

УДК 621.891+539.375.6

DOI: 10.18372/0370-2197.2(99).17625

Ю. О. МАЛІНОВСЬКИЙ<sup>1</sup>, С. Л. ЦВІРКУН<sup>1</sup>, Д. П. ВЛАСЕНКОВ<sup>1</sup>, С. Ю. ОЛІЙНИК<sup>2</sup><sup>1</sup>*Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», Кривий Ріг, Україна*<sup>2</sup>*Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна*

## ТЕРМОМЕХАНІЧНІ ЯВИЩА У ПОВЕРХНЕВИХ ШАРАХ КОНТАКТУЮЧИХ ДЕТАЛЕЙ ПРИ ТЕРТІ ТА ЗНОШУВАННІ

Незважаючи на значну кількість теорій тертя і зношування питання хвилеутворення на поверхнях, що контактують, і в зоні, що випереджає рухому деталь, поки ще не отримали досить глибокого обґрунтування. На основі теоретичних і експериментальних даних, що накопичилися, для оцінки умов тертя і ступеня зношування контактуючих деталей загальноприйнято розглядати групи теорій: 1) геометричні, 2) молекулярні (адгезійні), 3) деформаційні, 4) комбіновані [1]. Найбільшого поширення набула думка, коли тертя обумовлено пластичним відтисненням матеріалу і руйнуванням містків зварювання (Ф. Р. Боуден і Д. Тейбор), яка також підтверджується гіпотезою Ернста і Маргента, де тертя обумовлено адгезією (на молекулярному рівні і шорсткістю поверхні). У той самий час експериментальні результати Ф. Р. Боудена і Д. Тейбора свідчать, що ефект тертя залежить як від сил адгезії, так і від деформації матеріалу в тонкому поверхневому шарі. В результаті застосування значних стискаючих зусиль і дотичних сил тертя, на контакті двох тіл виділяється велика кількість енергії і при слабкому теплообміні з навколишнім середовищем виникають високі градієнти зміни температур, і у разі металевих деталей за певних умов можливий прояв ефекту зварювання як окремих мікронерівностей, так і контактуючих поверхонь загалом, що підтверджується результатами досліджень [2].

**Ключові слова:** тертя, знос, шорсткість, поверхневий шар, штамп, хвилеутворення, плоский переріз, депланація плоских перерізів, адгезія, пружний контакт, пластичний контакт, ударний імпульс, пружна хвиля, дотичне зусилля, нормальний тиск, критична сила, стиснутий зсув, мостики зварювання, рівняння теплопровідності, граничні умови, початкові умови.

В даний час відомі ряд теорій для розрахунків на тертя і зношування, які базуються на геометричних, молекулярних, деформаційних і комбінованих поглядах на природу процесів тертя та зношування кінематичних пар, що сполучаються. Ці теорії розглядають процеси, що відбуваються (в основному) у зоні контактної взаємодії елементів кінематичних пар. При цьому в процесі тертя і зношування ряд ефектів фізичного і деформаційного плану відбувається попереду деталі, що рухається.

Існує ряд робіт теоретичного напрямку, в яких взаємодіючі напівпростори знаходяться під впливом як вертикальних, так і дотичних навантажень. Автори цих робіт, що належать до теорії пружності вважають, що крім закону Гука в описах деформативного стану напівпросторів, ще необхідно виконання гіпотези плоских перерізів. Однак, як показують результати експериментів з прокочування роликів по смузі, взаємного обкочування роликів і зубчастих коліс, поверхні правильної форми (плоскі, циліндричні та інші) отримують хвилеподібні деформації попереду деталі, що переміщається. Таким чином, при розгляді процесу тертя протяжної деталі немає підстав дотримуватися гіпотези плоских

перерізів, так перерізи плоскі до деформації (при деформуванні дотичними зусиллями) стають хвилеподібними після деформації.

Отже, поверхневі шари напівпросторів не можуть вільно переміщатися вздовж площини зсуву деталей і зустрічають на шляху свого можливого переміщення горизонтальні зв'язки у вигляді дотичних зусиль, які перешкоджають вільному зсуву елементів деформованих шарів. Тому такі шари мають можливість вільно згинатися під дією дотичних зусиль (маємо поздовжній згин). При такому механізмі взаємодії деталей їх поверхневі шари або втрачають поздовжню стійкість, або знаходяться під впливом циклічних деформацій, які зникають після зняття навантаження.

Крім того, якщо при взаємодії деталей у верхніх шарах виникають пластичні деформації, то в підповерхневих шарах деталей все одно виникають циклічні навантаження. Тому в обох деталях виникає циклічний деформаційно-хвильовий процес, і безперервний перехідний процес поширення пружних хвиль.

Зазначимо, що зі збільшенням швидкості відносного зміщення деталей  $V$  збільшується потужність тертя і зношування поверхонь, що взаємодіють, пропорційно певному коефіцієнту динамічності  $k_d$ .

Проведені дослідження дозволили встановити, що деформаційно-хвильові процеси, що відбуваються попереду рухомого штампу, призводять до утворення сформованих пластичних або пружних гребенів, які є перешкодами для рухомого штампу і ці перешкоди в диференціальних рівняннях представлені у вигляді імпульсних навантажень, прикладених до деформаційних мікронерівностей, які викликають руйнування останніх.

Отримані результати свідчать про те, що при взаємодії деталей, що рухаються, проявляються елементи як деформаційно-хвильової, так і ударно-хвильової теорії тертя і зношування.

Зазначений підхід дозволяє уточнити методи розрахунків на тертя та зношування, як для деформаційних, так і геометричних мікронерівностей.

Для пояснення триботехнічних ефектів та виконання розрахунків на тертя та зношування набули поширення такі основні групи теорій: геометричні, молекулярні, деформаційні та комбіновані. Зазначені теорії при постановці головних завдань не враховують особливостей перебігу деформаційних та ударно-хвильових явищ на смузі в зоні попереду рухомої деталі. Ці явища попереду рухомої деталі викликають рухливу деформаційну хвилю, обумовлену зсувними деформаціями в поверхневих шарах взаємодіючих деталей [3]. Зсувні поверхневі шари (зміцнені або з нанесеними покриттями) фактично не мають можливості вільно переміщатися вздовж площини зсуву, при цьому проявляється деформація стиснутого зсуву, який супроводжується депланацією плоских перерізів зовнішніх і підповерхневих (деформованих) шарів.

Розглянемо модифікований шар металу, який досягається за рахунок поверхневого зміцнення зовнішнього шару, або поверхневого напилення високоміцним матеріалом, нанесення захисного шару гальванічним покриттям, або просто поверхневим загартуванням деталі, з'єднання різнорідних шарів металів здійснюється за рахунок дифузійного молекулярного проникнення. Між зміцненими і глибинними шарами (з номінальними характеристиками) є граничний шар, який може мати частково властивості зовнішніх і внутрішніх шарів. Зазначимо, що з додатку до межі розділу двох середовищ (розподілених дотичними зусиллями), з різними пружними властивостями, ці шари будуть по-

різному деформуватися під впливом розподілених дотичних зусиль, прикладених до граничного шару. Тому між поверхневим шаром (зміцненим) та підповерхневим (незміцненим) виникає ефект мікрозсувів, а отже і ефект мікропрослизання.

У тих взаємодіючих елементах деталі, яка зібрана шляхом нанесення покриттів (напилення, наплавлення, поверхнєве зміцнення, нерухома посадка та ін.), виникають як сили тертя (під впливом ваги або вертикальних навантажень), а також сили пружної взаємодії на межі розділу двох середовищ [4].

Якщо в зоні під штампом виникають ділянки зі змінною силою тертя, як функцією швидкості прослизання, наприклад при сухому терті у разі тертя ковзання або ділянок з прослизанням для тертя кочення, то можливе виникнення автоколивань на ділянці під штампом. Ці коливання накладаються на дотичне зусилля, яке передається на деформаційну хвилю, що утворилася попереду рухомого штампу.

Розглянемо деякі особливості взаємодії між штампом, що рухається, і основою. Якщо під штампом автоколивання не виникають, то дотичне зусилля  $T_c$  буде носити постійний характер і воно відповідатиме критичному (дотичному) навантаженню, яке впливає на зону попереду штампу, викликаючи «поздовжній» вигин поверхневих шарів напівпростору. Причому довжина деформованої ділянки напівпростору попереду штампу (або смуги) наперед не відома. Тому для вирішення поставленої задачі необхідно визначити розміри майданчика контакту двох деталей (під штампом), обчислити критичне (дотичне) навантаження по заданому вертикальному тиску на штамп, визначити довжину деформованої ділянки напівплощини (напівпростору) та обчислити найбільше значення деформаційної мікронерівності [3].

З метою оцінки можливості виникнення втомного руйнування елементів напівпростору попереду штампу, що рухається, додатково до знайдених значень параметрів взаємодії штампу і напівпростору, необхідно також ввести розгляд характеристики тертя між зазначеними елементами як функцію швидкості їх взаємного прослизання.

Розглянемо процес контактної взаємодії під час руху жорсткого штампу (як плоскої так і криволінійної форми) по основі із зовнішнім поверхневим покриттям.

Змоделюємо механізм розвитку автоколивань на майданчику контакту. Для цього припустимо, що автоколивальний процес розвивається в тонкому поверхневому шарі напівпростору, який скріплений вертикальними пружними зв'язками з його підповерхневими шарами, але так як елементи майданчика контакту знаходяться під впливом змінного розтягуючого навантаження, то ці вертикальні зв'язки не поширюємо на контактну взаємодію, а розглядаємо тільки горизонтальні пружні зв'язки. При описі автоколивального процесу необхідно знайти постійну та змінну частини дотичного зусилля. Автоколивальний процес на майданчику контакту можна вважати безперервним. Так, якщо звернутися спочатку до завдання взаємодії плоского штампу зі смугою (або напівпростором) при фіксованому положенні майданчика на штампі, який контактує з балкою-смушкою, в межах майданчика взаємодії з урахуванням змінної характеристики тертя.

### **Механізм виникнення фрикційних автоколивань у зоні контакту штампу з балкою-смушкою**

Розглянемо процес виникнення фрикційних автоколивань в зоні взаємодії штампу (прямолінійної або циліндричної форми) з балкою-смушкою на пружній

основі, під впливом дотичного зусилля, що розтягує, викликаного силами тертя (рис. 1), ґрунтуючись на уявленнях про граничні умови. Тоді рівняння коливань балки-смужки з урахуванням сил тертя представимо у наступній формі [5].

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = EF \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \beta y. \quad (1)$$

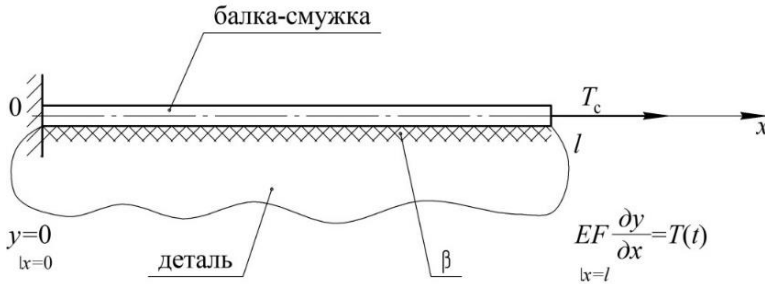


Рис. 1. До виникнення автоколивань на балці-смужці у зоні контакту двох деталей  $T_c$  – навантаження, що розтягує в зоні контакту (функція швидкості прослизання) – задається через граничні умови;  $\beta$  – коефіцієнт відсічі пружної основи за Вінклером;  $y = y(x, t)$  – поздовжнє переміщення балки-смужки.

Рівняння (1) це диференціальне рівняння у часткових похідних другого порядку.

