

УДК 681.5.003.2:[669.018.255:539.377] DOI: 10.18372/0370-2197.1(98).17357

Ю. А. МАЛІНОВСЬКИЙ¹, І. Ш. НЕВЛЮДОВ¹, С. Л. ЦВІРКУН¹,
Д. П. ВЛАСЕНКОВ¹, А. С. ТКАЧЕНКО², С. Ю. ОЛІЙНИК²

¹Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж
Національного авіаційного університету», Кривий Ріг, Україна

²Криворізький національний університет, Кривий Ріг, Україна

ЕЛЕМЕНТИ ФРИКЦІЙНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТА МОЖЛИВОСТІ ЗБІЛЬШЕННЯ НАВАНТАЖЕННЯ ПАРИ КОЛЕСО – РЕЙКА

Навантажувальна властивість пари колесо – рейка - один з головних факторів, що впливають на раціональну конструкцію транспортних засобів за для різних технічних цілей. Виходячи з досвіду роботи залізничного транспорту, існує ідея, що зі збільшенням вертикального навантаження на колесо і, відповідно, рейку и, довговічність цієї пари зменшується пропорційно збільшенню навантаження. Однак, досвід деяких дослідників, що спостерігали за межами навантаження пари, свідчать про те, що в певному діапазоні збільшення робочих вертикальних навантажень на колесо (пара коліс) може бути незначне збільшення міцності пари. Ці дані, якби не були спростовані та не отримали теоретичного підтвердження. Наприклад, з результатів вирішення контактної задачі Герца з прокатки еластичного циліндра в смугу з одного і того ж матеріалу (або близького у властивостях), де була встановлена пряма пропорціональність між навантаженням та напруженням в матеріалах взаємодіючих деталей, а отже, підвищення навантаження пропорційно знижує довговічність пари. На відміну від зазначених результатів, при встановленні завдання було зроблено припущення, що матеріали колеса та рейки не були однорідними протягом усієї їх товщини. Зовнішні тонкі шари матеріалу під впливом вертикальних та дотичних навантажень зчеплення отримують поверхневе затвердіння і тому є більш твердими, анізотропія властивостей матеріалів частин у їх товщині проявляється в цьому. У цій роботі було використано аналогію між завданням про кочення колеса на рейці та завданнями обробки металів тиском для випадків холодної та гарячої прокатки, обкатки та інших видів поверхневої обробки деталей. Для цих технологічних процесів із збільшенням вертикального навантаження значні структурні зміни відбуваються у кристалічних решітках поверхневих шарів, які можна інтерпретувати як зміну модулів еластичності та показників твердості поверхневих шарів. Зі збільшенням глибини штампованого шару значення межі плинності, міцності та витривалості цих тонких шарів збільшуються. Тому, враховуючи таку аналогію, стійкість до зносу відповідної пари значно збільшується під час виготовлення деталей в межах так званою «критичною» товщиною штампованого шару. Якщо ця товщина буде перевищена, то має місце подальший інтенсивний знос та руйнування взаємодіючих деталей. Однак міцність поверхневих частин пари колесо – рейка можна значно збільшити, використовуючи статичні та динамічні методи загартування ще до роботи цих пар на транспортних засобах.

Ключові слова: колесо, рейка, колісна пара, вертикальне навантаження, дотичне зусилля, псевдоковзання, коефіцієнт тертя, поверхневе зміцнення, накатка, обкатка, вібруючі валики.

Навантажувальна здатність пари колесо та рейки визначається при проектуванні та експлуатації транспортних засобів для різних технологічних цілей. Під час роботи таких транспортних засобів вплив на навантажувальні

здатності колеса при збільшенні вертикальних навантажень на осі, є суперечливою інформацією. Отже, всупереч прийнятим уявленням, збільшення вертикальних навантажень на осі призводить у деяких випадках до збільшення міцності та зносостійкості елементів взаємодіючої пари [1].

Більшість авторів у питаннях взаємодії колеса та рейки виходять з постановки та вирішення контактних проблем для еластичного напівпростору. Як правило, контактні напруги визначаються на основі вирішення задачі Герца для різних типів кривизни та матеріалів колеса та рейки. У цьому випадку природа колеса та рейки в деяких конструктивних рішеннях дозволяє прийняти розрахункову схему у вигляді рухомого циліндра вздовж товстої пластини [2], виходячи з безперервної еластичної основи. Рішення проблеми контакту [3] показує, що контактна пляма є еліптичною. Мабуть, контактні напруги перевищують межі плинності колісних та рейкових матеріалів, тому в процесі експлуатації еліптична контактна пляма витягується по осі колісної пари і набуває форму прямокутника [4].

Окрім вертикальних навантажень, діють дотичні сили зчеплення. Сили зчеплення між колесом і рейкою обумовлені тертям під час адгезії та ковзанням циліндра та пластини, недосконалої еластичності матеріалів взаємодіючих елементів, силами молекулярної взаємодії в контакті. На контактному майданчику є ділянки ковзання та зчеплення, співвідношення між цими зонами та коефіцієнтами контактної потужності значно залежить як від швидкості руху, так і від швидкості ковзання між колесом і рейкою.

Щоб описати рух колеса на рейці, ми використовуємо постановку та рішення задачі про кочення з тертям циліндра на площині [3]. Однак використання такого моделювання процесу контактної взаємодії не дозволяє описувати перехідні режими при прискоренні колеса, а також не пояснює збільшення зносостійкості та довговічності контактної пари, коли вертикальне навантаження на колесо збільшується у певному діапазоні вертикального навантаження.

Слід зазначити, що контактна задача про взаємодію колеса і рейки супроводжується динамічними деформаційними процесами, що відбуваються в тонких поверхневих шарах пари, що контактує, де безперервно відбуваються процеси мікросхоплювання і подальшого руйнування містків міжмолекулярної взаємодії кристалічних решіток елементів пари на фрикційному контакті.

Такий фізичний характер контактної взаємодії виявляється у безперервній зміні коефіцієнта тертя від швидкості прослизання колеса по рейці та деформативного прояву ефекту псевдоконвзання. Отже, прийнята розрахункова схема циліндра, що котиться по товстій смузі (або пластині), достовірно описує контактну взаємодію виходячи з геометрії майданчика контакту. Описати за допомогою такої моделі динамічні перехідні режими неможливо, оскільки нестійкі динамічні режими відбуваються в тонкому поверхневому шарі взаємодіючих колеса і рейки. Правильніше було б розглянути контактне завдання для анізотропних колеса та рейки. Причому анізотропія колеса і рейки полягає в наявності на елементах пари, що контактує, тонких поверхневих шарів з фізико-механічними властивостями, відмінними від фізико-механічних властивостей більш глибоких шарів деталей шляху і колісної пари. Зазвичай внаслідок багаторазового прокочування колеса по рейці відбувається поверхнєве зміцнення зовнішніх шарів на певну глибину. Для визначення товщини (або глибини) зміцненого поверхневого шару відома наближена (напівемпірична) формула [4]

$$h = \sqrt{\frac{P}{14+0,33HB}}, \text{ мм} \quad (1)$$

де h – товщина поверхневого (уцільненого) шару рейки (або колеса); P – вертикальне навантаження на колесо (рейку), кг; HB – твердість матеріалу рейки (або колеса) по Брінеллю (кг/мм²).

Процеси, що відбуваються в колесі та рейці при багаторазовому прокочуванні, дуже близькі до технологічних процесів холодної прокатки, обкатки та волочіння.

Так, виходячи з формули (1), зі збільшенням зовнішнього навантаження на колесо (або колісну пару) P , зростає товщина (глибина) поверхневого шару, яка може досягати значень $0 \leq \delta_1 \leq 25$ мм, твердість деталі збільшується на 40...50 %, межа втоми деталі підвищується на 80 % і більше [5]. Отже, при експлуатації рейкових рухомих складів завжди є додатковий резерв для підвищення довговічності та працездатності колеса та рейки, який не завжди очевидний в експлуатаційних умовах.

Ця робота спрямована на реалізацію ідеї підвищення навантажувальної здатності колісних пар. З цією метою доцільно провести низку експериментів щодо навантаження колісних пар вертикальним навантаженням, порівняним з відповідним номінальним навантаженням P , у певному діапазоні його зміни $0,75P \leq P \leq 1,25P$. Цим навантаженням необхідно буде поставити у відповідність глибину зміцненого шару та відповідне значення межі плинності матеріалу деталі.

Після визначення товщини уцільненого поверхневого шару (для однієї з деталей) доцільно було б розглядати контактну задачу для анізотропних ролика та смуги, однак, у цьому випадку суттєво зростуть математичні складності при постановці та вирішенні такого завдання.

Тому на початковому етапі для схематизації задачі використовуємо фізичну модель, в якій поверхневий шар рейки (або колеса) представлений у вигляді досить тонкої балки на пружній основі, що складається з двох частин. Перша частина – це ділянка балки в зоні контакту колеса та рейки (розміри цієї ділянки визначені з умов контактної взаємодії для завдання Герца [6] та Галина [3]). Друга частина є ділянкою тієї ж балки в зоні перед початковою точкою контакту колеса та рейки (точка А, рис. 1). Протяжність цієї ділянки поки що невідома і буде визначена, виходячи із втрати її стійкості. Ділянка навантажена результуючою дотичною силою T , прикладеної в точці А.

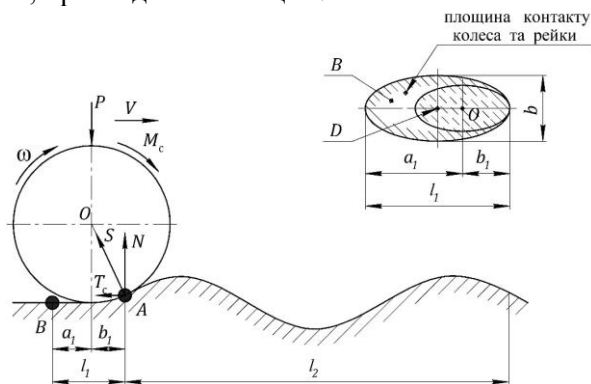


Рис. 1. Формування плями контакту пари колесо – рейка та утворення деформаційної хвилі попереду колеса: B – зона контакту; D – зона зчеплення

Перша ділянка балки (рис. 1) навантажена розподіленим тиском з результирующим вертикальним навантаженням P по майданчику взаємодії і результирующим дотичним навантаженням $T' = T$ попереду зони контакту. Виходячи з характеру навантаження колісної пари вихідним вертикальним навантаженням і дотичними зусиллями, що виникають при цьому, немає підстав для прояву динамічно нестійких перехідних режимів. Зупинимося на причинах нестійкого руху при перехідних режимах (у разі розгону та гальмування колісних пар). Під час набору провідною колісною парою (колесом) номінальної швидкості руху, виникає зміна швидкості прослизання колеса щодо рейки, і якщо швидкість прослизання знаходиться в області спадаючої гілки характеристики тертя, то режим псевдоковзання в зоні контактної взаємодії супроводжується автоколиваннями поверхневих шарів у межах першої ділянки. Такі зони нестійкості можуть мати місце при різних абсолютних значеннях лінійних (або колових) швидкостей колеса, важливо лише, щоб відносна швидкість проковзування (псевдоковзання) відповідала спадаючій ділянці характеристики тертя [7]. На наявність таких нестійких режимів при розгоні або гальмуванні колеса (колісної пари) вказав В. В. Болотін [8] з посиланням на більш ранні роботи Дж. Денгартога та С. П. Тимошенко. Якщо має місце нестійкий (динамічний) режим при розгоні колісної пари, він викликається змінними (динамічними) зусиллями. Отже, рівнодіюче дотичне зусилля в зоні контакту матиме постійну та змінну складові (зусилля T , T'). Тому дотичне зусилля, яке передається на гребінь деформаційної хвилі попереду точки контакту (т. А, рис. 1) також буде змінним.

