} + E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} B_k + T_c(\xi, \xi^3) \frac{k^2 \pi^2}{l_2^2} B_k + \frac{E}{2} \bar{\alpha}_1 B_k = 0. \quad (34)$$

Так як рівняння (34) ідентичні за будь-яких « $k$ », то в їх рішеннях достатньо обмежитися одним загальним рішенням, тому індекс « $k$ » надалі може бути опущений (або просто прийнятий рівним одиниці). Розглянемо також деякі позначення ( $\mu_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\Omega_k$ ) виконаємо з ними перетворення стосовно (34) і надалі розглядатимемо індекс  $k = 1$  для головної форми коливань.

З урахуванням сказаного, перетворимо (34) на вигляд (з урахуванням (28), (29))

$$\frac{d^2 B_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t}{T_k^*} \right) B_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (35)$$

де  $\omega_k^2 = \frac{1}{m_0} \left( \frac{k^4 \pi^4}{l_2^4} E_n I + \bar{\beta}_1 \right)$  – квадрат  $k$ -тої власної частоти коливань незавантаженої балки-полоси ( $l_2 \times b \times h$ ), якщо  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $T_0$  – постійна складова дотичної сили;  $T_k^* = \frac{k^2 \pi^2 E_n I}{l_2^2} + \frac{\bar{\beta}_1 l_2^2}{k^2 \pi^2}$  – значення критичної дотичної сили для форми втрати стійкості балки-полоси із індексом « $k$ »;  $T_1$  – половина амплітуди коливань дотичної сили (може бути змінною величиною, нами прийнята як функція, що повільно змінюється).

Для подальших перетворень введемо позначення:

$\Omega_k$  – частота власних коливань балки-полоси, навантаженої постійної складової дотичної сили  $T_0$  для форми коливань з індексом  $k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_k^*}}. \quad (36)$$

$\mu_k$  – коефіцієнт збудження навантаження, який для багатьох систем є «малим» параметром [10]

$$\mu_k = \frac{T_1}{2(T_k^* - T_0)}. \quad (37)$$

З урахуванням прийнятих позначень рівняння (35) перетворюємо на вигляд:

$$\frac{d^2 B_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \omega_0 t) B_k = 0. \quad (38)$$

Приймаючи  $k = 1$  матимемо (якщо  $T_1 \approx const$ )

$$B_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t) B_1 = 0. \quad (39)$$

Рівняння (39) є рівнянням Мат'є, яке визначає проходження накладених параметричних коливань на деформований поверхневий шар смуги.

У разі коли дотична сила змінюється за більш загальним законом, наприклад (28) або (29), то  $T_c$  можна записати у вигляді:

$$T_c = T_0 + T_1 \Phi(t), \quad (40)$$

де  $\Phi(t)$  – періодична функція з періодом  $2\pi/\omega_0$ , тоді замість рівняння (39) матимемо:

$$B_1'' + \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \Phi(t)] B_1 = 0. \quad (41)$$

Рівняння (41), на відміну від (39), більш загального виду, яке називається рівнянням Мат'є-Хілла.

Введемо на розгляд допоміжні функції:

$$Q^2(t) = \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t], \quad (42)$$

$$Q_1^2(t) = \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \Phi_1(t)]. \quad (43)$$

Зазначимо, що у виразі для частоти власних коливань балки, складеної з ущільнених поверхневих шарів, ( $\Omega^2$ ) входить співмножником власна частота

незавантаженої системи  $\omega_1^2 = \frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{I^4} E_n I + \bar{\beta}_1 \right)$ , яка зворотно пропорційна погонній масі балки  $m_0$

$$m_0 = \mu_0^2, \quad (44)$$

Тому  $m_0$  можна трактувати як «малий» параметр.

В силу такого уявлення дана коливальна система є високочастотною при тому  $\omega_0^2 \gg 1$ .

Крім того, функції  $Q(t)$ ,  $Q_1(t)$ , визначені на сегменті  $t_1 \leq t \leq t_2$ .

Тоді диференціальне рівняння (41) перепишемо у вигляді

$$B''(t) + Q^2(t)B = 0. \quad (45)$$

У виразі (45) замість  $Q(t)$  можна розглядати  $Q_1(t)$ .

Рівняння типу (45) допускають побудову наближених рішень, згідно з методом Венцеля, Крамерса, Бриллюена і Джеффріса (ВКБ або WKB), або методу амплітуд, що повільно змінюються [12].

Відповідно до методу ВКБ наближене рішення (45) шукаємо у вигляді

$$B(t) = [Q(t)]^{1/2} [C_1 e^{i\varphi(t)} + C_2 e^{-i\varphi(t)}], \quad (46)$$

де  $\varphi(t) = \int Q(t)dt$ ;  $C_1, C_2$  – постійні;  $i$  – уявна одиниця.

При цьому

$$|Q^2| \gg \left[ \frac{\ddot{Q}}{2Q} - \frac{3}{4} \left( \frac{\dot{Q}}{Q} \right)^2 \right]. \quad (47)$$

Оскільки  $Q^2(t)$  – позитивна функція, а  $Q(t)$ ,  $\varphi(t)$  – речові функції, то рішення (46) може бути записано в більш зручному вигляді, і  $B(t)$  представимо речовою функцією

$$B(t) = [Q(t)]^{-1/2} [C_3 \cos \varphi(t) + C_4 \sin \varphi(t)], \quad (48)$$

де  $C_3, C_4$  – довільні постійні, що визначаються з початкових умов завдання, а функція  $\varphi(t) = \int Q(t)dt$ .