Рішення рівняння здійснимо за допомогою методу Фур'є. Тоді функцію  $y(x, t)$  запишемо у вигляді

$$y(x, t) = Y(x) \cdot z(t), \quad (2)$$

де  $z(t) = A \cos(pt) + B \sin(pt)$  – гармонічна функція часу  $t$ ;

$A, B$  – довільні постійні, що визначаються з початкових умов завдання (якщо  $t = 0$ , то  $A = 0$ , оскільки  $z(0) = z_0 = 0$ ;  $z' = -pA \sin(pt) + pB \cos(pt) = V_0$ ,  $B = \frac{V_0}{p}$ ,  $z(t) = \frac{V_0}{p} \sin(pt)$ ;

$p$  – частота власних коливань системи.

Тоді, після підстановки (2) у рівняння (1) з урахуванням значення  $B = \frac{V_0}{p}$  отримаємо диференціальне рівняння з однією змінною « $x$ » та його рішення у вигляді

$$Y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{mp^2 - \beta}{EF}} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{mp^2 - \beta}{EF}} x\right). \quad (3)$$

Можна показати, що має місце співвідношення [4]

$$\frac{mp^2 - \beta}{EF} = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}. \quad (4)$$

Частоти коливань смуги (стрічки) на пружній основі (для різних форм) знаходимо із співвідношення

$$p_n = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot \frac{EF}{m} + \frac{\beta}{m}}, \text{ где } (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

або

$$p_n^2 = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cdot \frac{EF}{m} + \frac{\beta}{m}. \quad (6)$$

Тоді перепишемо (3) з урахуванням (5) у вигляді

$$Y(x) = C_1 \cos(p_n x) + C_2 \sin(p_n x). \quad (7)$$

Коефіцієнти  $C_1, C_2$  – довільні постійні (щодо « $x$ »), їх визначаємо з граничних умов завдання (відсутності переміщення на лівому кінці балки-смужки та зусилля, що дорівнює заданому на правому кінці)

$$Y|_{x=0} = 0$$

$$N|_{x=l} = EF \frac{\partial y}{\partial x} = T_c(x, t); Y'(l) \cdot z(t) = \frac{T_1 + T_2 \cos(p_0 t)}{EF} \quad (8)$$

або

$$Y'(l) = \frac{T_c(x, t)}{EF} = \frac{T_c(\dot{z})}{EF}$$

$$Y'(x) = -p_n C_1 \sin(p_n x) + p_n C_2 \cos(p_n x) \quad (9)$$

$$Y'(l) = p_n C_2 \cos(p_n l) = \frac{T_1 + T_2 \cos(p_0 t)}{EF} \quad (10)$$

тоді

$$C_2 = \frac{T_1 + T_2 \cos(p_0 t)}{EF p_n \cos(p_n l)}, \quad (11)$$

отже

$$y(x, t) = Y(x) \cdot z(t) = \frac{V_0}{p} \sin(pt) \cdot \frac{T_1 + T_2 \cos(p_0 t)}{EF p_n \cos(p_n l)} \cdot \sin(p_n x). \quad (12)$$

У наведеному виразі (12):

$V_0$  – початкова швидкість рухомого елемента контактуючої пари;

$Y(x)$  – рівняння « $n$ » форм коливань балки-смужки (стрічки);

$p_n$  – « $n$ » частота коливань стрічки, що відповідає кожній формі коливань;

$p_0$  – частота автоколивань балки-смужки – близька до частоти « $p$ »;

$l$  – довжина балки-смужки, інакше довжина майданчика контакту;

$T_1 + T_2 \cos(p_0 t)$  – параметричне навантаження, що поширюється на стислу ділянку «стрічки»  $l_2$  (навантаження у разі цієї частини задачі прийнято умовно.

При узагальненні задачі, згідно [6] можна вважати  $T_c = T_c(\dot{z})$ .

Наведений вираз для дотичного зусилля (параметричне навантаження), є наближеним, так як він був отриманий, коли балку-смужку представили у вигляді зосередженої маси « $m$ » на пружині з жорсткістю « $c$ », які мали ті ж самі характеристики, що і стрижень (маса, довжина, ширина, товщина, жорсткість, але без урахування пружного зв'язку з основою товстої пластини « $\beta$ » і т.д.). У роботі [6] нами були отримані вирази для  $T_c$ ,  $T_0$ ,  $T_1$ , які відрізняються від  $T_1$ ,  $T_2$  для випадку, що розглядається, тільки на величину коефіцієнтів при  $T_0$ ,  $T_1$ , так як для їх визначення були представлені спрощені розрахункові схеми. У цих схемах відсутня реакція пружної основи « $\beta$ » і поздовжня координата « $x$ » для точок «плями» контакту. Врахування цих параметрів суттєво ускладнить математичну постановку та вирішення цього завдання.

У роботі [6] нами отримані вирази  $T_c$ ,  $T_0$ ,  $T_1$  (для випадку кочення ролика по смузі), які відрізняються від випадку тонкої балки-смужки в зоні контакту (на пружній підставі) під впливом зусилля, що розтягує  $T_c$ , тільки на величину постійних множників.

У приведеннях розрахункових формулах [6] відсутня віддача пружної основи, згідно з гіпотезою Вінклера – Фусса –  $\beta$ , а також навантаження розрахункової моделі прийнято одновимірним (тобто зміщення майданчика контакту розглядається як одновимірний автоколивальний процес). Ці спрощення були прийняті лише при складанні граничних умов (силові умови), константа  $C_2$ .

Отримане рішення рівняння (1) у формі (12) є остаточним, якщо відомий вираз для дотичної сили  $T_c$ . Попередньо було прийнято, що дотична сила задана. Однак виникнення власних коливань під штапом є процесом, що самозбуджується, та виникає при нестационарному характері сил тертя. Тому для уточнення постановки задачі представимо дотичну силу як функцію швидкості прослизання  $\dot{z}(t)$  [6].

Тоді запишемо вираз сили тертя за аналогією з роботою [7]

$$T_c = \left[ f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\dot{z}}{\dot{z}_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left( \frac{\dot{z}}{\dot{z}_{кр}} \right)^3 \right] P. \quad (13)$$

Скоротивши вираз (12) на  $\sin(p_n x)$  (при  $x = l$ ) отримаємо

$$z(t) = \frac{V_0 P}{p} \sin(pt) \left[ f_0 - \frac{3\Delta f}{2\dot{z}_{кр}} \dot{z} + \frac{\Delta f}{2\dot{z}_{кр}^3} \dot{z}^3 \right], \quad (14)$$

де  $\Delta f = f_0 - f_{min}$  – приріст коефіцієнта тертя при автоколиваннях;

$f_0$  – коефіцієнт тертя спокою;

$f_{min}$  – коефіцієнт тертя ковзання, якщо  $\dot{z} = \dot{z}_{кр}(min)$ .

Введемо позначення

$$\frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{z}_{кр}} = \alpha_1; \quad \frac{\Delta f}{2\dot{z}_{кр}^3} = \alpha_2. \quad (15)$$

Тоді

$$z(t) = \frac{V_0}{p} P \sin(pt) [f_0 - \alpha_1 \dot{z} + \alpha_2 \dot{z}^3]. \quad (16)$$

Подане нелінійне диференціальне рівняння першого порядку виражено через шукану функцію  $z(t)$  в лівій його частині. У правій частині рівняння містяться похідні  $\dot{z}$  і  $(\dot{z})^3$ . Точне рішення цього рівняння нині у літературі невідомо. Тому на вирішення (16) застосуємо метод послідовних наближень. Як нульове наближення при вирішенні рівняння використовуємо вираз

$$z_0(t) = \frac{f_0 V_0}{p} P \sin(pt); \quad \dot{z}_0(t) = f_0 V_0 P \cos(pt). \quad (17)$$

Після підстановки формул (17) у рівняння (16) отримаємо вираз для першого наближення функції  $z_1(t)$

$$z_1(t) = \frac{f_0 V_0}{p} P \sin(pt) - \alpha_1 f_0^2 V_0^2 P^2 \sin(pt) \cos(pt) + \alpha_2 f_0^4 \frac{V_0^4}{p} P^4 \cos^3(pt) \sin(pt) \quad (18)$$

або

$$z_1(t) = \frac{f_0 V_0}{p} P \sin(pt) - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{z}_{кр}} f_0^2 V_0^2 P^2 \sin(pt) \cos(pt) + \frac{\Delta f}{2\dot{z}_{кр}^3} f_0^4 \frac{V_0^4}{p} P^4 \cos^3(pt) \sin(pt) \quad (19)$$

інакше

$$z_1(t) = \frac{f_0 V_0}{p} P \sin(pt) - \frac{3}{2 \cdot 2} \frac{\Delta f}{\dot{z}_{кр}} f_0^2 V_0^2 P^2 \sin(2pt) + \frac{\Delta f}{2 \cdot 2 \dot{z}_{кр}^3} f_0^4 \frac{V_0^4}{p} P^4 (1 - \sin^2(pt)) \sin(2pt) \quad (20)$$

Зазначимо, що у наближених розрахунках можна користуватися виразом (20) для визначення функції  $z(t) = z_1(t)$ .

Продиференціюємо (20), в результаті отримаємо

$$\dot{z}_1(t) = f_0 V_0 P \cos(pt) - \frac{3}{2} \frac{\Delta f}{\dot{z}_{кр}} f_0^2 V_0^2 P^2 p \cos(2pt) + \frac{\Delta f}{4\dot{z}_{кр}^3} f_0^4 \frac{V_0^4}{p} P^4 p \cos^2(pt) (\cos^2(pt) - 3\sin^2(pt)) \quad (21)$$

Тоді згідно (12) і (16), при підстановці у них похідної (21) отримуємо рішення задачі (1), в якому враховані початкові умови для (2), а також граничні умови (8). Побудоване, таким чином рішення, визначає автоколивальні процеси в межах майданчика контакту, при русі «штампу» з прослизанням (по балці-смузці), тобто коливання самозбуджуються залежно від виду характеристики тертя [6].

Наведемо значення коефіцієнтів  $T_1, T_2$  для параметричного навантаження, де були використані позначення  $T_1 = T_0, T_2 = T_1'$ .

При цьому, у розв'язанні задачі (1) для  $y = y(x, t)$  враховано вказівки щодо особливостей розрахункової схеми задачі.

Відповідно до [6] наведемо вирази для величин  $T_1, T_2$

$$T_1(T_0) = \frac{2\sqrt{k}\sqrt{Pr}}{\gamma k^2 l_1^2} f_0 + \frac{2\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{\gamma k^3 l_1^3} \quad (22)$$

$$T_2(T_1') = \frac{2bh}{kl_1} \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - \left(\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2}\right) e^{-\alpha\rho_0 t}}} \quad (23)$$

У наведених виразах (22), (23):

$\gamma$  – питома вага ділянки контакту деталей на ролику чи смузі;

$p_0^2 = \frac{2b}{kl_1^2\gamma}$  – власна частота коливань балки-смужки (уподібненій масі, що коливається, на пружині);

$c = \frac{2bh}{kl_1}$  – поздовжня жорсткість умовної балки-смужки (як маси на пружині – лінійний осцилятор);

$b, l_1, h$  – відповідно ширина, довжина та товщина балки-смужки (на контакті);

$f_0$  – найбільше значення коефіцієнта тертя між контактуючими деталями (коефіцієнт тертя спокою);

$f_{min}$  – найменше значення коефіцієнта тертя (коефіцієнт тертя руху), і має місце, якщо  $\xi = \xi_{кр}$ ;

$P$  – вертикальне навантаження на ролик;

$r$  – радіус ролика;

$\bar{k}$  – пружна константа матеріалу;

$k$  – коефіцієнт псевдоковзання в інтерпретації [8];

$\rho_0 = \frac{\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{k\gamma l_1 bh} f_0$  – початкове значення змінної амплітуди коливань (приймаємо рівним  $\rho_0 = q_0$ );

$\alpha = \frac{r}{2k\gamma^2 l_1 bh\nu} + \frac{\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{k\gamma l_1 bh} f'(\xi_{кр}); \quad \beta = -\frac{\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{k\gamma l_1 bh} \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}$  – навантажувальні коефіцієнти характеристики тертя  $f = f(\xi)$ .