Отже друга зона гіпотетичної балки буде навантажена силою, що змінюється в часі. Ця особливість навантаження другої ділянки балки буде нами в подальшому врахована при складанні диференціального рівняння позовжніх коливань балки (з урахуванням її позовжньої стійкості).

Попередньо розглянемо процес взаємодії колеса та рейки у зоні контакту (в межах першої ділянки балки) (рис. 1). Зупинимося на уявленні про те, що згідно з гіпотезою Картера [9], [10] колесо, що котиться, і рейка взаємодіють по майданчику контакту, який включає зони ковзання (прослизання) через різницю геометричної та деформаційної швидкостей та зони зчеплення. У разі кочення колеса по рейці має місце стан коли взаємодіють колесо і рейка, виконані з одного матеріалу (або різних матеріалів з близькими фізичними властивостями).

Розглянемо рішення контактної задачі про взаємодію циліндра та смуги виходячи з наявності при контакті тонких поверхневих шарів, зон ковзання та зчеплення. На межі цих зон спостерігається нестійкий характер взаємодії. Так, якщо розглядати окремо процес буксування колеса, можливість розвитку фрикційних коливань близька до нуля.

На ділянці зчеплення циліндра зі смугою розвиток автоколивань вже неможливий, оскільки сталося «схоплювання» поверхонь. Тому залишається вважати, що нестійкий процес взаємодії смуги та рейки можливий при коченні колеса на межах зон ковзання та зчеплення. Для опису перехідних режимів обмежимося ділянкою контакту, що знаходиться під колесом [9]. Якщо вважати контакт пружним, то довжина ділянки визначиться на підставі [3] за формулою

$$l_1 = \sqrt{8Pr\bar{k}}, \quad (2)$$

де l_1 – довжина ділянки контакту між колесом та рейкою, що взаємодіють; P – вертикальне навантаження на колесо; r – радіус колеса; $\bar{k} = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E}$ – пружна константа; μ – коефіцієнт Пуассона; E – модуль Юнга.

Розглянемо зусилля, за рахунок яких ділянка контакту довжиною l_1 утримується в положенні динамічної рівноваги. Звертаючись до реакції пружної основи, згідно з гіпотезою Вінклера, ця реакція урівноважує вертикальне навантаження на колесо P , яку умовно вважаємо вважати постійною, тому на дотичні переміщення ділянки контакту вона впливу не робить.

Розглянемо дотичні зусилля, що діють на ділянці контакту, під впливом яких ділянка знаходиться в рівновазі. Проекція ділянки контакту на площину, що проходить через головки рейок, приймає силу інерції майданчика $F_{ін}$, горизонтальну складову пружного зв'язку $F_{пр}$ і дотичне штовхаюче зусилля T_c . Ділянку контакту колеса і рейки під дією зазначених навантажень представляємо такою, що здійснює автоколивальні рухи при їх переміщенні зі швидкістю V екіпажу. Зазначені автоколивальні рухи обумовлені нестаціонарною характеристикою тертя [2] та ефектом псевдоковзання [10].

Баланс сил на ділянці контакту призводить до рівняння виду

$$\gamma l b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \frac{b h}{l_1} \dot{\xi} = T_c, \quad (3)$$

де γ – питома маса матеріалу ділянки контакту рейки (колеса); $l_1 = \sqrt{8Pr\bar{k}}$ – довжина ділянки контакту для випадку пружної задачі; $b = \sqrt{2Pr\bar{k}}$ – ширина ділянки контакту для випадку пружної задачі; $h = \sqrt{\frac{P}{\sigma_T}}$ – товщина ущільненого поверхневого шару на майданчику контакту; ξ – зміщення точок колеса щодо точок рейки при псевдоковзанні (відносно прослизання); σ_T – межа текучості матеріалу рейки (або колеса).

Далі переходимо до рівнодіючого дотичного зусилля опору перекочування T_c , яке визначаємо на підставі виразу для моменту опору перекочування колеса M_c [11].

$$M_c = \frac{f r}{2\bar{k}} (\sqrt{8\bar{k}Pr} + \frac{\delta r}{f}), \quad (4)$$

звідки

$$T_c = \frac{M_c}{r} = \frac{f}{2\bar{k}} (\sqrt{8\bar{k}Pr} + \frac{\delta r}{f}), \quad (5)$$

де у виразах (4), (5):

$f = f(\dot{\xi})$ – коефіцієнт тертя ковзання матеріалу колеса за матеріалом рейки, як функція швидкості взаємного проковзування, може бути представлена за аналогією з [12], у вигляді кубічної залежності від $\dot{\xi}$ (рис. 2)

$$f = f_0 - \frac{3}{2}(f_0 - f_{min}) \frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}} + \frac{f_0 - f_{min}}{2} \left(\frac{\dot{\xi}}{\dot{\xi}_{кр}}\right)^3,$$

f_0 – коефіцієнт тертя спокою при $\dot{\xi}=0$; f_{min} – коефіцієнт тертя ковзання при $\dot{\xi} = \dot{\xi}_{кр}$; (тоді $f_0 - f_{min} = \Delta f$); $\dot{\xi}_{кр}$ – критична швидкість ковзання колеса по рейці, при якій $f = f_{min}$; δ – відносне ковзання між колесом і рейкою, що характеризується пружним прослизанням волокон колеса щодо поверхні рейки в напрямку, зворотному переміщенню колеса

$$\delta = \frac{\Delta\phi}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta V}{V} = \frac{-\dot{\xi}}{V}.$$

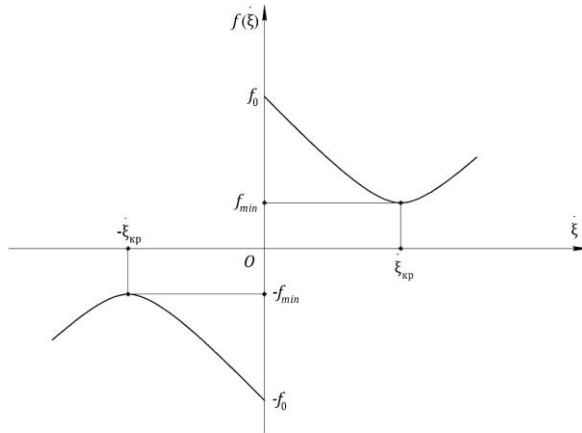


Рис. 2. Характеристика тертя колеса по рейці як функція швидкості проковзування ξ

Отже, відносне ковзання під час кочення колеса можна визначити, як відношення збільшення кутової швидкості колеса до його номінальної кутової швидкості.

Розглянемо вираз для псевдоконтактності, якщо кутова швидкість ковзання колеса буде змінною величиною, тобто $\Delta\dot{\varphi} \neq const$, тоді

$$\delta = \frac{(\dot{\varphi} + \Delta\dot{\varphi})r - V}{\omega_0 r} = \frac{\Delta\dot{\varphi}}{\omega_0}, \quad (6)$$

Прирістом лінійної швидкості колеса у виразі $V \pm \xi$ (або $\omega_0 r \pm \xi$) нехтуємо, тому що $\xi \ll V$.

Перетворюємо вираз для сили опору перекошування колеса (ролика) по рейці (пластині) залежно від відносної швидкості ковзання – $\xi/\xi_{кр}$ (або $\Delta\dot{\varphi}/\Delta\omega_{кр}$). Розрізнятимемо силу опору перекошування, прикладену до рейки (смуги) та до колеса (ролика).

При виведенні співвідношень для сили опору перекошування спочатку запишемо вираз для коефіцієнта тертя ковзання, який апроксимується у вигляді кубічної функції швидкості ковзання, згідно [12]:

а) стосовно ділянки контакту на рейці

$$f = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left(\frac{-\xi}{\xi_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left(-\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right)^3, \quad (7)$$

б) стосовно ділянки контакту на колесі

$$f = f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left(\frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\Delta\dot{\varphi}}{\Delta\omega_{кр}} \right)^3, \quad (8)$$

У наведених виразах:

$\Delta f = f_0 - f_{min}$ – збільшення коефіцієнта тертя ковзання колеса по рейці при їх взаємному проковзуванні; ξ – швидкість проковзування колеса по рейці при коченні; $\xi_{кр}$ – критична швидкість проковзування колеса по рейці, яка відповідає f_{min} ; $\Delta\dot{\varphi}$ – кутова швидкість прослизання колеса по рейці; $\Delta\omega_{кр}$ – критична кутова швидкість ковзання колеса по рейці.

Зазначимо, що V – лінійна швидкість точок обода колеса під час його кочення. Може бути, як постійною, так змінною величиною (не коливального характеру).

Тоді зусилля для перекошування колеса запишемо у вигляді:

а) для точок рейки

$$T_c = \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} \left[f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left(-\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left(-\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{r}{2k} \frac{\xi}{v}, \quad (9)$$

б) для точок колеса

$$T_c = \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} \left[f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\omega_{кр}} \right) + \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\omega_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{r}{2k} \frac{\Delta\phi}{\omega}, \quad (10)$$

Таким чином, представлена характеристика тертя як функція швидкості ковзання (7) (8). Для побудови графіка $f = f(\xi)$ необхідно знати f_0 (f_{max}), f_{min} та $\xi_{кр}$ – критичне значення швидкості ковзання.

Звернемося до механічного аспекту гіпотези Картера про псевдоковзання. Прийнято вважати, що на опорних поверхнях (рис. 1) існує зона зчеплення, яка під впливом нерівномірного розподілу тиску на майданчику контакту зміщується до краю, що набігає. Це зумовлено тим, що під впливом крутного моменту M_c нормальна реакція N зміститься на величину λ у напрямку руху колеса ($\lambda = b_1$). Тоді повна реакція S пройде через точку A та центр обертання колеса.

Складаюча повної реакції T являє собою опір руху колеса. Отже, реакція рейки N зміщена на величину λ відносно вертикальної осі, тому умовні волокна матеріалу бандажа колеса, що надходять на контактний майданчик, будуть випробовувати додатковий підпір з боку рейки, внаслідок чого в набігаючій частині опорного майданчика вони будуть стиснутими, а в збігаючій – розтягнутими.

Існує й інша гіпотеза виникнення дотичних сил зчеплення. Вона заснована на припущенні про те, що в межах опорної поверхні немає відносного зміщення волокон матеріалу бандажа колеса і рейки, а дотичні напрутки, що виникають на ній, в будь-якій точці контакту пропорційні контактним тискам (Б. С. Ковальський, М. М. Саверін, Р. Лоренц, Л. Фепль).