Так як  $\mu_1$  достатньо мала, то в цьому випадку

$$Q^2(t) = \Omega^2 [1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t], \quad (49)$$

можна приблизно вважати

$$Q(t) = \Omega [1 - \mu_1 \cos \omega_0 t], \quad (50)$$

отже

$$\varphi(t) = \int Q(t)dt = \Omega \left( t - \frac{\mu_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \quad (51)$$

Тоді наближене рішення для функції  $B(t)$  за методом ВКБ виражається рівністю:

$$B(t) = \Omega^{-1/2} \left( 1 + \frac{\mu_1}{2} \cos \omega_0 t \right) \times \\ \times \left[ C_3 \cos \Omega \left( t - \frac{\mu_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) + C_4 \sin \Omega \left( t - \frac{\mu_1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \right]. \quad (52)$$

У процесі частотної модуляції коливань виникає ряд додаткових частот, які можна визначити, розклавши синус складного аргументу на ряд за бesselевими функціями.

Таким чином, доданки, що містять твори тригонометричних функцій, перетворюємо до функцій сумарних і різницевих частот. У цьому випадку миттєві значення амплітуди  $B(t)$  містять власну частоту коливань  $\Omega$ , а також складові частоти, рівні сумі та різниці  $\Omega$  та всіх частот кратних модулюючій частоті  $\omega_0$ .

Використовуючи уявлення складних функцій через бesselеві функції можна подати рішення (39) у вигляді:

$$B(t) = \Omega^{-1/2} \left( 1 + \frac{\mu_1}{2} \cos \omega_0 t \right) C_3 [I_0(k) \cos \Omega t + I_2(k) [\cos(\Omega + 2\omega_0)t + \cos(\Omega - 2\omega_0)t] + I_4(k) [\cos(\Omega + 4\omega_0)t + \cos(\Omega - 4\omega_0)t] + \dots - I_1(k) [\cos(\Omega + \omega_0)t - \cos(\Omega - \omega_0)t] - I_3(k) [\cos(\Omega + 3\omega_0)t - \cos(\Omega - 3\omega_0)t]] + C_4 [I_0(k) \sin \Omega t + I_2(k) [\sin(\Omega + 2\omega_0)t + \sin(\Omega - 2\omega_0)t] + I_4(k) [\sin(\Omega + 4\omega_0)t + \sin(\Omega - 4\omega_0)t] + \dots - I_1(k) [\sin(\Omega + \omega_0)t - \sin(\Omega - \omega_0)t] - I_3(k) [\sin(\Omega + 3\omega_0)t - \sin(\Omega - 3\omega_0)t] - \dots] \quad (53)$$

Той самий результат можна отримати, застосовуючи метод амплітуд, що повільно змінюються [12].

З метою подання рішення рівнянь (38), (41) або (45) у вигляді поєднань елементарних функцій, шукану функцію  $B(t)$  можна представити у вигляді нескінченного тригонометричного ряду, як для квазілінійного завдання, так і при прояві слабкої нелінійності [10]

$$B(t) = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ a_k \sin \frac{k\omega_0 t}{2} + b_k \cos \frac{k\omega_0 t}{2} \right], \quad (54)$$

де  $a_k, b_k$  – коефіцієнти розкладання.

Як правило, при вирішенні диференціальних рівнянь типу (45) обмежуються одним або двома наближенням.

Зауважимо, що завдання (35) може бути ускладнене за рахунок того, що балка-смужка в області під штампом може бути уподібнена до стрижня з пружним зв'язком у місці початку взаємодії штампу зі смугою. Цей пружний зв'язок проявляється за рахунок розтягування ділянки контакту під штампом, що має поздовжню жорсткість  $c_0 = E_n F$  (рис. 3, 5 точка  $C$ ). Вважатимемо, що додаткова поздовжня сила пропорційна поздовжньому зміщенню балки-полоси  $u$

$$\Delta T = c_0 u, \quad (55)$$

де  $c_0$  – поздовжня жорсткість балки-полоси;  $E_n$  – модуль пружності поверхневих шарів;  $u$  – поздовжнє зсув рухомого кінця балки-полоси, рис. 5, точок  $A, C$ .

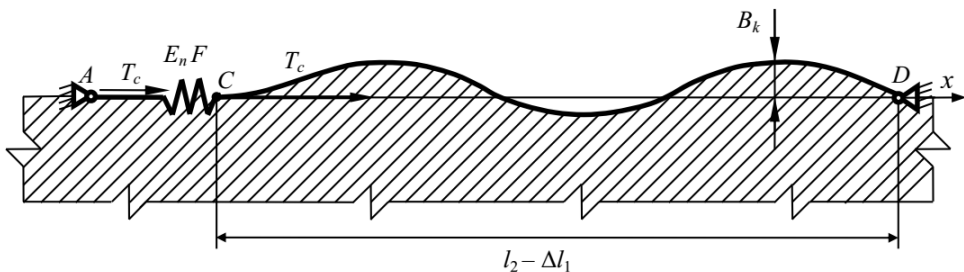


Рис. 5. Гіпотетична балка на пружній основі з урахуванням поздовжньої жорсткості  $E_n F$  ділянки контакту поверхневих шарів та штампу

З урахуванням додаткової поздовжньої сили  $\Delta T$  у виразі для тригонометричного ряду (33) зміниться функція часу  $B_k(t)$ . Тоді диференціальне рівняння (35) для визначення функції набуде вигляду:

$$B_k'' + \omega_k^2 \left( 1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t + \Delta T}{T_k^*} \right) B_k = 0. \quad (56)$$