Зауважимо, що ділянка контакту двох деталей під впливом вагового навантаження  $P$  та дотичної сили тертя  $fP$  та деяких значеннях параметрів характеристики тертя  $f_0, f_{min}(\xi_{кр})$ , коли  $\xi < \xi_{кр}$ , у певні проміжки часу, починає здійснювати автоколивання з частотою, близькою до однієї зі власних частот коливань балки-смужки ( $p^* \approx p_1$  згідно з формулою (8), де  $p_1$  – перша власна частота коливань балки-смужки).

При дії змінної сили, що розтягує  $T_c$  (і вертикального навантаження  $P$ ) коливання будуть поздовжніми (див. рис. 1).

У цьому випадку поперечні коливання також виявляться, але вони матимуть другий порядок малості. Крім того, поперечні деформаційні хвилі викладатимуться під дією вертикального навантаження  $P$ .

Для аналізу змінного характеру коефіцієнта тертя та сили тертя розглянемо формули коефіцієнтів тертя І. В. Крагельського та Г. Ернста – П. Марченца [1].

Відповідно до І. В. Крагельського маємо формулу:

$$f = \frac{\tau_0}{HB} + 0,4 \left( \frac{\bar{z}_{max}}{\bar{z}'} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{2P_c}{b'HB} \right)^{\frac{1}{2}v'} \quad (24)$$

де  $\tau_0$  – міцність молекулярного зв'язку (для вуглецевих сталей  $\tau_0 = 20 \text{ кг/мм}^2$ );  $HB$  – твердість по Брінеллю найбільш м'якого з контактуючих тіл (для матеріалу колеса  $HB = 90 \div 100 \text{ кг/мм}^2$ );  $\bar{z}_{max}$  – максимальна висота нерівності мікропрофілю контактуючих тіл;  $\bar{z}'$  – радіус кривизни вершини нерівності;  $P_c$  – контурний тиск на контурі контакту (зі зростанням навантаження площа контакту збільшується, тому контурний тиск падає);  $b'$ ,  $v'$  – трибологічні показники нерівності профілю ( $b' = 2$ , іноді  $b' = 1,4$ ;  $v' = 2 \div 2,1$ ).

У ряді випадків для обчислення  $f$  зручно користуватися формулою Г. Ернста та П. Марченца [1].

$$f = \frac{S^*}{HB} + tg\Theta, \quad (25)$$

де  $S^*$  – середній опір зрізу для всієї фактичної площі контакту;  $HB$  – твердість за Брінеллем матеріалу деталі;  $\Theta$  – середній кут, що складається фактичною площею контакту з напрямом сили тертя.

Якщо судити з виду залежності зміни коефіцієнта тертя  $f$  (за циклом коливань), то воно зумовлене змінами в деформаційній частині виразів (24), (25), тобто у другому доданку формул. Процес деформування мікронерівностей відбувається як у пружній, так і пластичній областях.

Якщо матеріал мікронерівностей при температурному схоплюванні їх вершин веде себе пружно, відбувається пружне вирівнювання мікронерівностей, які створюють короткі мікроімпульси і вони призводять до виникнення «вільних» коливаний майданчиків контакту на обох поверхнях.

Процеси взаємодії мікронерівностей відбуваються в результаті руху контактуючих деталей. Якщо при цьому більшість мікронерівностей на обох деталях, при їх деформуванні вигинаються так, що відбувається рівномірний (рівнобічний) їх залом, то коефіцієнт тертя зменшується, так як мікронерівності пружно накопичили потенційну енергію, який недостатньо для того, щоб відновити свою початкову (недеформовану) форму тому коефіцієнт тертя буде зменшуватися (а  $\xi$  збільшуватиметься). Якщо ж мікронерівності вигинаються так, що для частини мікронерівностей потенційної енергії буде достатньо, щоб відновити свою первісну (недеформовану) форму, то матиме місце часткове гальмування деталей і коефіцієнт тертя матиме тенденцію до деякого зростання (при цьому  $\xi$  зменшується). Тобто створюються передумови виникнення фрикційних автоколиваний на контактній парі, що взаємодіє.

У цих випадках ударна взаємодія мікронерівностей призводить до мікроімпульсів, що прикладаються до деталей, які є періодичним збуджувальним впливом, час прикладення цих імпульсів надзвичайно малий і вони сприяють виникненню в деталях коливаний що відбуваються з власною частотою системи. Так як деталі при взаємодії є шорсткими і при автоколюваннях виникають поперечні хвилі, гребені яких також беруть участь у деформаційному процесі. Взаємодія початкових шорсткостей і деформаційних мікронерівностей призводить до перетворення механічної енергії на теплову та розсіювання (дисипації) цієї енергії у навколишнє середовище.

У розрахунках щодо коефіцієнтів тертя крім формул І. В. Крагельського і Г. Ернста – П. Марченца може бути використана формула Е. Адировича і Д. Блохинцева [1, 9], де розглядається сухе тертя двох шорстких (пружних) тіл. При взаємодії виступів тіл, що труться, яка носить характер коротких ударних імпульсів, генеруються пружні хвилі, що поширюються всередині рухомих тіл [1]. Такий погляд спонукає розглядати поряд із поздовжніми та поперечними



хвилями ще й фрикційний коливальний процес, який є зовнішнім проявом хвилеутворення на обох поверхнях, що взаємодіють. Ці хвилі виявляються як деформаційні хвилі та розсіюються в зоні деформації. Розглянутий потік енергії, що розсіюється, частково йде на нагрівання взаємодіючих тіл.

Якщо контакт буде пластичним, то можуть виявлятися ефекти зрізання мікронерівностей з виділенням значної кількості тепла (за рахунок збільшення швидкості ковзання деталей  $\xi > \xi_{кр}$ ), але при цьому автоколивальні режими виникати не можуть, оскільки швидкість ковзання  $\xi > \xi_{кр}$  і деталі взаємодіють поза зоною «спадаючої» ділянки характеристики тертя, в такому разі можливе виникнення задирок на поверхнях. Однак при цьому відбувається подальший доробок поверхонь зі зростанням теплових і пластичних ефектів, а також зі зниженням амплітуд автоколивальних процесів (інтенсивність автоколивальних знижується).

У разі розгляду сухого тертя на поверхнях, що сполучаються, мають місце поверхневі ефекти, при цьому якщо деталі рухаються на значних переміщеннях від початкової точки відліку з високими швидкостями ковзання, то має місце нагрівання в поверхневих шарах деталей (тобто зовнішнє нагрівання). Якщо ж тертя відбувається на обмежених кільцевих або кругових елементах, то буде мати місце внутрішнє тертя двох циліндричних тіл з яскраво вираженими граничними (або крайовими ефектами). У таких режимах працюють дискові та колодкові гальма, а також циліндричні деталі при здійсненні технологічної операції – зварювання тертям.

Розглянутий підхід показав, що фрикційна взаємодія двох деталей, що сполучаються в ряді випадків (залежно від характеру взаємодії мікронерівностей, як геометричних, так і деформаційних) в області під штампом може носити як пружний, так і пластичний характер. Для того самого матеріалу вид контакту залежить від швидкості прослизання деталей (при побудові макромоделей фрикційної взаємодії, зокрема у разі виникнення фрикційних автоколивальних). У разі малих швидкостей прослизання, для деяких режимів контакт мікронерівностей поверхневих шарів деталей буде пружним. Тобто кожна мікронерівність сприймає ударні мікроімпульси. Тоді кожен одиничний мікроімпульс від взаємодії мікронерівностей, призведе до наведення в пружній системі балки-смушки коливальних, що відбуваються з однією зі власних частот коливальних цієї системи. Так як для порівнянних (порівнюваних) мікронерівностей матимуть місце наступні ударні імпульси, які проведуть до аналогічних ударних взаємодій і викличуть коливання балки-смушки з її власною частотою, при цьому амплітуди коливальних майданчиків контакту (балок-смужок) відрізнятимуться через різні імпульсні впливи на мікронерівності, іншими словами «вільними» коливаннями з змінними амплітудами, що не встановилися. Це означає, що теоретично на майданчиках контакту відбуватимуться квазігармонічні коливання. У даному випадку зона пружної взаємодії мікронерівностей буде здійснюватися в межах спадаючої гілки характеристики тертя, тобто кінетична енергія деталі, що рухається, частково буде перетікати в потенційну енергію пружних деформацій мікронерівностей, що створить ефект мікрогальмування. У міру накопичення потенційної енергії, коли її стане достатньо (тоді не вся енергія руху піде на розігрів поверхонь і на накопичення її у внутрішніх шарах матеріалу) для того, щоб пружно деформовані мікронерівності відновили свою форму і створили передумови виникнення коливального руху майданчика контакту за рахунок імпульсного характеру перетворення потенційної енергії на кінетичну.

При збільшенні швидкості прослизання деталей, що перевищує  $\xi_{\text{кр}}$  потенційної енергії деформованих мікронерівностей буде недостатньо для відновлення їх первісної форми і тому буде мати місце пластичний контакт, і отже автоколивальний процес не розвинеться. У цьому випадку відбудеться зрізання мікронерівностей (або їхнє зминання). Якщо деформаційні мікронерівності будуть меншими від середньої висоти геометричних мікронерівностей, то як впливає з даних [10], матиме місце подальше опрацювання поверхонь, що відбувається на мікрорівні. На макрорівні в цей час, може відбутися збільшення швидкості взаємного прослизання поверхонь, і зміна процесу тертя відбудеться по криволінійній гілці характеристики тертя, тут посиляться ефект прослизання поверхонь тертя, тому автоколивання будуть малоімовірними, а при подальшому зростанні швидкості ковзання стануть неможливими. Такі уявлення узгоджуються з бінарною характеристикою тертя за І. В. Крагельським, де коефіцієнт тертя представлений як прояв адгезійної складової (постійна частина), так і деформаційної складової характеристики тертя (змінна частина).

Поданий бінарний закон тертя допускає у характеристиці тертя наявності постійної частини та періодичної за аналогією з уявленням про параметричне навантаження у формі Мат'є – Хілла [6]. Отже, таке навантаження виникає в зоні контакту поверхонь, і передається на деформовану ділянку балки, попереду штампу, викликаючи параметричні коливання цієї ділянки балки-смужки попереду штампу, що рухається.

### **Динамічна задача виникнення параметричних коливань попереду рухомого штампу з використанням точного рішення при кусково-лінійному параметричному навантаженні.**

Для вирішення динамічних завдань про взаємодію рухомого штампу (плоскої або циліндричної форми), з урахуванням зовнішнього навантаження по відношенню до критичної сили Ейлера, а також з урахуванням жорсткості пружної основи (гіпотеза Вінклера – Фусса) та різних власних форм коливань балки-смужки, попередньо розглянемо задачу про параметричні коливання балки-смужки під впливом параметричного навантаження  $T$  у загальному випадку у формі Мат'є – Хілла. Особливістю застосування цього навантаження є те, що воно діє протягом дуже короткого проміжку часу контакту з (деформаційною) мікронерівністю. Рівняння коливань такої балки, згідно зі схемою (рис. 2), можна подати у вигляді [11], у формі диференціального рівняння у частинних похідних.

$$E_c I \frac{\partial^4 y}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta y + T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (26)$$

Оскільки згідно з рис. 2 балка-смужка має шарнірне опирання, то рішення (26) шукаємо у формі

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,5}^{\infty} z_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (27)$$

$y(x, t)$  – прогин балки-смужки.