Деякі прихильники гіпотези, що заперечує наявність зони зчеплення, наприклад Ф. Фредерік та інші, приймають певну залежність сили тертя на опорній поверхні від швидкості пружного ковзання.

Тоді диференціальне рівняння балансу сил на ділянці контакту запишемо, з урахуванням наведених міркувань, окремо для деформаційного збільшення ділянки рейки ξ та деформаційного збільшення ділянки бандажа колеса, виходячи з очевидного співвідношення $\xi = r\Delta\phi$. Перетворимо диференціальне рівняння (3), що описує динамічно нестійкий стан майданчика контакту, виходячи з представлення характеристики тертя як функції швидкості ковзання [12], [13].

Динамічна нестійкість обумовлена мінливістю сили тертя на ділянці контакту, де є перетікання потенційної енергії деформації в кінетичну енергію виступів зовнішніх волокон колеса та рейки при їх взаємодії. Використовуючи диференціальне рівняння балансу сил у формі (3) з урахуванням виразу дотичної сили в [3] (формули (9), (10)) та кубічному закону тертя в результаті будемо мати:

$$\gamma l_1 b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \cdot \frac{b h}{l_1} \dot{\xi} = \frac{f}{2k} (\sqrt{8kPr} + \delta \frac{r}{f}), \quad (11)$$

$$\gamma l_1 b h \ddot{\xi} + \frac{2}{k} \cdot \frac{b h}{l_1} \dot{\xi} = \left[f_0 - \frac{3}{2} (f_0 - f_{min}) \cdot \left(-\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right) + \frac{f_0 - f_{min}}{2} \left(-\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] \frac{\sqrt{8kPr}}{2k} + \frac{r}{2k} \left(\frac{\xi}{v} \right), \quad (12)$$

У рівнянні (12) права частина є зусилля опору перекошування. Перший доданок у дужках відповідає другій гіпотезі виникнення сил зчеплення, згідно з якою в межах опорної поверхні немає відносного зміщення волокон матеріалу. Другий доданок у правій частині відповідає гіпотезі Картера про псевдоковзання [9] (перша гіпотеза).

Крім того, приймаємо, що коефіцієнт тертя матеріалу колеса з матеріалом рейки не є постійною величиною, а описується деякою функцією швидкості прослизання колеса по рейці, наприклад, кубічною параболою [12] або [13]. Функція має виражений мінімум f_{min} , при значенні швидкості проковзування $\xi_{кр}$. Причому для швидкостей ковзання $\xi < \xi_{кр}$ зміна $f(\xi)$ відбувається практично за лінійним законом (спадаюча ділянка кривої). При $\xi > \xi_{кр}$ крива має виражений нелінійний характер.

Якщо дотримуватися залежності (9) для зусилля перекочування колеса T_c , то за її формою видно, що T_c фактично є силою тертя, яка буде пропорційна зносу колеса та рейки, тоді при збільшенні вертикального навантаження на колесо, дотичне навантаження змінюється $T_c \sim \sqrt{P}$. Так, наприклад, зі збільшенням вертикального навантаження на колесо в межах до 15 %, дотичне зусилля T_c збільшується до 7 %, тобто $\sim \sqrt{P}$. Крім того, при збільшенні P відбувається підвищення несучої здатності пари пропорційно \sqrt{P} (внаслідок наклепу та подальшого самозміцнення).

Далі розглянемо вираз сили опору перекочування колеса T_c , формули (9), (10) з урахуванням співвідношень $-\frac{\xi}{V} = \delta$ і $f_0 - f_{min} = \Delta f$ (незалежно від диференціального рівняння (12)), причому доданки пропорційні (ξ) , $(\xi)^3$ представимо як функції відносного ковзання δ .

$$T_c = \left[-f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \left(-\frac{\xi}{V} \right) \frac{V}{\xi_{кр}} - \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \left(-\frac{\xi}{\xi} \right)^3 \left(\frac{V}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{\xi}{V} \cdot \frac{r}{2k}, \quad (13)$$

або у вигляді

$$T_c = \left[-f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \delta \frac{V}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \delta^3 \left(\frac{V}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] - \delta \frac{r}{2k}. \quad (14)$$

Якщо зусилля перекочування T_c прикладено до колеса, тоді матимемо

$$T_c = - \left[f_0 \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\sqrt{2k}}{k} \sqrt{Pr} \delta \frac{\omega}{\Delta \omega_{кр}} + \frac{\Delta f \sqrt{2k}}{2k} \sqrt{Pr} \delta^3 \left(\frac{\omega}{\Delta \omega_{кр}} \right)^3 \right] - \frac{r}{2k} \cdot \frac{\Delta \phi}{\omega}. \quad (15)$$

Судячи з виразів (13), (14), (15) сила опору перекочування залежить від нормального тиску (P), зміни коефіцієнта тертя ($f_{тер}$) між колесом і рейкою, псевдоковзання δ , швидкості руху колеса (V).

Тобто, зусилля опору руху T_c поєднує у собі зусилля опору, визначені з двох гіпотез: 1) Картера; 2) Б. С. Ковальського, М. М. Саверіна, Р. Лоренца, Л. Фепля з поправкою Ф. Фредеріка на залежність сили тертя опорної поверхні від швидкості взаємного проковзування (інакше сили опору перекочування як функції швидкості пружного прослизання).

Таким чином, перші три доданки у виразах (13), (14), (15) відповідають гіпотезі взаємодії колеса та рейки про те, що дотичні зусилля в зоні контакту пропорційні нормальному (контактному) тиску і на опорних поверхнях немає взаємного зміщення волокон (друга) гіпотеза).

Другий доданок свідчить про те, що воно є збуджуючим навантаженням для ділянки контакту бандажа і рейки і характер впливу цього навантаження на рішення рівняння (12) буде наростаючим при негативному демпфуванні та відносно малих швидкостях взаємного прослизання.

Отже, другий доданок свідчить про те, що зростання дотичного зусилля пропорційне кореню квадратному із нормального тиску \sqrt{P} , відносного ковзання

δ та швидкості кочення колеса V . Причому зростання дотичного зусилля можливе на спадаючій ділянці характеристики тертя, коли швидкість прослизання задовольняє нерівності $\xi < \xi_{кр}$ та коефіцієнт тертя змінюється в межах $f_{min} \leq f \leq f_0$. Цей діапазон зміни коефіцієнта тертя f відповідає ділянці наростання коливань, що самозбуджуються, в системі за рахунок перерозподілу енергії руху колеса в деформаційній зоні контакту колеса і рейки.

Характер впливу третього доданка у виразах (13) – (15) буде аналогічним другому, однак цей доданок вносить у коливальний процес загасаючий вплив, і його вплив стає відчутним, якщо швидкість ковзання задовольняє нерівності $\xi > \xi_{кр}$.

Так як вплив цього доданку пропорційно кубу швидкості прослизання ξ^3 (або δ^3), то дотичне зусилля отримає обмежене збільшення, при якому з подальшим збільшенням ξ , зростання амплітуд коливань може взагалі припинитися. Враховуючи те, що до другого і третього доданків входить множник V (швидкість руху колеса), то автоколивальні процеси можуть виникати в системі при різних швидкостях кочення колеса (колісної пари). На це було звернено увагу В. В. Болотіна [8], з посиланням на більш ранні роботи Дж. П. Ден-Гартога та С. П. Тимошенко про те, що при перехідних режимах роботи рухомого складу можуть виникати автоколивальні процеси на різних швидкостях його руху.

Четвертий доданок відповідає значенню зусилля опору перекочування згідно з гіпотезою Картера. За рахунок взаємодії і деформування мікронерівностей на бандажі колеса і рейці в певні моменти часу частина мікронерівностей стискається, вони накопичують потенційну енергію деформації і збільшення швидкості колеса зменшується, коли потенційної енергії, що накопичилася за для деформації мікронерівностей буде достатньо, то вона буде вивільнятися (подібно до стиснення пружини) в кінетичну енергію руху мікронерівностей і приріст швидкості руху колеса буде збільшуватися. Цей процес є взаємним на майданчиках контактування колеса та рейки, тому швидкість ковзання елементів пари буде змінюватися. Таким чином, цей процес є циклічним для змінних майданчиків контакту. У разі нескінченно довгої рейки та замкненого кола контакту для колеса процес самозбудження автоколиваний може мати безперервний характер. Як випливає з (14) обидві гіпотези взаємодії мають фрикційну природу і представлені у наведених виразах. Якщо покладатися на використання гіпотези Картера при теоретичному обґрунтуванні впливу зусилля перекочування на нестійкі динамічні режими при розгонах і гальмуваннях рухомих складів, її застосування вносить у розрахунки певні похибки, оскільки присутність доданка $T_{ск} = \delta r / 2k$ у диференціальному рівнянні коливань майданчика контакту поверхневих шарів призводить до розвитку зростаючих автоколиваний, що не підтверджується при експлуатації реальних рухомих складів. Тобто гіпотеза Картера достовірно описує розвиток зусиль псевдоковзання в межах дуже вузького діапазону зміни швидкості прослизання, при цьому зростання амплітуд автоколиваний $T_{ск}$ і ξ , очевидно, повинно компенсуватися введенням у формулу Картера додаткових нелінійних доданків, які не були враховані автором гіпотези, наприклад, як

$$T_{ск} = -k\delta + k_1\delta^2 + k_2\delta^3 + \dots, \quad (16)$$

де $k = -\frac{r}{2k}$ – коефіцієнт псевдоковзання в інтерпретації Л. А. Галина,

І. Т. Горячової [3]; δ – відносне ковзання між колесом та рейкою; $\bar{k} = \frac{4(1-\mu^2)}{\pi E}$ –

пружна константа матеріалу; μ – коефіцієнт Пуассона; E – модуль Юнга; k_1, k_2 – невизначені коефіцієнти, значення яких можуть бути встановлені за уточненою залежністю $T_{ск} = T_{ск}(\delta)$, що є завданням для подальших досліджень.

Отримані загальні залежності для сили опору перекокування, представлені в (13), (14), (15) є впливом, що стимулює для системи диференціальних рівнянь, які зв'язують автоколивальний процес в зоні контакту колеса і рейки з розгойдуванням коливальних рухів в приводному механізмі провідної колісної пари.

З метою спрощення пов'язаного завдання про порушення спільних коливальних рухів при прослизанні колеса в зоні контакту з рейкою та розвитку перехідних процесів у приводному механізмі ведучої колісної пари попередньо вважатимемо, що електромеханічна система приводу колісної пари є абсолютно жорсткою тому автоколивальні процеси в зоні контакту не мають суттєвий вплив на приводні механізми.