Тобто диференціальне рівняння (56) відрізняється від рівняння (35) наявністю деякого доданку (зокрема нелінійного)

$$B_k'' + \omega_k^2 \left(1 - \frac{T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t}{T_k^*}\right) B_k + \psi(B_k) = 0 \quad (57)$$

або

$$B_k'' + \Omega_k^2 (1 - \mu_0 \cos \omega_0 t) B_k + \psi(B_k) = 0. \quad (58)$$

Для обліку зміщення рухомої точки перед штампом згідно (55) звернемося до величини укорочення балки-полоси (знаходимо як різницю між початковою довжиною та проекцією її деформованої вісі)

$$u = l - \int_0^l \cos \varphi ds = l - \int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2} ds \approx \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2 ds + \dots, \quad (59)$$

де  $\varphi$  – кут, який становить дотична до вигнутої форми балки з поздовжньою віссю;  $w = w(s, t)$  – прогин балки-полоси в деякій довільній її точці по дузі  $s$  (можна розглядати як нескінченний ряд)

$$w(s, t) = B_k(t) \sin \frac{k\pi s}{l} \quad w(s, t) = B_k(t) \sin \frac{k\pi s}{l};$$

$l$  – довжина балки-полоси, схильної до деформації, в зоні випередження штампу [13]

$$l = l_2 = 2,41\pi \sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}};$$

$\psi(B_k)$  – у загальному випадку деяка нелінійна функція переміщення вільного кінця балки-полоси, яку можна отримати, якщо покласти у виразі (57) для  $B_k = \text{const}$  та прирівняти нулю час, тоді

$$\left(1 - \frac{T_0}{T_{кр}^*}\right) B_k + \frac{1}{\omega_k^2} \psi(B_k). \quad (60)$$

Остаточно вираз для  $\psi(B_k)$  при  $k = 1$  можна записати у вигляді

$$\psi(B_1) = \frac{\pi^2 \omega_1^2 c_0}{4l_2 T_{кр}^*} B_1^3 = \gamma_1 B_1^3(t). \quad (61)$$

Якщо ввести позначку

$$\gamma_1 = \frac{\pi^2 \omega_1^2}{4l_2 T_{кр}^*} c_0 = \frac{\pi^2 \omega_1^2}{4l_2 T_{кр}^*} E_n F, \quad (62)$$

то диференціальне рівняння для визначення  $B_1(t)$  набуде вигляду:

$$B_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_0 \cos \omega_0 t) B_1 + \gamma_1 B_1^3 = 0 \quad (63)$$

Представлене рівняння (63) використовуємо щодо визначення амплітуди головної форми коливань при дії параметричного навантаження  $T_0 + T_1(t) \cos \omega_0 t$ . Обмежимося у розв'язку першим наближенням

$$B_1(t) = a_1 \sin \frac{\omega_0 t}{2} + b_1 \cos \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (64)$$

Якщо підставити «ряд» (64) до рівняння (63), то отримаємо згідно [10]

$$\left[\Omega^2 (1 + \mu_0) - \frac{\omega_0^2}{4}\right] a_1 - \varepsilon \omega_0 b_1 + \Phi_1(a_1, b_1), \quad (65)$$

$$\left[\Omega^2 (1 - \mu_0) - \frac{\omega_0^2}{4}\right] b_1 - \varepsilon \omega_0 a_1 + \Psi_1(a_1, b_1). \quad (66)$$

В результаті підстановки з урахуванням позначення амплітуди  $B^{*2} = a_1^2 + b_1^2$

$$\psi(B, B', B'') = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 a_1 - \varepsilon_L \omega_0 b_1) \sin \frac{\omega_0 t}{2} + \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 b_1 + \varepsilon_L \omega_0 a_1) \cos \frac{\omega_0 t}{2}. \quad (67)$$

Тоді коефіцієнти при функціях  $\sin \frac{\omega_0 t}{2}$ ;  $\cos \frac{\omega_0 t}{2}$  визначають коефіцієнти розкладання до ряду Фур'є для  $k = 1$

$$\Phi(a_1, b_1) = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 a_1 - \varepsilon_L \omega_0 b_1) \quad (68)$$

$$\Psi(a_1, b_1) = \frac{B^{*2}}{4} (3\gamma_1 b_1 - \varepsilon_L \omega_0 a_1) \quad (69)$$

У наведених виразах (67), (68), (69)  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_L$  – являють собою коефіцієнт лінійного та нелінійного згасання при коливаннях. Якщо згасання у системі незначне, його впливом нехтуємо.

Якщо визначити рівняння (58) з урахуванням виду функції  $\Psi(B_1)$ , то матимемо

$$B_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_0 \cos \omega_0 t) B_1 + \gamma_1 B_1^3 = 0. \quad (70)$$

Додатково введемо позначення  $n = \frac{\omega_0}{2\Omega}$ ;  $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon}{\Omega}$ ;  $\Delta_L = \frac{\pi\varepsilon_L}{2\Omega}$ . Тоді використовуючи вирази (65), (66) з урахуванням (68), (69) і маючи на увазі під  $\varepsilon$ ;  $\varepsilon_L$  – відповідно лінійні та нелінійні згасання в системі, можна для випадку нелінійної пружності за рівнянням (70) обчислювати значення амплітуди коливань згідно з виразом [10]:

$$B^* = \frac{2\Omega}{\sqrt{3\gamma_1}} \sqrt{n^2 - 1 \pm \sqrt{\mu_0^2 - \frac{n^2 \Delta^2}{\pi^2}}} \quad (71)$$

Графік, який можна побудувати за виразом (71) як функцію частоти, має дві гілки – одна для  $n$  в межах  $0,8 \leq n \leq 1,2$  є стійкою кривою, якщо  $n \geq 1,2$  то крива амплітуд є нестійкою.