У наведених виразах (26), (27) прийняті позначення:

$E_c$  – модуль пружності поверхневих шарів балки-смужки;

$I = \frac{bh^3}{r^2}$  – момент інерції поперечного перерізу балки-смужки;

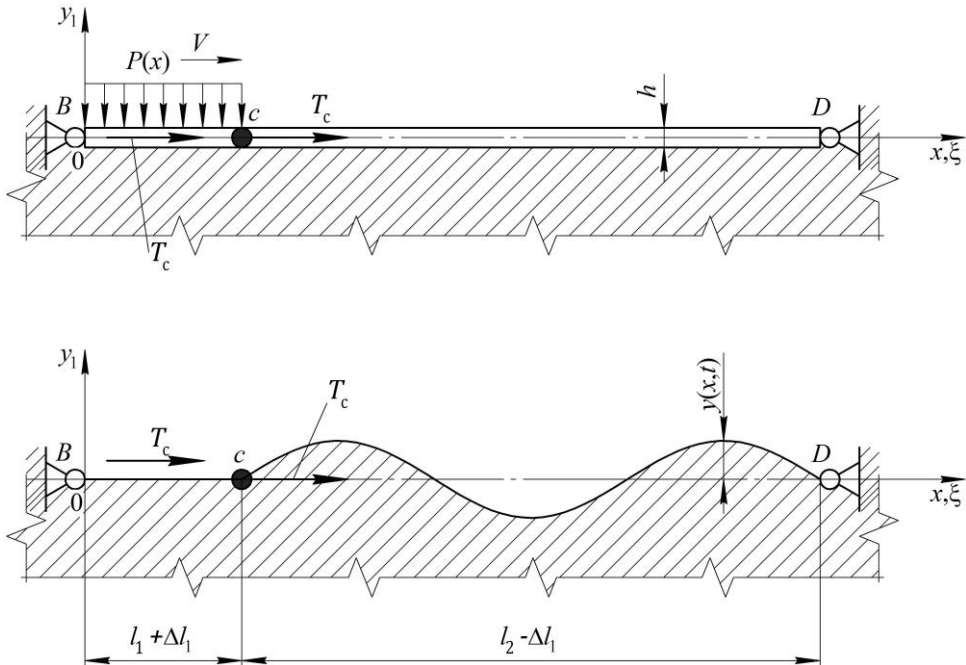


Рис. 2. Гіпотетична балка на пружній основі ( $0xу$ ;  $0\xiу$  – відповідно нерухома та рухлива система координат)  $V$  – швидкість переміщення штампу;  $P(x)$  – розподілене навантаження від штампу;  $y$  – амплітудне значення деформаційної мікронерівності;  $h$  – товщина балки;  $l_1, l_2$  – довжина ділянок балки;  $\Delta l_1$  – приріст довжини ділянки балки.

$m$  – погонна маса балки-смушки;

$\beta$  – коефіцієнт жорсткості пружної основи;

$z_k(t)$  – часова складова прогину балки-смушки;

$l = l_2$  – довжина балки-смушки.

В результаті підстановки (27) у (26) і виконання перетворень приходимо до рівняння

$$E_c I \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 z_k(t) + m \ddot{z}_k(t) + \beta z_k(t) - T \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 z_k(t) = 0, \quad (28)$$

Балка-смушка, згідно (28), знаходиться під впливом параметричного навантаження  $T$ . Рівнянню (28) відповідають два рівняння вільних коливань балки-смушки

При довільному вигляді функцій  $T = T(t)$ , наприклад як у Матсьє – Хілла, не існує точного рішення (28) [5]. Якщо розглядати  $T$  як зовнішнє навантаження на систему за методом Г. Дуффінга [4] буде не зовсім правильно, так як дане навантаження прикладено до мікронерівності у вигляді ударного імпульсу  $S = T t_1$  (на плечі рівному змінному прогину балки-смушки), тобто як навантаження шматочно-лінійне і вважати його зовнішнім буде недостатньо обгрунтовано, оскільки воно створює змінний згинальний момент (рис. 3).

Разом з тим, якщо вважати навантаження параметричним і шматочно-лінійним, як за Дж. Ден – Гартогом [3], [11] і розглядати два лінійних однорідних рівняння з різними наборами власних частот  $\omega_k^2, \omega_k^{*2}$ , то це не дає переконливих результатів без запровадження додаткових умов. Тому зупинимося на прийомі – «зшивання» двох рішень із умови рівності двох координат для прийнятого моменту часу.

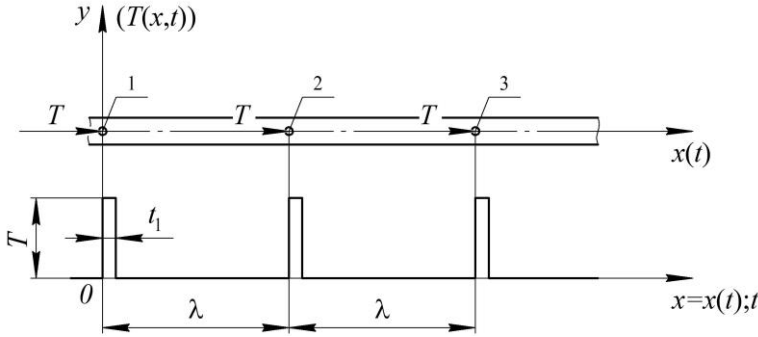


Рис. 3. Імпульсне прикладання навантаження до мікронерівностей (1, 2, 3, ..., k) балки смужки:  $T$  – амплітуда силового впливу;  $t_1$  – час дії одного імпульсу ( $t_1 \approx 0,1\theta$ );  $\lambda$  – довжина однієї напівхвилі деформації балки-смужки;  $\theta$  – період ударної дії ( $\theta = \frac{\lambda}{V}$ );  $V$  – швидкість переміщення рухомої деталі;  $S = T \cdot t_1$  – імпульс ударної взаємодії мікронерівностей

Балка-смужка згідно (28) знаходиться під впливом параметричного навантаження  $T$ . Рівнянню (28) відповідають два рівняння вільних коливань балки-смужки.

Значимо, що при довільному вигляді функції  $T = T(t)$  (або у вигляді  $T = T_0 + T_1 \cos(p_0 t)$ , де  $T_0$  – адгезійна складова характеристика тертя;  $T_1$  – деформаційна складова характеристика тертя;  $p_0$  – частота автоколивань, величина близька до першої власної частоти).

Розглядати  $T$  як зовнішнє навантаження буде некоректно, оскільки система (28) див. рис. 2, збуджується параметрично через зміну її жорсткості. Тому врахуємо той факт, що навантаження кожної мікронерівності здійснюється у вигляді ударного імпульсу  $S = T t_1$  (рис. 3), тобто навантаження є шматковолінійним. Шукане рішення можна знайти у разі, як спільне рішення двох лінійних однорідних рівнянь. Вони відрізняються наявністю у другому рівнянні імпульсного навантаження  $T$ , та його відсутністю у першому рівнянні.

Так як зазначене навантаження прикладається до смуги практично миттєво, то ми виходимо з уявлення про те, що переміщення балки в момент часу ( $t = 0$ ;  $t = \theta$ ;  $t = 2\theta$ ; ..., при зміні  $t$  на нескінченно малу величину  $\varepsilon$ ) не встигає змінитися, тому розглянемо розв'язування рівнянь

$$\ddot{z}_k + \omega_k^2 z_k = 0, \quad (29)$$

$$\ddot{z}_k^* + \omega_k^{*2} z_k^* = 0, \quad (30)$$

де:  $\omega_k^2 = \frac{EcI}{m} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 + \frac{\beta}{m}$  – власна частота коливань незавантаженої балки-смужки;  
 $\omega_k^{*2} = \frac{EcI}{m} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 + \frac{\beta}{m} - \frac{T}{m} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$  – власна частота коливань балки-смужки з урахуванням параметричного (імпульсного) навантаження  $T$ .

Рівняння (29), (30) допускають рішення:

$$z_k(t) = z_{k0} \cos(\omega_k t) + \frac{\dot{z}_{k0}}{\omega_k} \sin(\omega_k t) = z_{k0} \cos(\omega_k t) + \frac{V_0}{\omega_k} \sin(\omega_k t), \quad (31)$$

$$z_k^*(t) = z_{k0}^* \cos(\omega_k^* t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* t), \quad (32)$$

де  $\Delta V$  – величина зменшення швидкості штапу при зіткненні мікронерівностей.

Запишемо вирази для зміни швидкості функцій  $z_k(t)$ ,  $z_k^*(t)$

$$\dot{z}_k(t) = -\omega_k z_{k0} \sin(\omega_k t) + V_0 \cos(\omega_k t), \quad (33)$$

$$\dot{z}_k^*(t) = -\omega_k^* z_{k0}^* \sin(\omega_k^* t) + (V_0 - \Delta V) \cos(\omega_k^* t). \quad (34)$$

Вираз (34) записано для тих моментів впливу мікронерівності штампу з мікронерівностями смуги, коли  $t = \theta, 2\theta, 3\theta, \dots$ , тобто в момент настання нового періоду ударної взаємодії (рис. 3).

Запишемо вирази (31), (32), (33), (34) для випадку  $t = \theta$

$$z_k(\theta) = z_{k0} \cos(\omega_k \theta) + \frac{V_0}{\omega_k} \sin(\omega_k \theta), \quad (35)$$

$$\dot{z}_k(\theta) = -\omega_k z_{k0} \sin(\omega_k \theta) + V_0 \cos(\omega_k \theta), \quad (36)$$

$$z_k^*(\theta) = z_{k0}^* \cos(\omega_k^* \theta) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* \theta), \quad (37)$$

$$\dot{z}_k^*(\theta) = -\omega_k^* z_{k0}^* \sin(\omega_k^* \theta) + (V_0 - \Delta V) \cos(\omega_k^* \theta). \quad (38)$$

Далі врахуємо, що в момент параметричного впливу імпульсного зусилля  $T$  на мікронерівність координати  $z_k(\theta)$  та  $z_k^*(\theta)$  не встигнуть змінитися при зміні часу  $t$  на нескінченно малу величину  $\varepsilon$ , тоді рівність  $z_k(\theta) = z_k^*(\theta)$  набуде вигляду

$$z_{k0} \cos(\omega_k \theta) + \frac{V_0}{\omega_k} \sin(\omega_k \theta) = z_{k0}^* \cos(\omega_k^* \theta) + \frac{V_0}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* \theta) - \frac{\Delta V}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* \theta), \quad (39)$$

Враховуючи  $z_{k0}^* = z_{k0}$ , отримаємо:

$$\Delta V = \frac{\left[ z_{k0} (\cos(\omega_k \theta) - \cos(\omega_k^* \theta)) + V_0 \left( \frac{\sin(\omega_k \theta)}{\omega_k} - \frac{\sin(\omega_k^* \theta)}{\omega_k^*} \right) \right] \omega_k^*}{\sin(\omega_k^* \theta)}, \quad (40)$$

інакше запишемо через частотні параметри

$$\Delta V = \frac{\left[ z_{k0} (\cos(\omega_k \theta) - \cos(\omega_k^* \theta)) + V_0 \left( \frac{\sin(\omega_k \theta)}{\omega_k} - \frac{\sin(\omega_k^* \theta)}{\omega_k^*} \right) \right]}{\sin(\omega_k^* \theta)} \cdot \sqrt{\frac{E_c l}{m} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \frac{\beta}{m} - \frac{T}{m} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2}. \quad (41)$$

Коли  $t = 0, \theta, 2\theta, 3\theta, \dots$ , то мікронерівність отримує ударний імпульс  $S = T t_1$ , де  $T$  – імпульсне ударне зусилля, що діє в момент застосування сили за дуже короткий проміжок часу  $t_1 \approx \varepsilon$  – нескінченно мала величина. Величини  $T$ ,  $t_1$  – відповідно нескінченно велика та нескінченно мала величини, а  $S$  – імпульс сили величина кінцева.

Зауважимо, що в момент зіткнення мікронерівностей мають місце умови

$$z_k(0) = z_k(\theta) = z_{k0} \text{ і } \dot{z}_k(0) = \dot{z}_k(\theta) = V_0 - \Delta V. \quad (42)$$

Початкові умови для (26) та (28) приймемо у формі (42).

Тоді рішення (31) з урахуванням початкових умов (42) набуде вигляду:

$$z_k(t) = z_{k0} \cos(\omega_k t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k} \sin(\omega_k t) \quad (43)$$

Таким чином, вираз (43), будучи підставленим у (27), описує рішення рівняння (26) як незгасаючі коливання, котрі збуджуються параметрично за рахунок зміни жорсткості системи від  $\omega_k^2 \cdot m$  до  $\omega_k^{*2} \cdot m$ .

Зазначимо, що у виразі (43) час розглядається в межах одного (першого) періоду між зіткненнями  $0 \leq t \leq \theta$ . Для другого імпульсу час змінюється в межах  $\theta \leq t \leq 2\theta$ , для третього –  $2\theta \leq t \leq 3\theta, \dots$ , рис. 3).