Звернемося до структури рівнянь (12), а також виразів (13), (14), (15)

1) перший доданок лівої частини є силою інерції поверхневих шарів у зоні контакту колеса та рейки, величина його може бути малим параметром для ξ при розвитку перехідних режимів;

2) другий доданок лівої частини забезпечує змінний «жорсткий» взаємозв'язок з прилеглими шарами матеріалу, його вплив може бути значним;

3) перший доданок у правій частині є постійною складовою сили опору T_0 , тобто найбільше значення сили опору T_c ;

4) перша, друга і третя складові правої частини (12), а також вирази (13), (14), (15) у сумі являють собою мінімальне значення сили опору T_{min} для точки $\xi = \xi_{кр}$;

5) четвертий доданок правої частини (12) являє собою деформаційну складову при прокочуванні колеса по рейці (в поданні Картера про псевдоковзання), мабуть, пов'язану з фрикційними характеристиками деталей, що контактують, але не знаходить відображення ні в гіпотезі Картера, ні в інших гіпотезах взаємодії колеса та рейки [9]. Відзначимо, що четвертий доданок не відображає нелінійних характеристик матеріалів колеса та рейки при псевдоковзанні.

Розглянемо процес контактної взаємодії під час кочення колеса по рейці.

У силу того, що рейка є об'єктом значної протяжності, а колесо при коченні здійснює безперервний контакт з колійною структурою, тому автоколивальний процес на майданчику контакту, що рухається, можна вважати безперервним. Для цього завдання абсолютне переміщення майданчика контакту x можна вважати складеним із суми переносного руху майданчика Vt при швидкості екіпажу V та відносного переміщення майданчика при автоколюваннях ξ , тобто

$$x = Vt + \xi \quad (\xi = x - Vt), \quad (17)$$

$$m\ddot{x} + cx = T_c(\dot{x} - V), \quad (18)$$

або з урахуванням (17)

$$m\ddot{\xi} + c(\xi + Vt) = T_c(\dot{\xi}). \quad (19)$$

У наведених рівняннях:

$m = \gamma l_1 bh$ – маса ділянки контакту колеса та рейки (з боку рейки); $c = \frac{2bh}{kl_1}$ – жорсткість поздовжнього зв'язку ділянки контакту з основним масивом рейки; T_c – сила опору перекокування колеса по рейці може бути записана з урахуванням фрикційної та деформаційної складових (з гіпотези Картера).

Тоді вираз (19) є рівнянням, що описує автоколивання ділянки контакту, що переміщається по рейці зі швидкістю V .

Якщо змодельовати коливальний процес так, що ділянка контакту, яка переміщається, розміщена в рухомій системі координат, горизонтальна вісь якої і початок координат рухаються зі швидкістю колісної пари V , у цьому випадку автоколивальний процес може бути описаний рівнянням

$$m\ddot{\xi} + c\xi = -T_c, \quad (20)$$

при цьому в рухомій системі координат швидкість руху ділянки контакту дорівнюватиме 0 ($V = 0$).

При необхідності ввести додаткові рівняння, що враховують рух колісної пари та приводу до рівняння (19) вводимо додаткову змінну замість $Vt = \xi_1$ та додаткове рівняння, що враховує рух колісної пари.

Виходячи з викладених міркувань рівняння, що описує самозбуджуючі коливання на ділянці контакту запишемо у вигляді

$$\gamma l b h \ddot{\xi} + \frac{2bh}{kl_1} \dot{\xi} = -\frac{\sqrt{kPr}}{k} \left[f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \left(\frac{\dot{\xi}}{V} \right) \frac{V}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\dot{\xi}}{V} \right)^3 \left(\frac{V}{\xi_{кр}} \right)^3 \right] + \frac{\dot{\xi}}{V} \cdot \frac{r}{2k}. \quad (21)$$

Рівняння (21) записано для рейки, але за аналогією може бути записано і для колеса з урахуванням електромеханічної системи приводу колісної пари (а також з урахуванням рівнянь руху колеса та приводу колісної пари, з'єднаних ділянкою осі колеса з редуктором та двигуном).

Рухи, які описуються (21) правильно віднести до релаксаційних коливань, оскільки цей процес у ряді випадків мало нагадує гармонійні (або квазігармонійні) рухи. В цьому випадку коливальний процес розпадається на два, які чергуються і істотно відрізняються один від одного:

а) у стані, коли сили пружності майданчика контакту майже врівноважуються зусиллями опору руху (T_c)

$$m\ddot{\xi} = \gamma l_1 b h \ddot{\xi} \ll \frac{2bh}{kl_1} |\dot{\xi}| \approx |T_c(\dot{\xi})|. \quad (22)$$

При малих m система буде мати невеликі прискорення, що призводить в цих станах до порівняно повільних змінювань швидкості, тому силою інерції можна знехтувати.

б) в стані, при якому сила тертя і сила пружності не врівноважуються, сили інерції будуть дуже великі, але маса майданчика m в цьому випадку дуже мала. Тобто на фазовій траєкторії точка, що зображає, буде переміщатися з нескінченно великим прискоренням, яке буде змінюватися стрибкоподібно. [13] (рис. 3).

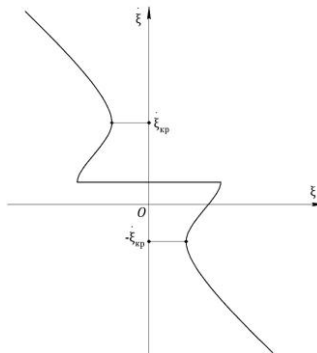


Рис. 3. Залежність швидкості проковзування колеса по рейці $\dot{\xi}$ від координати ξ при розривних автоколиваннях

Нескінченні прискорення йдуть з точок на нескінченності до точок характеристики тертя [13]. Тобто при зміні стану взаємодії швидкість ξ змінюється «стрибком» при незмінному значенні ξ . Іншими словами, елементи рейки захоплюються колесом і рухаються зі швидкістю колеса, при цьому пружні зв'язки майданчика контакту деформуються і сили пружності (і потенційна енергія) на майданчику контакту зростають, разом зростає сила тертя, залишаючись рівною силі пружності. Коли значення сили пружності дорівнюватиме найбільшому значенню сили тертя, відбувається стрибкоподібна зміна швидкості майданчика контакту ξ за величиною та напрямом при незмінному (миттєвому) значенні пружної сили. Далі відбувається безперервна зміна швидкості ξ та координати ξ , поки точка контакту не перейде в точку характеристики тертя, що відповідає її мінімуму.

Далі рух відбувається так само, точка контакту переміщається вздовж рейки, і відбуваються автоколивання (розривні) при коченні колеса.

Амплітуда автоколивань координати ξ може бути визначена за різницею максимальної та мінімальної сили тертя [13].

$$\xi_m = \frac{1}{2} \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l_1}{2bh} = \frac{l_1}{4bh} \sqrt{\bar{k} Pr} (f_0 - f_{min}) = \frac{\Delta f l_1}{4bh} \sqrt{\bar{k} Pr}. \quad (23)$$

Для визначення частини періоду коливань на ділянці схоплювання колесом точок рейки (утворення містків «зварювання» за Боуденом) використовуємо залежність

$$t_1 = \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l_1}{2bhv}. \quad (24)$$

Далі визначимо частину періоду коливань на ділянці прослизання, використовуючи дані [9, 10]

Запишемо вираз для сили опору руху колеса без урахування впливу псевдоковзання, тобто орієнтуємося на другу гіпотезу виникнення дотичних сил, де відсутні відносні зсуви матеріалу (або відсутня деформаційна природа виникнення дотичних сил)

$$t_2 = -\frac{\bar{k} l_1}{2bh} \int_{\xi_c}^{\xi_{кр}} \frac{T'_c(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (25)$$

$$T_c = -\frac{\sqrt{\bar{k} Pr}}{\bar{k}} \left[f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\xi}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\xi}{\xi_{кр}} \right)^3 \right]. \quad (26)$$

Визначимо межі інтегрування, верхня межа дорівнює $\xi_{кр}$, тобто значенню швидкості прослизання при f_{min} . Нижню межу інтегрування визначимо за умови

$$T_{c0}(\xi_c) = T_{c0}. \quad (27)$$

З виразу (26) визначимо

$$T_{c0} = -\frac{\sqrt{\bar{k} Pr}}{\bar{k}} \left[f_0 - \frac{3}{2} \Delta f \frac{\xi_c}{\xi_{кр}} + \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\xi_c}{\xi_{кр}} \right)^3 \right]. \quad (28)$$

Тоді з (27), (28) отримаємо

$$\frac{3}{2} \Delta f \frac{\xi_c}{\xi_{кр}} = \frac{\Delta f}{2} \left(\frac{\xi_c}{\xi_{кр}} \right)^3. \quad (29)$$

Звідки

$$3\xi_{кр}^2 = \xi_c^2, \quad (30)$$

$$\xi_c = \pm \xi_{кр} \sqrt{3}, \quad (31)$$

приймаючи в (31) знак «+», отримаємо $\xi_{кр} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xi_c$.

Запишемо вираз для похідної від T_c за ξ

$$T'_c = -\frac{\sqrt{k Pr}}{\bar{k}} \left[-\frac{3 \Delta f}{2 \xi_{кр}} + \frac{3}{2} \Delta f \left(\frac{\xi^2}{\xi_{кр}^3} \right) \right] \quad (32)$$

Тоді визначимо другу межу інтегрування для виразу (25) та вид підінтегральної функції.

На підставі викладеного (25) набуде вигляду

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{1}{c} \int_{\xi_c}^{\xi_{кр}} \frac{\sqrt{k Pr} 3}{\bar{k}} \Delta f \left[-\frac{1}{\xi_{кр}} + \frac{\xi^2}{\xi_{кр}^3} \right] \frac{d\xi}{\xi} = \frac{1 \sqrt{k Pr} 3}{c \bar{k}} \Delta f \int_{\xi_c}^{\xi_{кр}} \left(-\frac{1}{\xi_{кр} \cdot \xi} + \frac{\xi}{\xi_{кр}^2} \right) d\xi = \\ &= \frac{3 \Delta f l_1}{4 b h} \sqrt{k Pr} \left[-\frac{1}{\xi_{кр}} (\ln \xi_{кр} - \ln(\sqrt{3} \xi_{кр})) + \frac{1}{2 \xi_{кр}^3} (\xi_{кр}^3 - 3 \xi_{кр}^2) \right] = \\ &= \frac{3 \Delta f l_1}{4 b h} \sqrt{k Pr} \left[-\frac{1}{\xi_{кр}} (\ln \xi_{кр} - \ln \xi_{кр} - \ln \sqrt{3}) + \frac{\xi_{кр}^2}{2 \xi_{кр}^3} (\xi_{кр} - 3) \right] = \\ &= \frac{3 \Delta f l_1}{4 b h} \sqrt{k Pr} \left(\frac{\ln 3}{2 \xi_{кр}} - \frac{1}{\xi_{кр}} \right). \end{aligned} \quad (33)$$

Вираз (24) для визначення t_1 перетворюємо на вигляд

$$t_1 = \frac{(T_{c0} - T_{c1}) \bar{k} l_1}{2 b h V} = \frac{\Delta f l_1}{2 b h V} \sqrt{k Pr}. \quad (34)$$

Тоді повний цикл релаксаційних коливань визначимо з виразу

$$t_2 = t_1 + t_2 = \frac{\Delta f l_1}{2 b h} \sqrt{k Pr} \left[\frac{1}{V} + \frac{3}{2} \left(\frac{\ln 3}{\xi_{кр}} - \frac{1}{\xi_{кр}} \right) \right] = \frac{\Delta f l_1}{2 b h} \sqrt{k Pr} \left[\frac{1}{V} + \frac{3}{2 \xi_{кр}} (\ln 3 - 1) \right]. \quad (35)$$

При розгляді релаксаційних коливань ділянки рейки (або колеса) отримані значення амплітуди коливань ξ_m (23) та періоду коливань t_2 (35) виражені через дискретні величини, такі як значення коефіцієнтів тертя f_0 (f_{max}), f_{min} , геометричні розміри майданчика контакту (l_1 , b , h), пружні константи \bar{k} (μ , E), зовнішнє навантаження \sqrt{P} , швидкість руху колеса V , радіус колеса r . При цьому потрібна функція $\xi = \xi(t)$ є шматково-гладкою (безперервною) функцією, яка на ділянці $0 \leq t \leq t_1$ змінюється за лінійним законом, так за час протікання цього інтервалу майданчик контакту на рейці рухається разом із майданчиком контакту на колесі. Якщо звернемося до тимчасового інтервалу $t_1 \leq t \leq t_2$, то тут сил тертя між майданчиками контакту стає недостатньо для утримання плями контакту колеса на рейці, що знаходиться під впливом сил пружності та інерції. Після закінчення тимчасового інтервалу ($t_1 + t_2$) пляма контакту колеса на рейці буде «підхоплена» наступним елементом колеса, де сила тертя знову врівноважена силами пружності.