Для нелінійної пружності характерним є нахил резонансних кривих у бік критичних частот. За формулою (71) обчислюємо амплітуди деформаційних мікронерівностей, які можуть бути порівняні з мікронерівностями деталей після їх механічної обробки різанням, тиском або шліфуванням. Алгоритм обчислення амплітуд деформаційних мікронерівностей дозволяє спрогнозувати виникнення мікронерівностей, а також можливість їх руйнування у разі виникнення нестійких динамічних станів, які продиктовані збудженням фрикційних коливань в області під штампом.

Розглядаючи обчислення амплітуд встановлених коливань балки-полоси під дією параметричного навантаження, важливим є облік нестійкої гілки кривої амплітуд як функції частоти збудження при  $n \geq 1,2$ , слід мати на увазі той факт, що параметричний резонанс, що виявляється, реалізується у вигляді накопичених місць лущення, або тріщин, що накладаються на залишкові деформаційні хвилі зовнішніх поверхонь.

Зазначимо, що для оцінки впливу силових та фізичних параметрів формулу (71) зручно перетворити з урахуванням значень коефіцієнтів:  $\Omega$ ,  $\gamma_1$ ,  $n$ ,  $\mu_0$ ,  $\Delta$ ,  $\Delta_L$

$$\begin{aligned} B^* &= \frac{2 \sqrt{\frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E n I + \beta_1 \right)} \sqrt{\frac{T_1^* - T_0}{T_1^*}}}{\sqrt{3} \sqrt{\frac{\pi^2}{4lT_1^*} \frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E n I + \beta_1 \right)} E n F} \sqrt{\frac{T_1}{4(T_1^* - T_0)} - 1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4(T_1^* - T_0)^2} - \frac{4\pi^2 \varepsilon^2}{\Omega^2}}} = \\ &= \frac{2 \sqrt{T_1^* - T_0} \sqrt[3]{\frac{4E n I}{E}}}{\sqrt{0,3\pi} \sqrt{E n F}} \sqrt{\frac{T_1}{4(T_1^* - T_0)} - 1 \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4(T_1^* - T_0)^2} - \frac{1}{m_0} \left( \frac{\pi^4}{l^4} E n I + \frac{E}{2} \right) \sqrt[3]{\frac{E}{4E n I}}}} \quad (72) \end{aligned}$$

Таким чином, амплітуда деформаційної хвилі при пов'язаних фрикційних та параметричних коливаннях (в умовах близьких до параметричного резонансу) пропорційна кореню квадратному з різниці критичного зусилля  $T_1^*$ , постійної складової критичного навантаження  $T_0$  і масового коефіцієнта  $\mu_0$ , а також



фізичним та геометричним параметрам балки-полоси  $E_n$ ,  $E$ ,  $m_0$ ,  $b$ ,  $h$ ,  $l$  ( $l_2$ ). Причому коефіцієнти згасання можна трактувати як малі параметри ( $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_L$ ), які характеризують як зовнішнє, так і внутрішнє тертя матеріалу балки-полоси (або матеріалу штамп). Однак при підвищенні робочих температур у зоні контакту коефіцієнти  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_L$  можуть суттєво зростати і тоді буде неправомірно вважати коефіцієнти загасання малими параметрами.

Якщо абстрагуватися від самозбуджувальних фрикційних автоколиваний і викликаних ними параметричних коливань в зоні під штампом і перед штампом, то ділянка балки-полоси під штампом буде відчувати тільки розтяг, а ділянка перед штампом буде деформуватися за періодичною кривою, близькою до синусоїди, котру можна трактувати як хвилю довжиною  $l_2$ , що переміщається з лінійною швидкістю  $V_0$ .

Після визначення довжини стисненої ділянки балки ( $l = l_2$ ), числа напівхвиль на стиснутому елементу ділянці  $k$ , що втратив поздовжню стійкість [13], виникає питання визначення висоти деформаційних нерівностей. Як було встановлено (рис. 3), ділянка під штампом  $l_1$  знаходиться в зоні розтягування, а ділянка  $l_2$  – в зоні стиснення. Припустимо, що балка-смужка задана у вигляді стрижня з шарнірними опорами в рухомій системі координат. Так як суцільність цих елементів поверхневих шарів не порушується в більшості практичних випадків, то подовження ділянки під штампом  $\Delta l_1$ , дорівнюватиме укороченню ділянки перед штампом  $\Delta l_2$  ( $\Delta l_1 = \Delta l_2$ ). Припустимо, що проекція стисненої ділянки балки-полоси  $l_2$  укоротилася на довжині  $\Delta l_1$ . Отже, довжина проекції дуги  $l_2$  на горизонтальну вісь дорівнюватиме  $l_2 - \Delta l_1$ , при цьому сама ділянка балки  $l_2$  вигнеться за деякою періодичною кривою з амплітудою хвилі деформації  $\max B$ . Природньо припустити, що згідно з прийнятим опиранням кінців балки, ця крива може бути представлена синусоїдою

$$w_k(x) = \max B_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (73)$$

Зауважимо, що  $l = l_2$  – це довжина хвилі деформації ділянки перед штампом:  $k = 2,41$  (приймаємо  $k = 2,5$ ) – кількість напівхвиль деформації ділянки перед штампом.