У цьому рішенні (43) вплив зовнішнього навантаження проявляється параметрично лише через початкові умови (42).

В кінцевому рахунку, побудовані рішення диференціального рівняння (28), які описують параметричні коливання балки-смужки при жорсткості пружної системи, що змінюється, зведеної до двох лінійних однорідних рівнянь, вирішених спільно (через початкові умови), шляхом «зшивання» (рішень). Нелінійність (28) задається за рахунок неоднорідних початкових умов диференціального рівняння. У наведеному виразі (42)  $z_{k0}$ ,  $V_0$  – початкове

зміщення та швидкість (початкові умови), які визначаються за вихідними даними завдання, так  $z_0$  – початкове зміщення, це величина від якої мало залежить процес зіткнення мікронерівностей, а  $V_0$  – величина обумовлена механікою взаємодії кінематичної пари.

Як випливає з формули (40), величина  $\Delta V$  залежить як від величини імпульсу сили  $S$ , так і від властивостей балки-смужки (а також її пружної основи:  $E_c$ ,  $\beta$ ).

Для порівняння, у джерелі [4] вплив силового імпульсу  $S$  є зовнішнім та не пов'язаний з фізичними властивостями балки-смужки.

**Фізичні передумови втрати поздовжньої стійкості балки-смужки при дії на неї дотичного навантаження** (інтенсивності сил пружності на межі розділу поверхневих і підповерхневих шарів деталей).

Параметричне навантаження (як показано в даній публікації), що прикладається до кожної деформаційної мікронерівності, складається з постійної і гармонійної складових.

Деформаційні мікронерівності однієї деталі, що розглядаються, при їх взаємодії з мікронерівностями іншої деталі, внаслідок їх незначної протяжності взаємодітимуть дуже короткі проміжки часу ( $t_1$ ), тому амплітудне значення  $T$  за час зіткнення мікронерівностей на обох деталях, можна вважати постійною величиною  $T = const$ , оскільки було прийнято у роботі М. А. Лаврентьєва [11], тому це завдання з термінології [4] є динамічним. Відмінність полягає в тому, що в задачі, що розглядається, умова  $T = const$  є імпульсним силовим впливом ( $S = Tt_1$  – імпульс сили,  $t_1$  – тривалість силового впливу – нескінченно малий проміжок часу). При цьому, авторами [4] на стрижень, що розглядається, були накладені обмеження поперечних переміщень, які знімаються після завершення за часом короткого перехідного процесу. Для нашого завдання таким обмеженням є наявність пружної основи, згідно з гіпотезою Вінклера – Фусса. Тобто пружна основа накладає еластичні зв'язки на поперечні переміщення балки-смужки. Обмеження на поперечні переміщення у нашому завданні знімається, коли сукупна поздовжня сила  $T = nT_e$  за певних значень коефіцієнта навантаження « $n$ » приведе балку-смужку до втрати її поздовжньої стійкості.

Крім того, як обмежувачі поперечних переміщень балки-смужки можна розглядати ділянки зчеплення та прослизання, які виникають між поверхневими та підповерхневими шарами балки-смужки, де розвиваються сили пружності та сили тертя (рис. 4). Причому ці сили опору (гальмування може бути досить великим, проте, як правило, не настільки, щоб зрушити весь шар) ( $T_c > T = nT_e$ ). Отже, зсув поверхневих шарів деталей зможе здійснитися тільки на частині їх поверхні примикання. Внаслідок подолання дотичних сил тертя та пружності можуть бути створені передумови втрати поздовжньої стійкості поверхневих шарів, що випереджають штамп (інакше – це додаткові умови обмеження згинальних деформацій).

При взаємному прослизанні шарів матеріалу деталі між ними виникають як сили пружності, так і сили тертя, тобто інтенсивність дотичних зв'язків між поверхневими та підповерхневими шарами визначаємо, виходячи з виразу

$$\tau = ql + cu(x), \quad (44)$$

де  $q = fPb$  – гранична сила тертя на одиницю довжини смуги;  $f$  – коефіцієнт тертя спокою між поверхневим та підповерхневим шарами деталі;  $b$  – ширина балки-смужки;  $l$  – довжина балки-смужки, де виникає відносне прослизання;  $P$  – вертикальне навантаження на штамп;  $c$  – коефіцієнт поздовжньої жорсткості системи;  $u = u(x)$  – переміщення (поздовжнє) довільного шару балки-смужки.

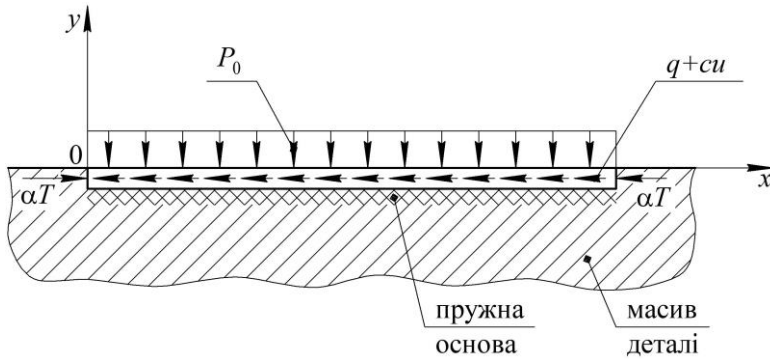


Рис. 4. Розподіл дотичних зв'язків по поверхні дотику зміцненого шару з пружною основою деталі:  $q$  – гранична сила тертя;  $ci$  – сила пружності по поверхні торкання;  $P_0$  – розподілений тиск;  $\alpha T$  – сумарне дотичне зусилля;  $\alpha$  – коефіцієнт ( $0 \leq \alpha \leq 1$ )

Якщо діюче стискаюче зусилля, прикладене до зміцненого шару балки-смушки  $T_c$  (за рахунок значного коефіцієнта навантаження « $n$ ») перевищить  $\tau$ ,  $T_c > \tau$ , то відбудеться місцевий поздовжній зсув шарів матеріалу деталі, тоді ця ділянка втрачає підпір у тангенціальному напрямку (щодо поверхневих і підповерхневих шарів матеріалу деталі), і балка-смушка може втратити поздовжню стійкість під впливом сил, менших  $T_c$ , іншими словами під впливом критичної сили  $T_e$  (без урахування пружних властивостей основи деталі згідно з гіпотезою Вінклера – Фусса (тобто  $T_e < T_c$ )). Тому для таких випадків навантаження поверхневих шарів під дією вертикального та дотичного навантаження. ( $P, fP$ ) оцінити напружено-деформований стан на підставі гіпотези плоских перерізів буде некоректно, оскільки поверхневі та підповерхневі шари набувають хвилеподібної форми, тобто має місце депланація плоских перерізів.

Якщо

$$T_c - \tau = T_c - ql + ci < 0, \quad (45)$$

це означає, що на тангенціальні переміщення шару накладено обмеження по деформаціям, отже верхні шари матеріалу щодо деформації «подовжній вигин» поведуться в межах пружності, отже при цьому виконується гіпотеза плоских перерізів.

Таким чином, умова (45) забезпечує зчеплення поверхневих та підповерхневих шарів деталі за рахунок сил тертя та пружності.

Якщо різниця

$$T_c - \tau = T_c - ql + ci > 0 \quad (46)$$

(або  $\Delta T > 0$ ), то відбувається зсув поверхневих шарів деталі (щодо підповерхневих) на ділянці  $l_2$  (абсолютне значення переміщення становитиме  $\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$ ).

Для втрати поверхневим шаром деталі поздовжньої стійкості необхідно, щоб для балки-смушки виконувалася умова  $\Delta T \geq T_{кр}$ .

Отже (46) є критичним умовою використання гіпотези плоских перерізів у контактних завданнях за одночасної дії вертикальних і дотичних навантажень (сил тертя).

Таким чином, використано підхід про введення розподілених дотичних сил пружності на ділянках «зчеплення» та «прослизування» поверхневих та підповерхневих шарів, що дозволяє розкрити механізм взаємодії суміжних шарів матеріалу деталі. При цьому обмеження, накладені на вертикальні переміщення

балки-смужки зберігаються до тих пір, поки врівноважуються зовнішнє дотичне навантаження і розподілена дотична напруга.

Для зняття обмежувачів на горизонтальні (дотичні) та вертикальні переміщення поверхневих шарів необхідне виконання (46), тобто  $\Delta T > 0$ , а також  $\Delta T - T_{кр} > 0$ . Це свідчить про те, що для втрати стійкості до балки-смужки необхідно докласти зусилля, яке спочатку є динамічним (бо  $\Delta T > T_{кр}$ ). Надмірне зусилля йде на розгойдування хвильового деформаційного процесу, що може призвести до схоплювання поверхонь, що труться, через надмірний імпульс зусилля. Тобто зсув поверхневих шарів пари тертя є передумовою до схоплювання поверхонь пари тертя. Так як балка-смужка втрачає горизонтальні (дотичні) зв'язки по лінії примикання шарів, то втрата стійкості балки-смужки відбудеться за меншого значення критичної сили ( $T_e$  – критична сила Ейлера).

Переходячи до динамічного завдання про втрату поздовжньої стійкості балки-смужки під дією зусилля  $T = nT_e$  (де « $n$ » – коефіцієнт перевантаження), будемо умовно вважати, що зусилля при короткочасній його дії є постійним вже в момент зіткнення мікронерівностей ( $t_1 = +0$ ) штампа з мікронерівностями смуги. Крім того, імпульсний ударний процес від розглянутого зіткнення до наступного супроводжується хвильовим перехідним режимом, при цьому, як показано в [4], коефіцієнт навантаження може значно перевищувати одиницю ( $n \gg 1$ ). Тому такі моменти ударного навантаження мікронерівностей можуть супроводжуватися схоплюванням поверхонь тертя (внаслідок значної роботи тертя у парі, що взаємодіє).

#### **Динамічне навантаження балки-смужки. Вихідні передумови. Загальна постановка завдання.**

Звернемося до завдання М. А. Лаврентьєва, що описує динамічну поведінку пружного стрижня під дією раптово прикладеної постійної сили  $T$  (за певних обмежень).

У нашому випадку розглянемо аналогічне завдання про балку-смужку на пружній основі під дією поздовжньої імпульсної сили  $T$  (рис. 4), яка прикладається до кожної деформаційної мікронерівності. Якщо порівняти передумови роботи [4] з запропонованим завданням, то відмінність полягає в тому, що кількість напівхвиль деформації попереду штампу може бути прийнята в межах  $k = 2 \div 3$ , а коефіцієнт перевантаження « $n$ », обумовлений імпульсом доданої сили  $S = Tt_1$  визначається сукупним дотичним зусиллям, яке йде на руйнування всіх мікронерівностей ( $j$ ), що знаходяться в даний момент на майданчику контакту, тобто сумарне дотичне зусилля не може перевищувати сумарного зрізуючого зусилля, прикладеного по всіх одночасно навантажених мікронерівностей ( $\sum_{i=1}^j T_i = \sum_{i=1}^j T_{срi}$ ,  $j$  – сукупна кількість мікронерівностей).

Тоді завдання про динамічну форму втрати стійкості поверхневих шарів під дією імпульсного динамічного навантаження за аналогією з [4] подаємо у вигляді:

$$E_c I \frac{\partial^4 (y_1 - y_0)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \beta y_1 + T \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} = 0, \quad (47)$$

де  $m$  – погонна маса балки-смужки;  $y_0$  – початкова кривизна або ексцентриситет прикладення навантаження (може бути прийнятий  $y_0 = \frac{h}{2}$ , це фактична початкова неправильність або мікронерівність балки-смужки);  $y_1$  – повний прогин балки-смужки;  $y$  – додатковий прогин балки-смужки (при коливаннях);  $\beta$  – коефіцієнт відсічі пружної основи;  $r = \frac{\beta}{E_c I}$  – реактивний коефіцієнт пружної основи;  $T = nT_e$



– імпульсна поздовжня сила;  $n$  – коефіцієнт перевантаження (числове значення коефіцієнта помножене на імпульсну функцію Дірака);  $T_e = \frac{\pi^2 E_c l}{l^2}$  – вираз для критичної сили Ейлера (без урахування пружної основи).