Далі циклічність процесу багаторазово повторюватиметься, поки існують умови виникнення та підтримки релаксаційних (розривних) процесів.

У ряді випадків взаємодії колеса та рейки має місце «схоплювання» поверхонь контакту, як це описано вище при релаксаційних автоколиваннях. В інших випадках контактування колеса та рейки проявляється ефект взаємодії без видимих зупинок, при цьому змінюється швидкість прослизання між майданчиками і, як наслідок, відбувається зміна характеристики (коефіцієнта) тертя як функції швидкості ковзання. Такі пульсації сили опору руху призводять до наведення в рейці, колесі та приводних механізмах коливань, які формою нагадують гармонійні коливання. Як впливає з [12] для моделювання таких автоколивань достатньо скористатися кубічною характеристикою процесу тертя. Однак, згідно [12] у кубічній характеристиці тертя присутні три невідомі величини - коефіцієнти \bar{a} , \bar{b} і критична швидкість прослизання $\xi_{кр}$ при якій

реалізується f_{min} . Ці величини пропонується визначати через f_0 і f_{min} . Разом з тим, без додаткових даних залежності $f = f(\xi)$, де відсутні величини \bar{a} , \bar{b} і $\xi_{кр} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{\bar{b}}}$, знайти неможливо.

Тому пропонуємо апроксимувати характеристику експериментальної кривої, і поставити їй у відповідність функціональну залежність і потім, шляхом розкладання цієї функції в ряд Маклорена (в околиці точки $\xi_{кр}$) і обмежимося в розкладанні доданками, пропорційними ξ та ξ^3 . Тоді кубічна характеристика сил тертя матиме вигляд:

$$f(\xi) = f_0 - f'(\xi_{кр})\xi + \frac{f'''(\xi_{кр})\xi^3}{6}, \quad (36)$$

та коефіцієнти \bar{a} , \bar{b} у розкладанні [12] запишемо у вигляді

$$\bar{a} = f'(\xi_{кр}); \bar{b} = \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}.$$

У цьому випадку зусилля опору перекочування на підставі [3] набуде вигляду (для ділянки контакту на рейці)

$$T_c = \frac{-\sqrt{8Pkr}}{2\bar{k}} \left[f_0 - f'(\xi_{кр})\xi + \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}(\xi)^3 \right] + \frac{r}{2} \frac{\xi}{V}, \quad (37)$$

(інакше зусилля, додане до плями контакту при збіганні колеса з рейки).

Тоді зусилля опору перекочування, прикладене до колеса, запишемо у вигляді

$$T_c = \frac{\sqrt{8Pkr}}{2\bar{k}} \left[f_0 - f'(\dot{\theta}_{кр})\dot{\theta} + \frac{f'''(\dot{\theta}_{кр})}{6}\dot{\theta}^3 \right] - \frac{r}{2} \frac{\dot{\theta}}{\omega}. \quad (38)$$

Внаслідок відносних переміщень волокон бандажа і рейки, обумовлених пружністю їх матеріалів, виявляється, що при русі колеса фактичний шлях, що проходить його центром не дорівнює шляху, що проходить його центром за умови абсолютно жорсткого колеса. Це явище зветься псевдоковзання за Картером [10]. Псевдоковзання визначаємо за формулами $\delta = \frac{V-r\dot{\phi}}{V}$; $\delta = \frac{\omega r - V}{V}$, де V , $r\dot{\phi}$ – позначення лінійних швидкостей обода колеса; ω , $\dot{\phi}$ – кутова частота обертання колеса; r – радіус зовнішніх точок колеса; $\dot{\theta} = \dot{\phi} - \omega$ – кутова швидкість ковзання колеса.

Запишемо диференціальне рівняння автоколивань ділянки рейки на контактні колесо – рейка з урахуванням (37)

$$\ddot{\xi} + \frac{2}{\gamma \bar{k} l_1^2} \dot{\xi} = -\frac{\sqrt{2\bar{k}\sqrt{P}}}{\gamma \bar{k} l_1 b h} \left[f_0 - f'(\xi_{кр})\xi + \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}(\xi)^3 \right] + \frac{r}{\gamma 2\bar{k} l_1 b h V} \dot{\xi}, \quad (39)$$

де l_1 , b , h – відповідно довжина, ширина і товщина елемента рейки, що взаємодіє з колесом (під h зазвичай розуміють товщину зміцненого шару ділянки контакту); P – вертикальне навантаження на колесо; f_0 – найбільше значення коефіцієнта тертя; f_{min} – найменше значення коефіцієнта тертя, яке він приймає при значенні швидкості проковзування між колесом та рейкою; $\xi = \xi_{кр}$ – (критичне значення швидкості прослизання) – постійна величина.

За аналогією з (39) можна записати рівняння автоколивань ділянки колеса на контактні колесо – рейка.

Розглядаючи рівняння (39) вважаємо, що коефіцієнти при ξ , $(\xi)^3$ можна трактувати як малі параметри. Тоді вважаємо, що всі складові рівняння мають один порядок малості, тому ми не можемо нехтувати інерційним доданком. Для такого випадку виникнення автоколивань вважаємо, що ці коливання є квазігармонічними (тобто близькими до гармонійних власних коливань системи).

Відмінність від гармонійних коливань виражатиметься в змінних амплітуді та початковій фазі коливань.

Перетворимо вираз (39) до вигляду, зручного для застосування методу малого параметра.

Для цього перейдемо від змінної ξ до змінної q згідно з виразом

$$q = \xi - \frac{f(\xi_{\text{кр}})\sqrt{2k\sqrt{Pr}bh}}{k^2\gamma l_1^2 bh} = \xi - \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k^2\gamma l_1^2} f(\xi_{\text{кр}}). \quad (40)$$

Тоді рівняння (39) подаємо у вигляді

$$\ddot{q}_\tau + q = \left[\frac{r}{2k\gamma l_1^2 bh} \frac{\dot{q}_\tau}{v} + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f'(\xi_{\text{кр}}) \dot{q}_\tau - \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} \cdot \frac{f'''(\xi_{\text{кр}})}{6} (\dot{q}_\tau)^3 \right], \quad (41)$$

де $c = \frac{2bh}{kl_1}$ – поздовжня жорсткість умовної балки на контакті колесо – рейка; (γ – питома маса ділянки контакту на рейці чи колесі); ω_0 – власна частота поздовжніх коливань умовної балки на контакті «колесо – рейка»; τ – безрозмірний час (t – реальний час); \dot{q}_τ – похідна функції q по змінній τ .

У виразі (39) прийняті позначення:

$$\omega_0^2 = \frac{2bh}{kl_1^2 \gamma bh} = \frac{2b}{kl_1^2 \gamma}; \quad \tau = \omega_0 t = \sqrt{\frac{2b}{kl_1^2 \gamma}} t.$$

Так як у рівнянні (39) присутні постійні доданки, то рішення рівняння (41) містить, крім загального, ще часткове рішення, іншими словами, рішення рівняння (41) шукаємо у вигляді

$$\bar{q}(\tau) = q(\tau) + q_0, \quad (42)$$

де q_0 – часткове рішення має вигляд

$$q_0 = \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f_0.$$

Тоді загальне рішення змінної частини (39), (41) шукатимемо у вигляді

$$q(\tau) = \rho \cos(\tau - \nu), \quad (43)$$

де $\rho = \rho(\tau)$ – змінна амплітуда коливань; ν – початкова фаза.

За аналогією з [14] рівняння першого наближення визначення функцій $\rho = \rho(\tau)$, $\nu = \nu(\tau)$ матимуть вигляд

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \Phi(\rho); \quad \frac{d\nu}{d\tau} = \Psi(\rho), \quad (44)$$

де $\Phi(\rho) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \xi - \rho \sin \xi) \sin \xi d\xi$,

$\Psi(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho \cos \xi - \rho \sin \xi) \cos \xi d\xi$,

$F(\rho \cos \xi - \rho \sin \xi)$ – права частина рівняння (41) без урахування постійного доданку $q_0 \left\{ q_0 = \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f_0 \right\}$.

Можна показати, що

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{d\tau} = \Phi(\rho) = -\frac{\rho}{2} \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 \right) \\ \frac{d\nu}{d\tau} = \Psi(\rho) = 0 \end{cases}. \quad (45)$$

Стан рівноваги для першого рівняння (45) визначається корінням рівняння

$$\rho \left(\alpha + \frac{3}{4} \beta \rho^2 \right) = 0, \quad (46)$$

звідки $\rho_1 = 0$; $\rho_2 = \sqrt{-\frac{4\alpha}{3\beta}}$, (47)

де $\alpha = \frac{r}{2k\gamma^2 l_1 bh v} + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 bh} f'(\xi_{\text{кр}})$,

$$\beta = -\frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{\bar{k}\gamma l_1 b h} \cdot \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}.$$

Тоді диференціальне рівняння для визначення змінної амплітуди коливань матиме вигляд згідно з [14]

$$\dot{\rho} = \frac{\alpha\rho}{2} - \frac{3}{4}\beta\rho^3. \quad (48)$$

Диференціальне рівняння (48) перепишемо у стандартній формі

$$2\dot{\rho} - \alpha\rho + \frac{3}{4}\beta\rho^3 = 0. \quad (49)$$

У цьому рівнянні розділимо змінні

$$2 \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{2\rho}{(\alpha - \frac{3}{4}\beta\rho^2)\rho} = \tau, \quad (50)$$

звідки

$$\rho(\tau) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\tau}}}. \quad (51)$$

Приймаємо

$$\rho_0 = q_0 \quad (52)$$

як початкова умова для змінної амплітуди $\rho(\tau)$. Якщо спрямувати час у нескінченність ($\tau \rightarrow \infty$), то з виразу (51) випливає

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho(\tau) = \rho_{max} = \sqrt{-\frac{4}{3}\beta}. \quad (53)$$

де $\tau = 0$; $\rho(\tau) = \rho_0$.