Виходячи з деформаційних залежностей для ділянки перед штампом  $l_2$  запишемо вирази для збільшення  $\Delta l_1$

$$\begin{aligned} \Delta l_1 = \Delta l_2 &= \int_0^{l_2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx - dx \right) = \int_0^{l_2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1 \right) dx \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 dx. \end{aligned} \quad (74)$$

З урахуванням виду функції  $w(x)$  запишемо

$$\begin{aligned} \Delta l_1 &= \frac{1}{2} \int_0^{l_2} mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{2l^2} \int_0^{l_2} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= mB_k^2 \frac{k^2 \pi^2}{2l^2} \left( \frac{l_2}{2} + \frac{l_2}{4k^2 \pi^2} \sin 2k\pi \right). \end{aligned} \quad (75)$$

Якщо  $k = 2,5$  (точніше  $k = 2,41$ ), то  $\sin 5\pi = 0$  і

$$\Delta l_1 = \frac{k^2 \pi^2}{4l_2} mB_k^2. \quad (76)$$

З іншого боку, згідно з [13] для розтягнутої ділянки  $l_1$

$$\Delta l_1 = \frac{T_c l_1}{E_n h}. \quad (77)$$

Прирівнюючи (76) та (77) отримаємо

$$mB_k = \frac{2}{k\pi} \sqrt{\frac{T_c l_1 l_2}{E_n h}}. \quad (78)$$

Отже, висота найбільшої деформаційної мікронерівності прямопропорційна середньому геометричному значенню довжин ділянок  $l_1$ ,  $l_2$ , і прямопропорційна кореню квадратному відношення дотичного зусилля  $T_c$  до товщини  $h$  для однієї із балок-смужок.

Розглянемо можливість руйнування поверхневих шарів деталей, що взаємодіють, під впливом дотичних і нормальних зусиль ( $T_c$ ,  $P$ ). Для тривалої експлуатації цих деталей дотичне зусилля  $T_c$  не повинно перевищувати критичну силу  $T_k^*$  верхнього шару напівпростору

$$T_c < T_k^* \quad (79)$$

Тому тонкий поверхневий шар деталей, що взаємодіють, отримує пружні (оборотні) деформації, які зникають після припинення дії навантажень ( $T_c$ ,  $P$ ). Вихід з ладу тонкого поверхнього шару настає тільки внаслідок втомного поверхнього руйнування зовнішніх шарів напівпростору (в основному крихкого руйнування). При цьому еквівалентна змінна напруга  $\sigma_e$  не повинна перевищувати межі витривалості матеріалу деталі  $\sigma_{-1}$

$$\sigma_e \leq \sigma_{-1}, \quad (80)$$

де  $\sigma_e = \sigma_a + \Psi_{\sigma\delta} \sigma_m$  – еквівалентна змінна напруга;  $\sigma_a$  – амплітудне значення змінної частини напруги циклу;  $\sigma_m$  – середнє значення напруги циклу;  $\Psi_{\sigma\delta}$  – коефіцієнт впливу постійних напруг для деталі.

При виконанні умови (80) число циклів навантаження буде значним (близько  $10^8$  циклів навантаження і більше). Таким чином, для цього випадку розрахунок на зношування зводиться до розрахунку на втому пружних деформаційних мікронерівностей, у яких визначається довжина пружної деформаційної хвилі, амплітуда (висота) деформаційної хвилі, період часу протягом якого розвивається базове число циклів навантаження поверхневих шарів. При цьому, якщо виникають мікронерівності, та після припинення впливу сили  $T_c$  нерівності повертаються у недеформований стан, як за рахунок прояву пружних властивостей поверхневих шарів (у межах закону Гука), так і за рахунок вирівнювання мікронерівностей, що залишилися, в період проходження по них штампу.

Далі розглянемо випадок, коли діючі зусилля ( $T_c$ ,  $P$ ) такі, що тонкий поверхневий шар перед штампом втрачає поздовжню стійкість, і при цьому отримує непружні деформації (тобто деформації поверхневих шарів будуть залишковими). Після повторного проходження штампу по деформаційних виступах, їх вершини можуть бути частково або повністю зрізані – має місце пластичне руйнування матеріалу деталей.

При такому характері навантаження деталі пари, що взаємодіє, отримають інтенсивний знос.

Звернемося до розрахункового випадку, коли рівнодіюче зусилля  $T_c$ , за наявності якісного мастила, у комбінації з антифрикційними матеріалами таке, що деформації від дії поздовжнього зусилля  $T_c$  будуть значно менш відчутні, ніж прогини балки під дією ваги штампу  $P$ . Ці деформації мають вигляд хвилі, що біжить по балці на пружній підставі, яка при взаємодії деталей носить циклічний характер (хвиля) і у разі проходження деталями базового числа циклів (наприклад

$10^8$  і більше) відбувається руйнування поверхневих шарів під впливом ваги штампу  $P$ .

Такий вид втомних руйнувань деталей можливий, проте він відбувається при більшій кількості циклів навантаження, ніж для першого випадку (при  $T_c < T_{кр}^*$ ).

У наведених нами результатах з деформування і хвилеутворення на поверхневих шарах смуги було прийнято, що ці поверхневі шари, в межах плями контакту і частини смуги попереду точки  $C$  (рис. 3, 5) розглянуті в рухомій системі координат, яка спільно з частиною смуги довжиною  $(l_1 + l_2)$  переміщується із швидкістю руху штампу  $V_0$ . При цьому числове значення швидкості переміщення штампу не обговорювалося детально.