Функції  $y_1$ ,  $y_0$  представимо у вигляді розкладів у тригонометричні ряди (для випадку шарнірного спирання кінців стрижня)

$$y_1 = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} z_{1k}(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right); y_0 = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} z_{0k} \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right), \quad (48)$$

де  $k$  – номер форми втрати стійкості балки-смушки.

Після підстановки (48) у (47) отримаємо

$$\ddot{z}_{1k} + \left[ \frac{\pi^2 T_e}{l^2 m} (k^2 - n^2) + \frac{r}{m} \right] z_{1k} = \frac{k^2 \pi^2 T_e}{l^2 m} z_{0k}. \quad (49)$$

Позначимо

$$\left[ \frac{\pi^2 T_e}{l^2 m} (k^2 - n^2) + \frac{r}{m} \right] = \omega_k^{*2}, \quad (50)$$

$\omega_k^{*2}$  – квадрат власних коливань балки-смушки з урахуванням параметричного навантаження ( $nT_e$ ), а також позначимо:

$$\left[ \frac{\pi^2 T_e}{l^2 m} k^2 + \frac{r}{m} \right] = \omega_k^2, \quad (51)$$

$\omega_k^2$  – квадрат власної частоти коливань балки-смушки без урахування зовнішнього (параметричного) навантаження.

Тоді отримуємо два диференціальні неоднорідні рівняння для балки-смушки

$$\ddot{z}_{1k} + \omega_k^{*2} z_{1k} = \frac{\pi^2}{l^2} k^2 \frac{T_e}{m} z_{0k} \quad (52)$$

та

$$\ddot{z}_{1k} + \omega_k^2 z_{1k} = \frac{\pi^2}{l^2} k^2 \frac{T_e}{m} z_{0k}. \quad (53)$$

Рівняння (52) та (53) допускають такі рішення

$$z_{1k}^*(t) = A \sin(\omega_k^* t) + B \cos(\omega_k^* t) + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \frac{T_e}{m \omega_k^{*2}} z_{0k}, \quad (54)$$

$$z_{1k}^*(t) = A \sin(\omega_k t) + B \cos(\omega_k t) + \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \frac{T_e}{m \omega_k^2} z_{0k}. \quad (55)$$

Два рівняння (52) (53) є неоднорідними. Тобто в рівняннях є постійна права частина, тоді для побудови подальшого рішення необхідно мати два однорідні рівняння. Для цього в даних рівняннях доцільно провести заміну змінних. Так для рівняння (52) використовуємо підстановку

$$\zeta_{1k}(t) = z_{1k}^*(t) - \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k^2}{\omega_k^{*2}} \frac{T_e}{m} z_{0k}. \quad (56)$$

Використовуючи підстановку (56) переходимо до однорідного рівняння

$$\ddot{\zeta}_{1k} + \omega_k^{*2} \zeta_{1k} = 0. \quad (57)$$

Зовсім аналогічно розглянемо підстановку

$$\zeta_{1k}(t) = z_{1k}(t) - \frac{\pi^2}{l^2} \frac{k^2}{\omega_k^2} \frac{T_e}{m} z_{0k} \quad (58)$$

і перейдемо до рівняння

$$\ddot{\zeta}_{1k} + \omega_k^2 \zeta_{1k} = 0. \quad (59)$$

Рішення однорідного рівняння (57) з урахуванням заміни змінної  $z_{1k}^*(t)$  на  $\zeta_{1k}^*(t)$  допускає рішення

$$\zeta_{1k}^*(t) = A_2 \sin(\omega_k^* t) + B_2 \cos(\omega_k^* t) = \zeta_{k0}^* \cos(\omega_k^* t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* t), \quad (60)$$

та рівняння (59) допускає аналогічне рішення

$$\zeta_{1k}(t) = A_3 \sin(\omega_k t) + B_3 \cos(\omega_k t) = \zeta_{k0} \cos(\omega_k t) + \frac{V_0}{\omega_k} \sin(\omega_k t). \quad (61)$$

Рівняння (52), (53), (57), (59) необхідно розглядати з урахуванням початкових умов

$$\begin{aligned} z_{1k}^*(0) = z_{1k}^0; \dot{z}_{1k}^*(0) = V_0 - \Delta V; z_{1k}(0) = z_{1k}^0; \dot{z}_{1k}(0) = \dot{\zeta}_{1k}(0) = V_0; \\ z_{1k}(0) = z_{1k}^0; \zeta_{1k}(0) = z_{1k}(0) - \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k}; \zeta_{1k}^*(0) = \zeta_{1k}(0). \end{aligned} \quad (62)$$

Також зауважимо, що

$$\begin{aligned} \dot{z}_{1k}(0 - \varepsilon) = \dot{\zeta}_{1k}(0); \dot{z}_{1k}(0 - \varepsilon) = \dot{z}_{1k}^*(0 + \varepsilon) - \Delta V; \\ \dot{\zeta}_{1k}(0 - \varepsilon) = \dot{\zeta}_{1k}^*(0 + \varepsilon) - \Delta V. \end{aligned} \quad (63)$$

Звернемося до виразів для переміщень  $\zeta_{1k}(\Theta - \varepsilon)$  та  $\zeta_{1k}^*(\Theta + \varepsilon)$  у точці закінчення одного періоду для переміщень, коли штамп (його мікронерівність) впливає на мікронерівність смуги  $\Theta + \varepsilon$ , то станеться ударний імпульс і швидкість взаємодії деталей змінюється на величину  $\Delta V$  (швидкість штампу зменшується, а смуги – зростає).

При цьому

$$\zeta_{1k}^*(\Theta) = \zeta_{1k}(\Theta). \quad (64)$$

У розгорнутому вигляді отримаємо

$$\zeta_{k0} \cos(\omega_k \Theta) + \frac{V_0}{\omega_k} \sin(\omega_k \Theta) = \zeta_{k0} \cos(\omega_k^* \Theta) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k^*} \sin(\omega_k^* \Theta), \quad (65)$$

звідки  $\Delta V$  отримаємо у вигляді

$$\Delta V = \frac{\left[ \zeta_{k0} (\cos(\omega_k^* \Theta) - \cos(\omega_k \Theta)) + V_0 \left( \frac{\sin(\omega_k^* \Theta)}{\omega_k^*} - \frac{\sin(\omega_k \Theta)}{\omega_k} \right) \right] \omega_k^*}{\sin(\omega_k^* \Theta)}. \quad (66)$$

Враховуючи що

$$\zeta_{1k}^0 = z_{1k}^0 - \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k}, \quad (67)$$

запишемо вираз для  $\Delta V$  у вигляді

$$\Delta V = \frac{\left[ \left( z_{1k}^0 - \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k} \right) (\cos(\omega_k^* \Theta) - \cos(\omega_k \Theta)) + V_0 \left( \frac{\sin(\omega_k^* \Theta)}{\omega_k^*} - \frac{\sin(\omega_k \Theta)}{\omega_k} \right) \right] \omega_k^*}{\sin(\omega_k^* \Theta)}. \quad (68)$$

При розгляді виразу (68) врахуємо, що  $\omega_k^{*2}$  має вигляд

$$\omega_k^{*2} = \frac{E_c I}{m} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^4 + \frac{\beta}{m} - \frac{T}{m} \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 = \frac{\pi^2 T_e}{l^2 m} (k^2 - n^2) + \frac{r}{m}, \quad (69)$$

а  $T_e = \frac{\pi^2}{l^2} E_c I$  – критична сила для балки-смужки (з шарнірно закріпленими кінцями) по Ейлеру, без урахування пружної основи;

$T = n^2 \frac{\pi^2}{l^2} E_c I$  – зусилля, що діє на балку-смужку під час перевантаження.

Побудову розв'язання задачі (47) отримано шляхом об'єднання двох розв'язків рівняння вільних коливань для балки-смужки. Причому рівняння (57), (59) та початкові умови завдання (62) були отримані шляхом переходу від неоднорідних рівнянь з правими частинами до двох однорідних рівнянь з початковими неоднорідними умовами.

Рівняння (59) визначає вільні коливання балки-смужки за весь проміжок руху (період коливань) за винятком моменту часу  $t = 0 + \varepsilon$  або  $t = \Theta + \varepsilon$  (де  $\varepsilon$  – нескінченно мала величина). Це момент зіткнення мікронерівностей. Тоді рішення зведеться до розв'язку завдання у формі (59) з початковими умовами

$$\zeta_{1k}(0) = \zeta_{1k}(\Theta) = \zeta_{k0}; \dot{\zeta}_{1k}(0) = \dot{\zeta}_{1k}(\Theta) = V_0 - \Delta V, \quad (70)$$

де  $\Delta V$  – приріст швидкості деталі в момент зіткнення, приймається за аналогією з теорією про зміну кількості руху деталей з урахуванням їх фізичних і геометричних параметрів

$$\zeta_{1k}(t) = \zeta_{k0} \cos(\omega_k t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k} \sin(\omega_k t). \quad (71)$$

Таким чином, внаслідок впливу імпульсу сили  $S$ , доданого до мікронерівностей, швидкість руху штампку знизиться на величину  $\Delta V$ , а швидкість руху елемента взаємодіючої деталі збільшиться на  $\Delta V$ . Переміщення балки-смушки відбудуться згідно із законом зміни її вільних коливань за відсутності параметричного навантаження. Урахування дії параметричного навантаження у вигляді імпульсу сили  $S = Tt_1$ , виконане через кінематичну початкову умову (70). Незважаючи на фізичну нелінійність завдання (47), (49) в даному випадку вдалося звести його до лінійної однорідної задачі (54), (55) з неоднорідними початковими умовами. Тобто зшивання рішень (54), (55) було зроблено через вирази (60), (61) та приріст швидкості  $\Delta V$ , обчислений з рівності  $z_{1k}^* = z_{1k}$  (або  $\zeta_{1k}^* = \zeta_{1k}$ ).

Розв'язання рівнянь (57), (59) виконано з урахуванням початкового зміщення  $\zeta_{k0}$ , яке у свою чергу додатково пов'язане із загальною початковою неправильністю завдання. Ця неправильність може мати місце для аналізованого періоду руху. Якщо початкова неправильність інших періодів руху відсутня, то вихідне рівняння (49) буде однорідним. Після розв'язання рівнянь (57), (59) у вигляді (60) використовуємо формулу переходу від змінної  $\zeta_{1k}(t)$  до змінної  $z_{1k}(t)$  (тобто  $\zeta_{1k} \rightarrow z_{1k}$ ) згідно з формулами побудови рішення.

Аналізуючи вирази (60), (61) з урахуванням початкової неправильності балки-смушки  $z_{0k}$  (тобто ексцентриситет, висота випадкової мікронерівності, початкова форма вигнутої осі), бачимо, що крім величин обмежених у (68) амплітуди коливань балки-смушки пропорційні коефіцієнту « $n$ » доки частота  $\omega_k^*$  зберігає позитивне значення, то в цих умовах рішення (71) буде стійким. Причому зусилля, прикладені до пари, що контактує, йде на зріз або зминання мікронерівностей (геометричних і деформаційних), а також на саморозігрів поверхонь тертя.