Картину збудження коливань можна уявити так: від деякого поштовху на майданчику торкання виникає пробуксування (з початковою амплітудою коливань $\rho_0 = q_0$), при цьому збуджуються автоколивання, що не встановилися, які через деякий (невеликий) час встановлюються і перетворюються на стаціонарні автоколивання.

Вираз (53) визначає максимальну амплітуду автоколивань у вигляді кореня квадратного відношення коефіцієнтів виразів (46), (47), тобто вирази $\frac{\alpha}{\beta}$ з урахуванням різних знаків. Це відношення складається з двох параметрів.

Перший – прямо пропорційний радіусу колеса r , модулю пружності колеса E (або рейки) у ступені $\frac{1}{2}$ (через пружну константу \bar{k}); обернено пропорційний лінійній швидкості центру колеса V , кореня квадратного з вертикального навантаження та коефіцієнта \bar{b} при кубі швидкості прослизання ($b = \frac{f'''(\xi_{кр})}{6}$) для характеристики тертя ковзання (рис.2).

Другий коефіцієнт пропорційний лише критичній швидкості ковзання, тобто швидкості, при якій $f(\xi_{кр}) = f_{min}$, в цьому випадку

$$\xi_{кр} = \sqrt{\frac{6f'(\xi)}{f'''(\xi)}} = \sqrt{\frac{\bar{a}}{3\bar{b}}}. \quad (54)$$

Таким чином, найбільше значення амплітуди автоколивань у розгорнутому вигляді може бути представлене наступним чином

$$\rho_m = \sqrt{8 \left[\frac{r}{2\gamma\sqrt{2k\sqrt{Pr}}V f'''(\xi)} + \frac{f'(\xi)_{кр}}{f'''(\xi)_{кр}} \right]}. \quad (55)$$

З виразу (55) випливає, що ρ_m не залежить від розмірів майданчика контакту та товщини ущільненого шару (l_1, b, h), при цьому для коліс з великим радіусом

катання спостерігається збільшення ρ_m у ступені $\frac{1}{4}$, крім того, зростання вертикального навантаження на колесо P сприяє зниженню амплітуди автоколивань ρ_m у ступені $\frac{1}{4}$. Також відзначимо вплив на ρ_m характеристики тертя $f(\xi_{кр})$ у точці, що відповідає критичній швидкості прослизання $\xi_{кр}$.

Для отримання деформаційного зміщення ділянки контакту перейдемо до старої координати $\xi(t)$

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{k\gamma l_1 b h} f_0 + \frac{\sqrt{2k\sqrt{Pr}}}{\gamma k^2 l_1^2} f(\xi_{кр}). \quad (56)$$

Звернемося до виразу, що описує вібраційне зміщення ділянки контакту (56) колеса і рейки, який теоретично представляє еліптичну ділянку, що при припрацюванні колеса і рейки набуває прямокутної форми зі сторонами a , b та завтовшки h , вказана ділянка примикає по довжині великої осі еліпса до вільних від навантажень елементів по довжині рейки за допомогою поздовжніх зв'язків, що мають поздовжню жорсткість c .

В силу того, що ділянка контакту, що розглядається, є розтягнутою і навантаженою вертикальним зусиллям, то ми нехтуємо його вертикальними зв'язками з внутрішніми шарами, розташованими на глибині рейки $\delta > h$.

Також для ділянки контакту приймаємо, що дисипативні втрати при перекочуванні колеса (сукупності коліс) по рейці є «малими» і на першому етапі розгляду сила дисипації, віднесена до маси ділянки контакту, є малим параметром та її впливом на авто коливальний процес нехтуємо.

Розглянемо структуру виразу (56) для переміщення $\xi(t)$, воно складається з трьох складових.

Звернемося до першого доданку, судячи з його вигляду, воно визначає автоколивальний процес, що відбувається за квазігармонійним законом із власною частотою коливань ділянки контакту колеса та рейки та змінною амплітудою. При цьому початкова фаза коливань, згідно [14], також є малим параметром і тому, нехтуючи доданком у рівнянні (39), що містить швидкість ковзання (і малий параметр), а також початкову фазу, ми не вносимо істотних похибок у рівняння (39) та його рішення (56).

Другий доданок виразу (56) є частковим рішенням рівняння (39) у припущенні, що майданчик навантажений постійним розтягуючим зусиллям T_0 , а також вертикальним зусиллям \sqrt{P} , при дії на майданчику контакту коефіцієнта тертя спокою f_0 .

Третій доданок є постійною складовою, обумовленою зворотною заміною змінної τ на початкову змінну t . Ця складова пропорційна вертикальному зусиллю \sqrt{P} при дії на майданчику контакту коефіцієнта тертя ковзання $f(\xi_{кр}) = f_{min}$.

Щодо постійних коефіцієнтів виразу (56) встановлено таке – коефіцієнт α обернено пропорційний лінійній швидкості осі колеса (колісної пари) V і прямо пропорційний похідній від функції тертя у точці $\xi_{кр}$, формула (47), вплив інших параметрів на α та β несуттєвий, тому що вирішальне значення має відношення (53).

Наведений вираз (56) може бути безпосередньо використаний для визначення дотичного зусилля, що передається від колеса рейці (37).

Однак, в результаті диференціювання (56) та подальших перетворень, кінцевий результат стає громіздким.

Крім того, при вирішенні рівняння (41) був використаний метод Ван дер Поля (метод амплітуд, що повільно змінюються,) згідно з яким на періодичне рішення $\xi(t)$ накладаються додаткові умови [8], [14], використання яких дозволяє отримати швидкість ковзання двох майданчиків контакту у вигляді

$$\dot{\xi}(t) = -A(t)\omega_0 \sin(\omega_0 t + v), \quad (57)$$

де $A(t) = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha t}}}$ – змінна амплітуда автоколивань; v – початкова фаза автоколивань, постійна величина, яка для умов даної задачі прийнята рівною нулю.

При такому підході і для подальших викладок з використанням виразу T_c теж отримаємо громіздкий результат.

Далі звернемося до методу малого параметра при розгляді та аналізі рівнянь (12), (21). Оскільки маса ділянки контакту кожної з контактуючих деталей буде незначною, вважатимемо її малим параметром μ при старшій похідній $\mu = \gamma l_1 b h$, тоді замість рівняння (12) або (21) матимемо

$$c\ddot{\xi}(t) = T_c(\ddot{\xi}), \quad (58)$$

тобто в рівнянні (12) або (21) нехтуємо інерційною складовою. Звідси, для того, щоб отримати зусилля перекочування колеса досить вираз (56) помножити на жорсткість зовнішніх шарів контактної майданчика (як для рейки, так і для колеса) $c = \frac{2bh}{kl_1}$, тоді отримаємо (або у вигляді (63))

$$T_c = \frac{2bh}{kl_1} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}} \cdot \cos\omega_0 t + \frac{2\sqrt{2k}\sqrt{Pr}bh}{\gamma k^2 l_1^2 bh} f_0 + \frac{\sqrt{2k}\sqrt{Pr}2bh}{\gamma k^3 l_1^3} f_{min}. \quad (59)$$

Введемо позначення

$$T_1 = \frac{2bh}{kl_1} \cdot \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\frac{3}{4}\beta - (\frac{3}{4}\beta - \frac{\alpha}{\rho_0^2})e^{-\alpha\omega_0 t}}}, \quad (60)$$

$$T_0 = T_2 + T_3 = \frac{2\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{\gamma k^2 l_1^2} f_0 + \frac{2\sqrt{2k}\sqrt{Pr}}{\gamma k^3 l_1^3}. \quad (61)$$

Таким чином, дотичне навантаження, прикладене до майданчика контакту колеса і рейки, а також попереду гребеня на рейці, утвореного колесом, що набігає (або аналогічного гребеня на колесі) може бути представлена як параметричне навантаження у формі Матьє-Хілла у вигляді

$$T_c = T_1(t)\cos\omega_0 t + T_0, \quad (62)$$

або

$$T_c = T_1 \cos\omega_0 t + T_0, \quad (63)$$

якщо рахувати для деякого короткого проміжку часу $T_1 = const$.

Зазначимо, що амплітудне значення T_1 збігається з найбільшим значенням функції $\rho(\tau) = \rho_m$ з точністю до постійного множника і при цьому не залежить від розмірів майданчика контакту та товщини ущільненого шару. Судячи з формул (55), (60) визначальними факторами для збільшення ρ_m є: \sqrt{r} , \sqrt{E} , $\frac{1}{\sqrt{P}}$, V , а також складові елементи характеристики тертя. Величини \sqrt{r} , \sqrt{E} є заданими, швидкість V (потяга) змінюється в широких межах і тільки навантаженням на колесо $\frac{1}{\sqrt{P}}$ можна зменшити амплітуди автоколивань провідних коліс, а також

підвищити працездатність пари колесо – рейку за рахунок поверхневого зміцнення зовнішніх шарів деталей, що взаємодіють.

Розглянемо механіку деформаційних процесів на рейці в області, розташованій попереду колеса, що котиться. Уявимо, що сила опору перекошування T_c «зіскочивши» з майданчика контакту, передається на деформаційний гребінь, розташований попереду точки взаємодії колеса та рейки. При цьому є два підходи до визначення частини зусилля T_c , переданого на деформаційний гребінь:

I – зусилля на гребені залежить від розтягування майданчика контакту Δl_1 та стискування ділянки рейки, що випереджає деформаційний гребінь Δl_2 , приймаємо рівним збільшенню довжини ділянки контакту $\Delta l_1 = \Delta l_2$.

II – зусилля T_c повністю передається деформаційному гребеню, виходячи з припущення, що незначна частина T_c викликає розтягування ділянки контакту, а переважна його частина викликає стиснення поверхневих шарів матеріалу попереду гребеня (зупинимося на II підході). При русі колеса деформаційна хвиля, що утворилася, переміщається вздовж рейки зі швидкістю V колеса (екіпажу).

Розглянутий рейковий шлях схематизований у вигляді анізотропного середовища, представленого тонким поверхневим шаром, з'єднаним пружними зв'язками (переважно вертикальними) з менш міцною серцевиною. Як впливає з роботи [15] поверхневі деформаційні ефекти виявляються в тонких зовнішніх шарах, тому розрахункова схема завдання представлена у вигляді деформованого поверхневого шару, що спирається на пружну основу та навантаженого поздовжнім (параметричним) навантаженням T_c , формула (59) чи (62). Поверхневий шар завтовшки h під дією навантаження T_c зазнає втрати поздовжньої стійкості, як для випадку балки з пружною Вінклеровою основою [16].

Якщо рахувати навантаження T_c , прикладеного до гребеня на рейці, воно призводить до хвилеподібних деформацій поверхневих шарів, які можуть приймати пружний і непружний характер. Тобто хвиля деформації з кількома гребенями випереджає колесо, що набігає (рис. 4).