Разом з тим в науковій праці В. Л. Бідермана «Про згинальну хвилю, що біжить по балці на пружній основі» [13], автором роботи встановлено, що поперечний прогин балки, навантаженої деяким точковим вантажем, вагою  $P$  (без конкретизації розмірів і форми ділянки контакту) істотно залежить від швидкості руху вантажу  $V_0$ . Іншими словами, задача про рух вантажу балкою на пружній основі є динамічною [13]. Крім того, задача про рух абстрактного вантажу по балці може бути трансформована в задачі про рух штампу смуги під дією ваги  $P$  і дотичного зусилля  $fP$ . Причому штамп може мати прямокутну форму основи або окреслену дугою [7]. При стягуванні основи штампу в точку, завдання про переміщення штампу з тертям по напівпросторі стає ідентичною задачі про взаємодію вантажу  $P$  з балкою на пружній підставі і вантажем, що рухається. Тому дві задачі, що розглядаються, мають загальну особливість – вони є динамічними.

Вважатимемо, що динамічний характер цих двох завдань можна оцінити використовуючи формулу для коефіцієнта динамічності [13]. Тоді всі напруження та деформації в точках взаємодії штампу та напівпростору можуть бути відкориговані шляхом множення певних величин на коефіцієнт динамічності  $\delta_d$ , який залежить від швидкості переміщення штампу.

В. Л. Бідерманом [13] сформульовано завдання про переміщення рухомого навантаження  $P$ , прикладеного до балки на пружній основі. Причому для математичного опису задачі використана рухома система координат, суміщена з вантажем, що переміщається вздовж осі  $x$  зі швидкістю вантажу  $V_0$ . В результаті розв'язання задачі отримано формулу для визначення переміщення  $y_0$  під вантажем [14]

$$y_0 = -\frac{P}{2E_n I b \sqrt{b - aV_0^2}}, \quad (81)$$

де  $E_n$  – модуль пружності I роду для поверхневих шарів напівпростору (зазвичай твердий або ущільнений шар заданої товщини);  $I$  – момент інерції ущільненого шару балки-полоси на пружній основі (розміром  $\bar{b} \times h$ );  $b^2 = \frac{\bar{\beta}_1}{EI}$  – квадрат коефіцієнта жорсткості пружної основи;  $\bar{\beta}_1 = \frac{E}{2} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n}}$  – коефіцієнт відпору пружної основи [11];  $E$  – модуль пружності I роду для внутрішніх шарів пружного напівпростору (модуль пружності поверхневих шарів деталі);  $V_0$  – швидкість переміщення вантажу;  $a = \frac{m_0}{2EI}$  – коефіцієнт інерційності балки на пружній підставі. Як видно, з виразу (81) прогин балки під вантажем має тенденцію до

збільшення при зростанні швидкості вантажу;  $m_0$  – погонна маса балки на пружній основі.

Розглядаючи вираз (81) при швидкості  $V_0 = 0$  отримуємо статичний прогин, якщо розглянути значення швидкості вантажу  $V_0 > 0$ , то отримуємо динамічний прогин. Відношення динамічного прогину задачі до статичного дозволяє отримати значення коефіцієнта динамічності

$$\delta_d = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_0 V^2}{2 \sqrt{\beta_1 E n l}}}} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{m_0 V^2}{2 \sqrt{\frac{E n E I}{2} \sqrt{\frac{E}{4 E n}}}}}}. \quad (82)$$

При цьому статична напруга в області під штампом може бути визначена виходячи з [7]. Запропонована Л. А. Галиним формула дозволяє визначити нормальний тиск  $P(x)$  та дотичну напругу на площину контакту між штампом та напівпростором

$$P(x) = -P \frac{\sin \pi \Theta}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(x-\bar{a})(\bar{c}-x)}} \left( \frac{x-\bar{a}}{\bar{c}-x} \right)^{\frac{1}{2}-\Theta}, \quad (83)$$

де  $\bar{a}$ ,  $\bar{c}$  – довжини ділянок контакту штампу ( $\bar{a} > \bar{c}$ ) за наявності вертикального тиску та сил тертя (через наявність тертя);  $\Theta$  – кут тертя

$$\Theta = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2(1-\bar{\mu})}{f_0(1-2\bar{\mu})},$$

$\bar{\mu}$  – коефіцієнт Пуассона;  $f_0$  – значення коефіцієнта тертя спокою.

Так як точка  $C$  на осі балки (напівплощини)  $\epsilon$ , в деякому сенсі, «податливою» опорою (рис. 3, 5), а також точкою застосування розтягуючого навантаження до плями контакту штампу зі смугою (причому пляма контакту  $\epsilon$  увігнутою поверхнею), її деформацію за завищеною оцінкою можна визначити з рішення задачі В. Л. Бідермана про згинальну хвилю, що біжить, по балці на пружній підставі [13].

Наслідуючи результати цієї роботи, можна зробити логічний висновок про те, що характер взаємодії геометричних і деформаційних мікронерівностей на смузі і штампі також пов'язаний зі швидкістю руху штампу по смузі і  $\epsilon$  ударним, при цьому частина кінетичної енергії штампу, що рухається, йде на трансформацію її в потенційну енергію взаємодіючих мікронерівностей, частина кінетичної енергії йде на пластичне відтіснення непружних елементів мікронерівностей, частина – на теплоутворення і саморозігрів контактуючої пари, а частина кінетичної енергії, що залишилася, йде на збільшення швидкості і прискорення рухомого штампу. Тому процеси із тертям можна називати частково «потенційними». При цьому частина кінетичної енергії, що йде на збільшення потенційної енергії деформації, безупинно витрачається на виникнення і взаємодію ударних і звукових хвиль.