Побудуємо загальне рішення диференціального рівняння у частинних похідних (47), використовуючи уявлення функцій  $y_1(x, t)$ ,  $y_0(x)$  у формі (48). Виходячи з (58) представимо  $z_{1k}(t)$  в формі

$$z_{1k}(t) = \zeta_{1k}(t) + \frac{\pi^2 k^2 k^2 T_e}{l^2 l^2 \omega_k^2 m} z_{0k}, \quad (72)$$

тоді

$$z_{1k}(t) = \left( z_{k0}(0) - \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k} \right) \cos(\omega_k t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k}. \quad (73)$$

Повний прогин балки-смушки отримаємо на підставі (48), (73)

$$y_1(x, t) = \sum_{k=1,2,3,\dots}^{\infty} \left[ \left( z_{k0}(0) - \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k} \right) \cos(\omega_k t) + \frac{V_0 - \Delta V}{\omega_k} \sin(\omega_k t) + \frac{\pi^2 k^2 T_e}{l^2 \omega_k^2 m} z_{0k} \right] \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right). \quad (74)$$

У наведених виразах (73), (74):

$z_{k0}(0)$  – часова складова початкового зміщення балки-смушки при  $t = 0$ ;

$z_{k0}$  – початкова неправильність балки-смушки, або її статичний прогин (або мікронерівність та її висота);

$T_e$  – критична сила для балки-смушки розвивається за відсутності пружної основи та дотичних зв'язків між поверхневими та підповерхневими шарами для взаємодіючих виробів;

$\Delta V$  – приріст швидкості контактуючих деталей при їх взаємодії в результаті виникнення ударних імпульсів від деформування мікронерівностей.

Зауважимо, що  $\Delta V$  – буде пропорційно коефіцієнту навантаження « $n$ » якщо  $\omega_k^*$  виражається «дійсним» числом. Ця умова є ознакою стійкості рішень у вигляді (73) (74).

Якщо коефіцієнт навантаження « $n$ » досягає значень  $\omega_k^* = i\omega_k^*$ , тобто  $\omega_k^*$  буде уявним числом ( $i = \sqrt{-1}$ ), у цьому випадку рішення (73), (74) будуть представлені не гармонійними, а аперіодичними функціями. Математично це рішення буде нестійким у часі (у разі зростання коефіцієнта « $n$ »). Отже, прогини балки-смужки необмежено зростатимуть (у часі), при дії на неї періодичних імпульсів. В цьому випадку можливі втрата цілісності поверхневих шарів, аварійне схоплювання та руйнування взаємодіючих поверхонь елементів кінематичної пари. З'ясування особливостей аперіодичного рішення представляє завдання для подальших досліджень, в якій необхідно використовувати дані експериментів, розробити повнішу розрахункову схему задачі та застосувати математичний апарат з використанням в'язко-пружних властивостей при підвищенні температури взаємодіючих деталей.

У завданні, що розглядається, спочатку прийнято, що діючі імпульси сили  $S$  зберігають під час удару постійне значення, тоді зусилля  $T$  прийнято постійною величиною ( $T = const$ , зберігаючи нескінченно велике значення), отже  $t_1 = const$  (зберігаючи нескінченно малі значення). Також у розглянутій задачі, кожен імпульс супроводжується безперервним перехідним процесом. У задачі [4] спочатку має місце перехідний процес, а потім встановлюється стан при  $T = const$ .

#### Оцінка температурних проявів у поверхневих шарах контактуючих деталей при терті та зношуванні.

При взаємодії твердих (металевих) тіл зовнішнє тертя складається окремих плямах контакту, зумовлених шорсткістю і хвилястістю поверхонь тертя [1, 9]. Плямистість виникає в результаті деформації нерівностей (шляхом виривання, зминання або зрізу нерівностей) (рис. 5). Плями контакту зосереджуються на гребенях хвиль. В результаті взаємодії гребенів відбувається їх схоплювання мікроплощадками контакту. У літературі це явище пояснюється утворенням містків зварювання, які при взаємному русі деталей відразу зрізаються з виділенням частини енергії деформації у вигляді теплової енергії [2, 9].

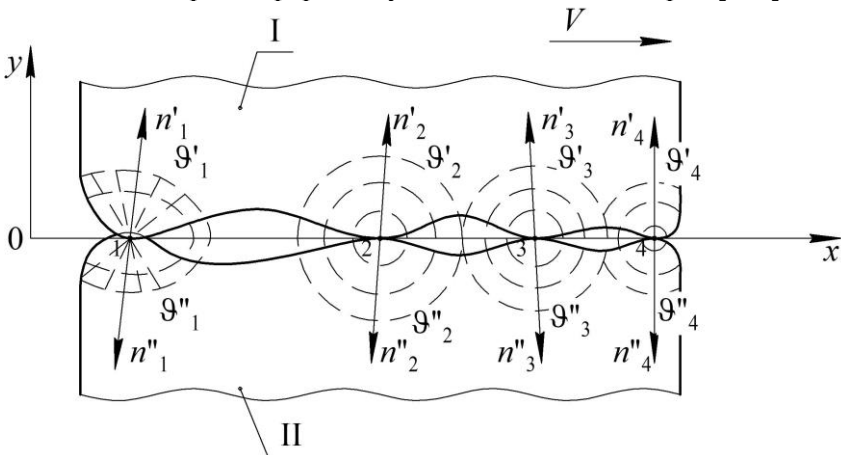


Рис. 5. Взаємодія мікронерівностей двох шорсткостей тіл I та II при розсіюванні тепла вглибину деталей за напрямком нормалей:  $V$  – швидкість переміщення деталі I;  $V' = 0$  – швидкість деталі II (в загальному випадку  $V' \neq 0$ );  $\theta'_k, \theta''_k$  – температура в зоні контакту мікронерівності « $k$ » для I та II деталей.

При дослідженні тепловиділення у разі сухого або граничного тертя двох поверхонь проведемо аналогію з температурними явищами для макромоделей у вигляді гальмівних дисків або барабанів, що взаємодіють із фрикційними елементами гальм. Аналогія полягає в тому, що в обох випадках нагрівання відбувається пропорційно до роботи сил тертя у певний період часу по осі (0у), перпендикулярною (нормальною) до поверхні тертя (рис. 5). При зіткненні мікронерівностей протягом дуже короткого часу  $t_1$ , дотична сила здійснює елементарну роботу. У джерелі [2] А. В. Чичинадзе та співавторів, при визначенні температури контактування двох деталей гальмівного пристрою виходять з короткочасності протікання процесу тертя. Тому для спрощення завдання про теплопровідність у процесі тертя двох деталей (або їх мікронерівностей) зазвичай нехтують тепловіддачею в навколишнє середовище [2]. Крім того, тепловий потік лінійний і спрямований за нормаллю до площини розділу поверхонь тертя (а також прийнято, що температура навколишнього середовища постійна і дорівнює 0) [12].

Тоді завдання визначення температури  $\vartheta$  в елементах пари тертя зводиться до вирішення рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2}. \quad (75)$$

З крайовими умовами

$$\left. \begin{aligned} y = 0: \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= -\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{ТП}}}{Aa_1\lambda_1 t_1} \\ y = b: \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

Початкова умова

$$t = 0; \vartheta = 0. \quad (77)$$

У наведених виразах:

$\alpha_T$  – коефіцієнт розподілу теплових потоків між матеріалами пари тертя;

$W_{\text{ТП}}$  – повна робота сил тертя;

$Aa_1$  – номінальна площа тертя мікронерівностей (деформаційних) елементів пари;

$\tau_N$  – тимчасовий фактор потужності тертя [2];

$\lambda_1$  – коефіцієнт теплопровідності матеріалу даного елемента;

$a_1 = \frac{\lambda_1}{\gamma_1 c_1}$  – коефіцієнт температуропровідності елемента;

$c_1$  – питома теплопровідність елемента;

$\gamma_1$  – питома вага елемента;

$t_1$  – час тертя (взаємодії мікронерівностей).

У роботах А. В. Чичинадзе прийнято припущення, що температура будь-якої точки мікронерівності та поверхневого шару вздовж осі 0у пропорційні часу взаємодії та збільшення температури в цій точці дорівнює приросту середньої температури, тоді згідно [2]

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} = \frac{(1-\alpha_T)W_{\text{ТП}}\tau_N}{Aa_1\gamma c_1 b_1 t_1}, \quad (78)$$

де  $b_1$  – товщина елемента пари тертя, що розглядається (висота мікронерівності з урахуванням товщини ущільненого шару).

Інтегруючи (78) один раз за координатою «у» отримуємо

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{(1-\alpha_T)W_{\text{ТП}}\tau_N y}{Aa_1\gamma c_1 b_1 t_1} + \Theta_1(t) + k_1 = \frac{(1-\alpha_T)W_{\text{ТП}}\tau_N y}{\lambda_1 b_1 Aa_1 t_1} + \Theta_1(t) + k_1, \quad (79)$$

$\Theta_1(t)$  – довільна функція температури від часу  $t$ ;

$k_1$  – довільне постійне інтегрування.

Розглядаючи (79) з урахуванням граничних умов (76) отримуємо

$$\Theta_1(t) = 0, \quad (80)$$

так як

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right|_{b=0} = -\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N y}{\lambda_1 b_1 A a_1 t_1} + \Theta_1(t) + k_1 \quad (81)$$

не залежить від  $t$ . Тоді прирівняємо до «0» решту (81), отримаємо

$$\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N}{A a_1 \gamma_1 c_1 b_1 t_1} + k_1 = 0, \quad (82)$$

звідки

$$k_1 = \frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N}{\lambda_1 A a_1}. \quad (83)$$

Тоді запишемо (79) з урахуванням (80) та (83) у такому вигляді

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = -\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N}{\lambda_1 A a_1 t_1} \left(1 - \frac{y}{b_1}\right). \quad (84)$$

Вираз (81) проінтегруємо за змінною « $y$ » (по висоті мікронерівності з урахуванням товщини зміцненого шару)

$$\vartheta(y, t) = -\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N}{\lambda_1 A a_1 t_1} y \left(1 - \frac{y}{2b_1}\right) + \Theta_2(t) + k_2. \quad (85)$$

Вираз (78) можна подати у вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}\tau_N}{A a_1 \gamma_1 c_1 b_1}. \quad (86)$$

Тоді після інтегрування (86) з урахуванням  $\vartheta_{t=0} = 0$ ,  $k_2 = 0$ , згідно з [12], отримаємо

$$\vartheta(y, t) = \frac{(1-\alpha_T)W_{\text{тп}}}{A a_1} \left[ -\frac{2\tau_N}{\lambda_1 t_1} \left(1 - \frac{y}{2b_1}\right) + \frac{\tau_w}{\gamma_1 c_1 b_1} \right]. \quad (87)$$

У виразі (87)

$W_{\text{тп}} = \int_0^t TV dt = TV \Delta t$  – робота сили тертя під час зіткнення мікронерівностей. Константи та змінні ( $\tau_N = 1$ ,  $\tau_w$  – временний фактор,  $\tau = \frac{t}{t_1}$  – безрозмірна координата часу;  $t_1$  – час взаємодії (зіткнення) мікронерівностей;  $t$  – поточний час) прийнято в інтерпретації автора [2]:  $\Delta t \approx t_1$  через їхню нескінченну малість;  $V$  – швидкість взаємодії двох деталей (або швидкість рухомої деталі, а також швидкість прослизання деталей); сила  $T$  може бути визначена з виразу для імпульсу сили  $S$ .

Тоді з урахуванням позначень, прийнятих у розглянутому завданні, будемо мати

$$\vartheta(y, t) = \frac{(1-\alpha_T)TV}{A a_1} \left[ -\frac{2}{\lambda_1} \left(1 - \frac{y}{2b_1}\right) + \frac{t}{\gamma_1 c_1 b_1} \right], \quad (88)$$

де  $(1 - \alpha_T)$  – частина теплового потоку, що йде на «розігрів» першого елемента пари;

$t$  – поточний час із тимчасового інтервалу  $0 \leq t \leq t_n$ , де  $t_1 = t$  – час зіткнення мікронерівностей (рис. 3),  $t_n$  – час закінчення одного періоду між зіткненнями.

Таким чином, отримали закон розподілу температури за час взаємодії двох мікронерівностей при сухому терті (в межах одного періоду ударної взаємодії двох деформаційних мікронерівностей).

Вираз (88) описує взаємодію двох мікронерівностей за один період  $(0, t_n)$ , що еквівалентно розгорнутому процесу ударної взаємодії в рухомій системі координат, що переміщається зі швидкістю  $V$  (швидкість переміщення рухомої деталі).

Якщо розглядати другий елемент, то на нього доводиться (замість  $1 - \alpha_T$ ) частина теплового потоку  $\alpha_T$ , що необхідно враховувати при виконанні

розрахунків за формулами (76), (87), (88) та іншими формулами, що використовуються для першої деталі.