Ця хвиля знаходиться в рухомому стані (біжуча хвиля), причому довжина цієї ділянки і кількість напівхвиль деформації поки що залишаються невідомими. Для визначення довжини деформованих поверхневих шарів рейки використовуємо підхід, застосований у роботі [17]. У роботі показано, що якщо $T_c \geq T_{кр}$, то форма поверхневих шарів набуває вигляду синусоїдальної кривої («залишкової» хвильової поверхні). У випадку, коли T_c трохи менше $T_{кр}$ ($T_c < T_{кр}$), хвилеутворення теж відбувається, при цьому деформації поверхневих шарів не будуть залишковими.

Для визначення величин l_2 , k довжини деформованої ділянки та кількості напівхвиль виходитимемо з результатів робіт [15], [16], [17]. Як впливає з [16] жорсткість пружної основи пов'язана з довжиною балки, що втратила пружну стійкість, і числом напівхвиль. Далі використовуємо рівняння поздовжнього вигину поверхневих шарів [17], з якого визначимо критичну силу $T_{кр}$. Це рівняння матиме вигляд

$$E_n I \frac{d^4 w}{dx^4} + T_{кр} \frac{d^2 w}{dx^2} + \beta w = 0. \quad (64)$$

Рішення (64) шукаємо у вигляді

$$w(x) = w_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (65)$$

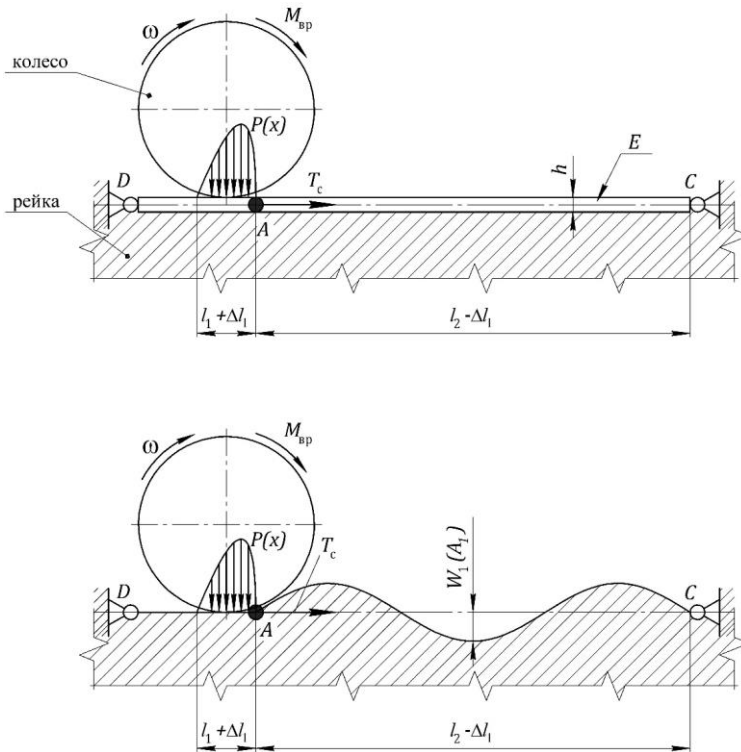


Рис. 4. До деформування поверхневих шарів рейки попереду колеса, що набігає: E – поверхневий шар рейки у вигляді балки на пружній основі; h – товщина балки; D, A, C – умовні опори балки; $M_{вр}$ – обертальний момент на колесі.

Після підстановки (65) у рівняння (64) отримаємо

$$E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l^4} w_k \sin \frac{k\pi x}{l} - T_{кр} \frac{k^2 \pi^2}{l^2} w_k \sin \frac{k\pi x}{l} + \beta w_k \sin \frac{k\pi x}{l} = 0. \quad (66)$$

Звідки критична сила дорівнюватиме

$$T_{кр} = E_n I \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\beta l^2}{k^2 \pi^2} = E_n I \frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{E}{2} \frac{k\pi}{l} \frac{l^2}{k^2 \pi^2}. \quad (67)$$

У наведених виразах (64), (65), (66):

w_k – амплітудні значення прогинів для різних форм втрати стійкості; $w(x)$ – форма прогинів поверхневих шарів рейки, що спираються на внутрішні шари матеріалу рейки; $T_{кр} = T_0$ – значення поздовжньої сили, що встановилося, близьке до свого критичного значення; $\bar{\beta} = \frac{E\bar{\alpha}}{2}$ – жорсткість внутрішніх шарів матеріалу (представленого як пружна основа); E – модуль пружності основи; $\bar{\alpha} = \frac{k\pi}{l}$ – число напівхвиль деформації на ділянці рейки завдовжки π ; k – число напівхвиль на ділянці деформованої рейки завдовжки l .

Величини $l, k, \bar{\alpha}$ – підлягають визначенню ($l = l_2$ для стислості позначаємо довжину ділянки через l).

З іншого боку, критична сила пов'язана з кількістю напівхвиль на вигнутій поверхні зовнішніх шарів рейки за аналогією до роботи [16].

У роботі [17] отримано співвідношення між довжиною деформованої ділянки та кількістю напівхвиль

$$l^3 = k^3 \pi^3 \frac{2E_n I}{E} + k^2 \pi^2 \frac{4E_n I}{E} + k\pi \frac{2E_n I}{E}. \quad (68)$$

Також у роботі [17] отримано вираз визначення кількості напівхвиль k на ділянці рейки завдовжки l

$$k = \frac{l}{\pi} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}}, \quad (69)$$

де E_n – модуль пружності поверхневих шарів рейки; $I = \frac{bh^3}{12}$ – момент інерції поперечного перерізу зовнішніх (поверхневих) шарів рейки; b – ширина поверхневих шарів рейки (часто приймається рівною ширині майданчика контакту колеса та рейки або приймається балка-смужка одиничної ширини, $b=1$); h – висота балки-смужки з деформованих поверхневих шарів.

Як було встановлено [15], для балок на пружній основі критична сила пов'язується з числом напівхвиль на деформованій поверхні зовнішніх шарів рейки. Прирівнюючи число напівхвиль у виразу (67) до виразу (68), складеного щодо числа напівхвиль на деформованій ділянці рейки, отримаємо наступний вираз

$$\frac{k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{E}{2E_n l k \pi} = \frac{2k^2 \pi^2}{l^2} + \frac{2k \pi^2}{l^2} + \frac{\pi^2}{l^2}, \quad (70)$$

$$\frac{E}{(2E_n l) k \pi} l^3 = k^2 \pi^2 + 2k \pi^2 + \pi^2. \quad (71)$$

Тоді

$$l^3 = k^3 \pi^3 \frac{2E_n l}{E} + 2k^2 \pi^3 \frac{2E_n l}{E} + k \pi^3 \frac{2E_n l}{E}. \quad (72)$$

Використовуючи співвідношення $\bar{\alpha} = \frac{k \pi}{l}$; $\bar{\beta} = \frac{E \bar{\alpha}}{2}$, а також вираз

$$k = \frac{l}{\pi} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}}, \quad (73)$$

що зв'яже довжину деформованої ділянки балки-смужки з кількістю напівхвиль деформації [16], представимо вираз (72) у вигляді

$$l^3 = \frac{l^3}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^3 \frac{4E_n l}{E} + 4\pi l^2 \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^2 \frac{E_n l}{E} + \pi l^3 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \frac{2E_n l}{E}, \quad (74)$$

$$l^2 - \pi l \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^2 \frac{4E_n l}{E} - \pi^2 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \cdot \frac{4E_n l}{E} = 0. \quad (75)$$

$$l_0 \equiv 0;$$

$$l_{1,2} = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^2 \frac{4E_n l}{E} \pm \sqrt{\frac{\pi^2}{4} \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^4 \frac{16E_n^2 l^2}{E^2} + \pi^2 \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \cdot \frac{4E_n l}{E}},$$

$$l_{1,2} = \pi \left(\sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \right)^2 \frac{4E_n l}{E} \pm \pi \sqrt{\frac{1}{4} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \frac{4E_n l}{E} + \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} \frac{4E_n l}{E}}.$$

Після перетворень

$$l_{1,2} = \pi \sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}} \pm \pi \sqrt{2 \left(\sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}} \right)^2} = \pi (1 \pm \sqrt{2}) \sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}}. \quad (76)$$

Таким чином, отримаємо один корінь (l_2), який задовольняє умову задачі

$$l_2 = \pi (1 + \sqrt{2}) \sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}}. \quad (77)$$

Звернемося до виразів (73) і (77), тоді кількість напівхвиль деформації на ділянці рейки, що втратила поздовжню стійкість у своїх верхніх шарах, буде дорівнювати

$$k = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{\pi} \sqrt[3]{\frac{4E_n l}{E}} \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n l}} = 1 + \sqrt{2}. \quad (78)$$

Отже, число напівхвиль колеса, що котиться, не залежить від навантаження, площі поперечного перерізу балки-смужки та інших факторів.

Розглянемо залежність довжини деформованої ділянки рейки від навантаження та механічних властивостей шару, підставивши спочатку у формулу (76) вираз для моменту інерції прямокутного поперечного перерізу балки-смужки у її поверхневих шарах завтовшки h_1 , яка визначається з наближеного виразу

$$h_1 = \sqrt{\frac{P}{\sigma_T}}, \quad (79)$$

де P – вертикальне навантаження на колесо (зосереджено або розподілено по ширині майданчика контакту); σ_T – межа плинності матеріалу рейки (або бандажа колеса), величина, що змінюється під впливом зростаючого навантаження P , або в результаті збільшення кількості циклів проходження коліс по ділянці рейки, що розглядається.

Як впливає з [5], [15] зростання навантаження, наприклад, за лінійним законом сприяє зростанню σ_T ступеня менше одиниці. Цим пояснюється те, що зі зростанням навантаження P , відбувається плавне збільшення товщини ущільненого шару рейки (і колеса) і, як наслідок, збільшення міцності втоми контактної пари. Тобто під дією зростаючого стискаючого навантаження на колесо і рейку глибина зміцненого шару змінюється в широких межах і досягає 25 мм і більше, при цьому мікротвердість збільшується на 20 – 50 % і межа втоми матеріалів колеса та рейки підвищується на 80 % і більше.

Поздовжня хвиля, що виникає, при коченні колеса по рейці на 2,5 напівперіоду випереджає точку контактування колеса з гребенем хвилі на рейці (її передній фронт) і формує залишкові деформації, що випереджають передню точку взаємодії рухомої пари, які згладжуються після повторного проходження коліс по деформованих ділянках (колеса), що наглядно проглядаються при спостереженні за станом залізничних шляхів. Аналогічні явища мають місце при протіканні технологічних процесів прокатки (холодної) та обкатки (накатки). Тому помірне підвищення тиску на колесо, в межах 20 – 25 %, може призвести до реального підвищення довговічності пари колесо – рейка внаслідок підвищення меж втоми матеріалів деталей. При цьому надмірне збільшення тиску може сприяти перенаклепу поверхні та її подальшому руйнуванню [5].

Поки що залишилося відкритим важливе питання про утворення хвилястої поверхні попереду колеса, що рухається, і визначення амплітуди деформаційної хвилі. Для цього звернемося до рівняння (64), деформації, згідно з яким розглядаємо з урахуванням укорочення довжини балки-смужки l на величину Δl_1 за однорідних граничних умов.