Тобто, навіть при рівномірному русі штампу зі швидкістю  $V_0$  має місце ударна взаємодія між мікронерівностями, інакше кажучи проявляється фізичні особливості, крім деформаційно-хвильової взаємодії при терті та зношуванні, ще має місце проявлення ударно-хвильової гіпотези при терті та зношуванні, які були сформульовані в працях професором О. І. Бажалом для випадку взаємодії ударних механізмів бурильних машин.

Виконані дослідження з визначення параметрів хвилеутворення на поверхнях, що контактують, при деформаційно-хвильовому підході до процесів тертя і зношування дозволили встановити, що в області під штампом і перед ним

виникає деформаційна ділянка (увігнуто-стислу ділянку). При цьому в зоні деформованої хвилеподібної поверхні напівпростору утворюється додаткові мікронерівності (на довжині  $l_2$  ділянки перед штампом), які дорівнюють, а іноді і перевершують геометричні мікронерівності.

Ці деформаційні мікронерівності збільшуються при зростанні швидкості переміщення штапу, а також зростають згинальні та дотичні напруги.

Отже, зазначені величини є динамічними, врахувати характер яких та їх величини можливо за допомогою коефіцієнта динамічності при виконанні розрахунків поверхневих шарів деталей на втомну міцність (80).

### **Висновки:**

1. У роботі встановлено, що при будь-якому характері взаємодії рухомих деталей настає стан проходження перед штампом хвилі, що рухається, яка призводить до руйнування деформаційних і геометричних мікронерівностей в залежності від співвідношення діючих вертикального і дотичного навантажень для певної кількості циклів навантаження мікронерівностей контактуючих деталей.

2. Виявлено розрахункові випадки руйнування поверхневих шарів взаємодіючих деталей під впливом дотичних та нормальних зусиль ( $T_c$ ,  $P$ ). Для забезпечення тривалої експлуатації цих деталей дотичні зусилля  $T_c$  не повинні перевищувати критичну силу  $T_{кр}^*$  для поверхневих шарів напівпростору. При цьому порушення цілісності поверхневих шарів настає тільки в результаті їх руйнування через втому. В даному випадку еквівалентна нормальна напруга  $\sigma_e$  не повинна перевищувати межі витривалості матеріалу  $\sigma_{-1}$ , а також кількість циклів навантаження повинна бути значною, близько  $10^8$  циклів і більше.

3. Визначено розрахунковий випадок, коли діючі зусилля такі, що  $T_c \geq T_{кр}^*$ , і тонкий поверхневий шар перед штампом втрачає поздовжню стійкість, в результаті чого отримує залишкові непружні деформації. При подальшому проходженні штапу по деформаційних виступах їх вершини можуть бути частково або повністю зрізані. У разі такого характеру взаємодії деталі пари отримують інтенсивне зношування та подальше втомне руйнування для значно меншого числа циклів навантаження елементів пари.

4. Встановлено розрахунковий випадок, коли діюче дотичне зусилля і поздовжні деформації від  $T_c$  будуть значно менш відчутні, ніж поперечні прогини балки під дією ваги штапу  $P$ . Ці деформації мають вигляд хвилі, що біжить по балці на пружній підставі і носять циклічний характер. При досягненні взаємодіючими деталями базового числа циклів ( $10^8$ ) і більше настає руйнування втомні поверхневих шарів (деталей). Такий вид втомного руйнування деталей можливий з наступом більшої кількості циклів навантаження ніж при  $T_c \ll T_{кр}^*$ .

5. У роботі показано, що зі збільшенням швидкості взаємодії деталей суттєво зростають еквівалентні напруження, які можуть бути уточнені з використанням коефіцієнта динамічності.

Крім того, в роботі показано, що запропонована методика може бути рекомендована до застосування як при описі тертя ковзання, так і тертя кочення.

### **Список літератури**

1. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. М., «Машиностроение», 1977, 526 с.

2. Трение изнашивание и смазка. Справочник в 2 книгах. Под ред. И.В. Крагельского и В.В. Алисина – М., «Машиностроение». Кн. 1, 1978, 400 с. Кн. 2, 1978, 358 с.
3. Андреев А.В. Расчет деталей машин при сложном напряженном состоянии – М., «Машиностроение», 1981, 216 с.
4. Биргер И.А., Шорр Б.Ф., Иосилевич Г.Б. Расчет на прочность деталей машин. Справочник. Изд. 4 – М.: «Машиностроение», 1993, 646 с.
5. Учитель А.Д., Малиновский Ю.А., Панченко А.Н. Интенсификация процессов механического взаимодействия инструмента с заготовкой при выполнении высокоточных и энергоемких технологических операций методами давления и резания. *Металлургическая и горнорудная промышленность* № 5-6, Дніпро, 2019, с. 1 – 28.
6. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М., «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1983, - 488 с.
7. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М., «Наука», 1980.
8. Исаев И.П., Лужнов Ю.М. Проблемы сцепления колес локомотива с рельсами. М., «Машиностроение», 1983, с. 240.
9. Смирнов В.В., Яковлев Р.А. Механика приводов прокатных станов. М., «Металлургия», 1977, с. 276.
10. Вибрации в технике. Справочник в 6-ти томах. Том 2. Под редакцией В.В. Болотина. М., «Машиностроение», 1978, с. 352.
11. Эрлих Л.Б., Кособудский В.А., Вершин Л.И. Волнообразование на обкатываемых поверхностях. М., «Наука», 1973. с. 51.
12. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. М. – Л. «Госэнергоиздат», 1962, с. 457.
13. Малиновский Ю.А., Данилина Г.В., Даценко С.Ю. и др. Квазистатические особенности постановки деформационно-волновых задач при трении и изнашивании. *Металлургическая и горнорудная промышленность*, № 3, 2018. с. 66-71.
14. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. 3 изд. – М., «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 384 с.