Отримані рішення (87), (88) задовольняють крайовим (76) та початковим умовам завдання (77).

Зауважимо, що робота сил тертя  $W_{T0} = 0$ , при  $t = 0$  (оскільки сила  $T$  носить імпульсний характер, див. рис. 3, якщо судити з вигляду функції Дірака).

Як впливає з виразу (88), розподіл температури за висотою мікронерівностей (за координатою  $y$ ), розвивається від максимальної температури на поверхні дотику деталей до мінімальної температури біля основи мікронерівності. Розподіл температури за часом буде пропорційний до ударного імпульсу  $S$  від сили  $T$  та часу зіткнення  $t_1$  ( $\Delta t$ ), тоді температура нагрівання мікронерівностей буде пропорційна швидкості руху штампу  $V$ , ще додатково, при русі штампу, необхідно враховувати коефіцієнт динамічності, на який впливає швидкісний фактор [3]

$$k'_d = \left(1 + \frac{mV^2}{fP}\right), \quad (89)$$

де  $m$  – маса штампу;  $P$  – вертикальне навантаження на штамп;  $f$  – коефіцієнт тертя.

Тобто, у цій задачі, при нагріванні, проявляється швидкісний режим пересування деталей у кінематичній парі. Навіть без урахування кубічної залежності сили тертя (коефіцієнта тертя) від швидкості прослизання, нагрівання мікронерівностей при температурному спалаху пропорційне кубу швидкості переміщення (прослизування) рухомої деталі. Тому через залежність (88) і коефіцієнтом  $k'_d$  (89) мікросхоплювання вершин мікронерівностей та їх подальше руйнування мають під собою реальний ґрунт (пластичний перебіг поверхневих шарів деталей та спадне зниження з пружних властивостей при підвищенні температур – модулі пружності  $E_c$ ,  $E$ ).

Можуть бути також розглянуті інші варіанти розв'язання задач про імпульсний характер взаємодії мікронерівностей і подальшому їх нагріванні з використанням кубічної характеристик сили тертя від швидкості ковзання деталей (13), (14).

### Висновки

1. Виконано постановку та вирішення задачі про виникнення функціональних самозбуджувальних коливань у зоні контакту взаємодіючих деталей, як ділянок балки-смушки на пружній підставі.

Встановлено, що змінне навантаження, що виникає при фрикційних коливаннях майданчиків контакту на пружній підставі, має бінарний характер і викликає параметричні коливання і подальше руйнування ділянок контакту, що випереджають штамп.

2. Отримано та проаналізовано уточнене рішення динамічної задачі про параметричні коливання ділянки балки-смушки попереду рухомої деталі при шматочно-лінійному навантаженні під час взаємодії деформаційних мікронерівностей.

Рішення отримано методом «припасування» для вільних коливань балки-смушки без параметричного навантаження, так і з урахуванням цього навантаження. У цьому разі математично використані неоднорідні початкові умови.

3. У публікації приведені умови застосування гіпотези «плоских перерізів» для вирішення контактних завдань, стосовно балок-смушок, рухливих пружного і пластичного руйнування мікронерівностей, під дією сил тертя.

Показано, що умовою застосування гіпотези плоских перерізів є баланс дотичних зовнішніх сил, а також сил пружності та сил тертя. При порушенні цього балансу у бік зовнішніх дотичних сил відбувається депланація плоских перерізів.

4. У роботі встановлено, що амплітуда коливань балки-смужки при її навантаженні з коефіцієнтом навантаження « $n$ » пропорційна цьому коефіцієнту доти, доки частота власних коливань системи  $\omega_k^*$  зберігає позитивне значення, при цьому розв'язання задачі буде стійким (амплітуди коливань будуть обмеженими). Якщо ж  $\omega_k^*$  буде величиною «уявною», то амплітуда коливань балки смужки будуть необмежено зростати, можливі руйнування поверхонь пари та їх схоплювання.

5. Також у роботі встановлено, що при взаємодії гребенів хвиль та мікронерівностей деталей відбувається їх зріз, зминання та руйнування мікронерівностей, що супроводжуються локальним нагріванням. У цьому випадку розподіл температури за часом буде пропорційний ударному імпульсу і швидкості взаємного переміщення деталей, а по висоті мікронерівності від максимальної температури на площині дотику до мінімальної у кореня мікронерівності.

При врахуванні швидкісного фактора взаємодії деталей робота сил тертя збільшується пропорційно до коефіцієнта динамічності  $k_d$ . З урахуванням цього фактора, вплив теплової динаміки тертя призводить до нагрівання поверхонь, що контактують, пропорційно кубу швидкості переміщення деталі  $V$ .

#### Список літератури

1. Крагельский И. В. Трение и износ. Изд. 2-е – М.: Машиностроение, 1968. 480 с.
2. Чичинадзе А. В., Гинзбург А. Г. Применение уравнений тепловой динамики трения для расчета рабочих характеристик тормозов. *Тепловая динамика трения*. М.: Наука, 1970. С. 7 – 77.
3. Маліновський Ю. О., Цвіркун С. Л., Власенко Д. П., Олійник С. Ю. Деформаційний аспект прояву ударно-хвильової природи тертя та зношування. *Проблеми тертя та зношування*. № 1 (98). 2023. С. 70 – 97.
4. Пановко Я. Г. Механика деформируемого твердого тела. Современные концепции, ошибки, парадоксы. М.: «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, 1985. 288 с.
5. Светлицкий В. А. Стасенко И. К. Сборник задач по теории колебаний. М.: «Высшая школа», 1973. 456 с.
6. Маліновський Ю. О., Невлюдов І. Ш., Цвіркун С. Л., Власенков Д. П., Ткаченко А. С., Олійник С. Ю. Елементи фрикційної взаємодії та можливості збільшення навантаження пари колесо – рейка. *Проблеми тертя та зношування*. № 1 (98). 2023. С. 14 – 46.
7. Смирнов В. В., Яковлев Р. А. Механика приводов прокатных станов. М.: «Металлургия», 1977. 216 с.
8. Галин Л. А. Контактные задачи упругости и вязкоупругости. М.: «Наука», 1980. 304 с.
9. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Камбалов В. С. – Основы расчетов на трение и износ. – М.: «Машиностроение», 1977. 526 с.
10. Проскурязов Ю. Г. Упрочняюще-калибрующие методы обработки. М.: «Машиностроение», 1965. 205 с.
11. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Части I, II. 3-е изд. М.: «Юрайт», 2018. 88- с.
12. Основы трибологии / под ред. Чичинадзе А. В. М.: «Машиностроение», 2001. 684 с.

Стаття надійшла 29.05.2023.



*Yu. O. MALINOVSKIY, S. L. TSVIRKUN, D. P. VLASENKOV, S. Yu. OLIINYK*

### **THERMO-MECHANICAL PHENOMENA IN THE SURFACE LAYERS OF CONTACTING PARTS DURING FRICTION AND WEAR**

Despite a significant number of theories of friction and wear, the issue of wave formation on contacting surfaces and in the zone ahead of the moving part has not yet received a sufficiently deep justification. Based on accumulated theoretical and experimental data, it is generally accepted to consider the groups of theories: 1) geometric, 2) molecular (adhesive), 3) deformation, 4) combined [1]. The most widespread opinion is that friction is caused by plastic extrusion of the material and the destruction of welding bridges (F. R. Bowden and D. Tabor), which is also confirmed by the hypothesis of Ernst and Margent, where friction is caused by adhesion (at the molecular level and surface roughness). At the same time, the experimental results of F. R. Bowden and D. Tabor indicate that the effect of friction depends on both the adhesion forces and the deformation of the material in the thin surface layer. As a result of the application of significant compressive forces and tangential frictional forces, a large amount of energy is released at the contact of two bodies, and with weak heat exchange with the environment, high gradients of temperature changes occur, and in the case of metal parts, under certain conditions, the welding effect of both individual micro-uniformities and contact surfaces in general, which is confirmed by research results [2].

**Key words:** friction, wear, roughness, surface layer, stamp, wave formation, planar section, deplaning of planar sections, adhesion, elastic contact, plastic contact, shock pulse, elastic wave, contact force, normal pressure, critical force, compressive shear, bridges welding, heat conduction equations, boundary conditions, initial conditions.

#### **References**

1. Kragelskiy I. V. *Trenie i iznos*. Izd. 2-e – M.: Mashinostroenie, 1968. 480 p.
2. Chichinadze A. V., Ginzburg A. G. *Primenenie uravneniy teplovoy dinamiki treniya dlya rascheta rabochih karakteristik tormozov*. Teplovaya dinamika treniya. M.: Nauka, 1970. P. 7 – 77.
3. Malinovskiy Yu. O., Tsvirkun S. L., Vlasenkov D. P., Oliinyk S. Yu. *Deformatsiyniy aspekt proyavu udarno-hvilovoyi prirodni tertya ta znoshuvannya*. Problemi tertya ta znoshuvannya. Problems of friction and wear. № 1 (98). 2023. P. 70 – 97.
4. *Mehanika deformiruemogo tverdogo tela*. Sovremennyye kontseptsii, oshibki, paradoksyi. M.: «Nauka» Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury 1985. 288 p.
5. Svetlitskiy V. A., Stasenko I. K. *Sbornik zadach po teorii kolebaniy*. M.: «Vysshaya shkola», 1973. 456 p.
6. Malinovskiy Yu. O., Nevljudov I. Sh., Tsvirkun S. L., Vlasenkov D. P., Tkachenko A. S., Oliinyk S. Yu. *Elementi friktsiynoYi vzaEmodiYi ta mozhlivostiI zbilshennya navantazhennya pari koleso – reyka*. Problemi tertya ta znoshuvannya. № 1 (98). 2023. P.14 – 46.
7. Smirnov V. V., Yakovlev R. A. *Mehanika privodov prokatnyih stanov*. M.: «Metallurgiya», 1977. 216 p.
8. Galin L. A. *Kontaktnyye zadachi uprugosti i vyzkouprugosti*. M.: «Nauka», 1980. 304 p.
9. Kragelskiy I. V., Dobyichin M. N., Kambalov V. S. – *Osnovny raschetov na trenie i iznos*. – M.: «Mashinostroenie», 1977. 526 p.
10. Proskuryakov Yu. G. *Uprochnyayusche-kalibrnyuschie metody obrabotki*. M.: «Mashinostroenie», 1965. 205 p.
11. Volmir A. S. *Ustoychivost deformiruemyyih sistem*. Chasti I, II. 3-e izd. M.: «Yurayt», 2018. 88- s.
12. *Osnovny tribologii / pod red. Chichinadze A. V.* M.: «Mashinostroenie», 2001. 684 p.

**Malinovskiy Yuriy Olexandrovich** – candidate of technical sciences, associate professor, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: malinovskiy129@gmail.com, tel.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>.

---

**Tsvirkun Sergij Leonidovich** – candidate of technical sciences, senior teacher, chairman of the cycle commission, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: tserg300@gmail.com, tel.: +38 067 296 69 99, <https://orcid.org/0000-0001-5430-3427>.

**Vlasenkov Dmitro Petrovich** – senior teacher, head's assistant, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com, tel.: +38 067 296 71 75.

**Oliinyk Svitlana Yuryivna** – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology, Krivyi Rih National University, Krivyi Rih, Vitaly Matusevicha 11, Ukraine, 50027, E-mail: olynyk.syu@knu.edu.ua, tel.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>.

**Маліновський Юрій Олександрович** – кандидат технічних наук, доцент, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: malinovsky129@gmail.com, тел.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>.

**Цвіркун Сергій Леонідович** – кандидат технічних наук, старший викладач, голова циклової комісії, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: tserg300@gmail.com., тел.: +38 067 296 69 99, <https://orcid.org/0000-0001-5430-3427>.

**Власенков Дмитро Петрович** – старший викладач, заступник директора, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com., тел.: +38 067 296 71 75.

**Олійник Світлана Юрївна** – старший викладач кафедри технології машинобудування, Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: olynyk.syu@knu.edu.ua., тел.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>.