Стаття надійшла до редакції 27.07.2022.

*Yu. A. MALINOVSKIY, S. L. TSVIRKUN, R. V. MINENKO, D. P. VLASENKOV,  
D. M. DVORETSKY, D. P. RYBAK, S. S. TERESHINA, S. Yu. OLIINYK*

### **DEFORMATION-WAVE ASPECT OF FATIGUE FAULT OF SURFACE LAYERS OF PARTS UNDER FRICTION AND WEAR**

Modern requirements for the reliability and durability of operated and designed machines require the improvement of methods for calculating friction and wear for them. To assess the friction conditions and wear resistance of parts, geometric, molecular, deformation and combined theories are mainly considered. However, during the interaction of parts, deformation processes often take place, which manifest themselves in the form of corrugated surfaces with curves close to sinusoids in cross sections. The amplitudes of the resulting sinusoids can be considered as formed deformation microroughnesses, and the sizes of these microroughnesses can be comparable with geometric microroughnesses, and sometimes they can exceed them. Such additional (unaccounted for) roughness should be studied when performing calculations for friction and wear. However, no such theory has been developed so far. Therefore, we set the task to create the prerequisites for the development of the theory of friction and wear, taking into account the deformation-wave processes when a flat stamp or a rolling roller moves along a half-plane. To formulate the problem, the deformation processes occurring in the thin surface layers of the stamp and workpiece are considered. With such a formulation of the problem, a thin surface layer of a half-space either loses its stability and receives wave-like deformations, or the surface layer is under the influence of cyclic loading. In both cases, wear and chipping of the contacting surfaces occurs. In general, taking into account the indicated features of the friction and wear processes, the area of all protrusions on each of the contacting bodies can change significantly, and the height of the largest microroughnesses can also change. For the correct calculation of the degree of wear of the surfaces under consideration, it is necessary to correct the data on the area of the protrusions of the contacting bodies, and the height of the largest microroughnesses. The paper also provides for the possibility of taking into account the increase in the equivalent voltage  $\sigma_e$ , due to the increase in the speed of mutual sliding of parts  $V$ , by introducing the dynamic coefficient  $\delta_d$  into the calculations.

**Key words:** friction, wear, microroughness, hardened layer, punch, half-space, tangential force, normal pressure, critical force.

#### **Referenses**

1. Kragelsky I.V., Dobychin M.N., Kombatov V.S. Fundamentals of calculations for friction and wear. M., "Engineering", 1977, 526 p.
2. Friction wear and lubrication. Handbook in 2 books. Ed. I.V. Kragelsky and V.V. Alisina - M., "Engineering". Book. 1, 1978, 400 pp. Book. 2, 1978, 358 p.
3. Andreev A.V. Calculation of machine parts in a complex stress state - M., "Mashinostroenie", 1981, 216 p.
4. Birger I.A., Shorr B.F., Iosilevich G.B. Calculation of the strength of machine parts. Directory. Ed. 4 - M.: "Engineering", 1993, 646 p.
5. Teacher A.D., Malinovsky Yu.A., Panchenko A.N. Intensification of the processes of mechanical interaction of the tool with the workpiece when performing high-precision and energy-intensive technological operations by pressure and cutting methods. Metallurgical and mining industry No. 5-6, Dnipro, 2019, p. 1 - 28.
6. Aleksandrov V.M., Mkhitarjan S.M. Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers. M., "Science". Main edition of physical and mathematical literature, 1983, - 488 p.
7. Galin L.A. Contact problems of the theory of elasticity and viscoelasticity. M., "Science", 1980.
8. Isaev I.P., Luzhnov Yu.M. Problems of adhesion of locomotive wheels with rails. M., "Engineering", 1983, p. 240.
9. Smirnov V.V., Yakovlev R.A. Mechanics of drives of rolling mills. M., Metallurgy, 1977, p. 276.

10. Vibrations in technology. Handbook in 6 volumes. Volume 2. Edited by V.V. Bolotina. M., "Engineering", 1978, p. 352.

11. Erlikh L.B., Kosobudsky V.A., Vershin L.I. Wave formation on rolling surfaces. M., "Nauka", 1973. p. 51.

12. Cunningham V. Introduction to the theory of nonlinear systems. M. - L. "Gosenergoizdat", 1962, p. 457.

13. Malinovsky Yu.A., Danilina G.V., Datsenko S.Yu. and other Quasi-static features of the formulation of deformation-wave problems during friction and wear. Metallurgical and mining industry, No. 3, 2018. p. 66-71.

14. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. Stability and vibrations of elastic systems. 3rd ed. - M., "Nauka" Main edition of physical and mathematical literature, 1979, 384 p.

**Маліновський Юрій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 098 130 73 24, E-mail: malinovsky129@gmail.com.

**Цвіркун Сергій Леонідович** – кандидат технічних наук, старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 067 296 69 99, E-mail: tserg300@gmail.com.

**Міненко Роман Вадимович** – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 068 443 36 66, E-mail: romeo.minenko@gmail.com.

**Власенков Дмитро Петрович** – старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 067 296 71 75, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com.

**Дворецький Дмитро Миколайович** – старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, тел.: +38 096 522 54 28, E-mail: dvoreckiy@g-suit.kk.nau.edu.ua.

**Рибак Д. П.** – старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна.

**Терешина С. С.** – старший викладач, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна.

**Олійник Світлана Юрївна** – старший викладач, Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, тел.: +38 067 981 52 35, E-mail: olynik.syu@knu.edu.ua.