Для визначення амплітуди квазістатичної хвилі деформації при поздовжньо-поперечному згині ущільнених поверхневих шарів виходитимемо з того, що дотичне зусилля T_c , прикладене у зоні взаємодії колеса з рейкою, розтягує майданчик контакту (розміром $a \times b$) і стискає ділянку рейки перед колесом, що набігає (довжиною l_2). Якщо виходити з нерозривності деформацій, то розтягнута ділянка подовжиться на величину Δl_1 , а стисла укоротиться на величину Δl_2

($\Delta l_1 = \Delta l_2$), і на довжині l_2 набуде хвилясту поверхню, тоді подовження майданчика контакту ($a = l_1$) дорівнюється

$$\Delta l_1 = \frac{T_c a}{E_n F}, \quad (80)$$

де $T_c \geq T_{кр}$ – дотичне навантаження, прикладене до рейки і трохи перевищує критичну силу для ущільнених поверхневих шарів.; $a = l_1$ – довжина ділянки контакту між колесом та рейкою (довжина великої півосі еліптичного майданчика контакту); E_n – модуль Юнга для поверхневих шарів; $F = bh$ – площа поперечного перерізу балки-смушки (її зовнішніх шарів).

Розглядаючи ділянку рейки перед гребенем (l_2), вважаємо, що через спільність деформацій ділянок l_1 і l_2 остання стиснеться на ту ж величину Δl_1 , при цьому форма її стиснутої поверхні в поздовжньому перерізі набуде вигляду синусоїди. [17]

$$y = A_1 \sin \frac{k\pi x}{l_2}, \quad (81)$$

де A_1 – амплітуда хвилі деформації поверхневих шарів, що підлягає визначенню; k – кількість напівхвиль деформації, що відповідає формі втрати стійкості (мінімальна критична сила $min T_{кр}$ відповідає $k = 1$).

Як було встановлено, довжина деформованої ділянки попереду колеса, що котиться, визначається за формулою (77) і залежить від співвідношення модулів пружності поверхневих і глибинних шарів матеріалу і поперечних розмірів гіпотетичної балки, навантаженої поздовжньою силою і, що отримала крім поздовжніх, ще й згинальні деформації однієї напівхвилі синусоїди) з амплітудним значенням A_1 . Виходячи з роботи балки на стійкість у джерелі [17] встановлено, що поздовжнє переміщення через величини A_1 та l , виражається у формі

$$\Delta l_1 = \frac{\pi^2 A_1^2}{4l} + \frac{3 \pi^4 A_1^4}{64 l^3} + \dots \quad (82)$$

Формула виведена виходячи з взаємозв'язку між поздовжніми і поперечними переміщеннями рухомого кінця гіпотетичної балки при визначенні довжини дуги деформаційної хвилі в результаті розкладання підінтегрального виразу Δl_1 у ряд згідно з біномом Ньютона. (У розкладанні обмежимося двома доданками, що містять A_1^2, A_1^4).

Прирівнюючи праві частини виразів (80), (82) отримаємо залежність

$$\frac{3 \pi^4}{64 l^3} A_1^4 + \frac{\pi^2}{4l} A_1^2 = \frac{T_1 a}{E_n F}. \quad (83)$$

Перетворюючи (83), отримуємо бікватратне рівняння для визначення амплітуди деформаційної хвилі попереду колеса, що котиться

$$A_1^4 + \frac{16 l^2}{3 \pi^2} A_1^2 - \frac{64 l^3}{3 \pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F} = 0. \quad (84)$$

Рішення (84) шукаємо, виходячи з допоміжного квадратного рівняння

$$B^2 + \frac{16 l^2}{3 \pi^2} B - \frac{64 l^3}{3 \pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F} = 0. \quad (85)$$

Рівняння (85) припускає рішення

$$B_{1,2} = -\frac{8 l^2}{3 \pi^2} \pm \sqrt{\frac{64 l^4}{9 \pi^4} + \frac{64 l^3}{3 \pi^4} \frac{T_1 a}{E_n F}}. \quad (86)$$

Приймаємо корінь $B_1 > 0$, тоді амплітуду A_1 визначаємо з виразу

$$A_1 = \sqrt{-\frac{8 l^2}{3 \pi^2} + \sqrt{\frac{64 l^4}{9 \pi^4} + \frac{64 l^3 T_1 a}{3 \pi^4 E_n F}}}. \quad (87)$$

Тобто біквдратне рівняння для амплітуд припускає єдине позитивне рішення.

У наведених виразах (81) – (87):

$l = \pi(1 + \sqrt{2})^3 \sqrt{\frac{4E_n b h^3}{E} \frac{1}{12}}$ – довжина деформованої ділянки рейки (позначення $l = l_2$); $F = bh$ – площа поперечного перерізу гіпотетичної балки; T_c – дотичне зусилля при взаємодії колеса та рейки ($T_c \geq T_{кр}$, формула (67) (для критичної сили балки на пружній основі); $a = \sqrt{8kPr}$ – довжина майданчика контакту колеса та рейки.

Для невеликих поперечних прогинів, якщо дотичне зусилля, що діє, ненабагато перевищує $T_{кр}$, що має місце при поздовжньому згині поверхневих шарів рейок, можна при визначенні амплітуд згинальних деформацій знехтувати в (83) доданком, що містить A_1^4 , тоді наближена формула для обчислення амплітуд набуде вигляду

$$A_1 = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T_1 a l}{E_n F}}. \quad (88)$$

У роботі [18] отримано вираз визначення поздовжнього переміщення вільного кінця балки у припущенні, що поверхневі шари балки вигнуті по одній напівхвилі синусоїди, вираз (82). Якщо вважати, що деформація поверхневих шарів відбулася за k напівхвилях синусоїди, то замість виразу (83) отримаємо

$$\frac{3 k^4 \pi^4}{64 l^3} A_1^4 + \frac{k^2 \pi^2}{4l} A_1^2 = \Delta l_1. \quad (89)$$

Підставимо у вираз (89) замість k його значення (73), то матимемо

$$\frac{3 l^4 \pi^4}{64 \pi^4 l^3} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^4} A_1^4 + \frac{l^2 \pi^2}{4 \pi^2 l} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^2} A_1^2 = \Delta l_1. \quad (90)$$

Виразивши l через k отримаємо

$$\frac{3}{64} A_1^4 k^3 \sqrt{\frac{4E_n l}{E}} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^4} + \frac{A_1^2 k^3}{4} \sqrt{\frac{4E_n l}{E}} \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^2} = \Delta l_1. \quad (91)$$

$$\frac{3}{64} k^3 \sqrt{\left(\frac{E}{4E_n l}\right)^3} A_1^4 + \frac{k^3}{4} \sqrt{\frac{E}{4E_n l}} A_1^2 - \Delta l_1 = 0. \quad (92)$$

Тоді біквдратне рівняння для визначення амплітуди деформації поверхневих шарів рейки запишемо у вигляді

$$A_1^4 + \frac{16}{3} \sqrt{\left(\frac{4E_n l}{E}\right)^2} A_1^2 - \frac{T_1 a}{E_n F} \cdot \frac{256}{3k} \cdot \frac{E_n l}{E} = 0. \quad (93)$$

Звідки квадрат позитивного значення кореня виразу (93) отримаємо у вигляді

$$B_1 = -\frac{8}{3} \sqrt{\left(\frac{4E_n l}{E}\right)^2} + \sqrt{\frac{64}{9} \sqrt{\left(\frac{4E_n l}{E}\right)^4} + \frac{T_1 a}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{FE_n} \cdot \frac{256}{3}}, \quad (94)$$

де k – число напівхвилях деформації, прийняте рівним $k = 1 + \sqrt{2}$.

Остаточно значення амплітуди хвилі деформації поверхневих шарів представимо у вигляді

$$A = + \sqrt{-\frac{8}{3} \sqrt[3]{\left(\frac{4E_n l}{E}\right)^2} + \sqrt{\frac{64}{9} \sqrt[3]{\left(\frac{4E_n l}{E}\right)^4} + \frac{T_1 a}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{l}{FE_n} \cdot \frac{256}{3}}}, \quad (95)$$

Таким чином, значення амплітуди поперечних деформацій поверхневих шарів рейки (або колеса) прямо пропорційно до кореня четвертого ступеня з дотичного зусилля. T_1 та довжини майданчика контакту між колесом та рейкою a , прямо пропорційно кореню квадратному з товщини поверхневого шару h , обернено пропорційно до кореня четвертого ступеня з величини модуля пружності внутрішніх шарів рейки (або колеса), залежно від постановки задачі (для колеса або рейки).

Розглядаючи навантаження поверхневих шарів рейки (або колеса) зусиллями, які забезпечують втрату місцевої стійкості поверхневих шарів, отримані залежності для визначення критичних стискаючих зусиль, довжини ділянки втрати місцевої стійкості поверхневих шарів, кількості напівхвиль деформації на цій довжині, амплітуди деформації. Причому отримані величини виражені через критичну силу, розміри майданчика контакту колеса і рейки, довжину, ширину і товщину балки-смужки, модулі пружності для поверхневих та внутрішніх шарів деталей (рейки та обода колеса).

Зазначені величини розраховані виходячи із статичного характеру дії дотичних навантажень.

Звернемося до поверхневих шарів рейки. Ці шари навантажені дотичною силою T_c , яка спрямована вздовж рейки та може сприяти виникненню двох рухів деформаційної хвилі:

1) Статична деформаційна хвиля переміщається вздовж рейки з лінійною швидкістю руху колеса (екіпажу) (точніше – квазістатична).

2) Динамічна деформаційна хвиля, яка накладається на статичну завдяки прояву фрикційної нестационарної складової дотичного зусилля T_c .

Як впливає з двоїстого характеру дотичних навантажень, що формуються на майданчику контакту колеса та рейки, при взаємному прослизанні контактуючої пари, розрахункове дотичне навантаження T_c ($T_{кр}$) з накладеними самозбудливими коливаннями для деформованої ділянки рейки є параметричним навантаженням. Це навантаження може призвести до розгойдування параметричних коливань і прояву параметричного резонансу на змінному плечі, що дорівнює змінному поперечному прогину балки-смужки.

В силу того, що статичний стан такої балки є нестійким, то під впливом взаємного прослизання та псевдоковзання контактуючих деталей при змінному терті виникають автоколивання на ділянці контакту, які призводять до наростаючих параметричних коливань (у тому числі і до параметричного резонансу) на ділянці рельєфу. l попереду колеса, що набігає.

Розглядаючи диференціальне рівняння самозбуджування коливань, отримуємо вираз для вібропереміщень майданчика контакту. Після диференціювання виразу (56) за часом і підстановки його у (37) отримуємо вираз для дотичного зусилля T_c . З аналізу виразів (37), (38), (63) випливає, що функція T_c є періодичною. Функцію можна умовно вважати гармонічною, якщо амплітуда автоколивань є функцією, що повільно змінюється, і швидкість руху екіпажу в розглянутому часовому інтервалі може бути прийнята постійною. Представлені вирази для T_c використовуємо для складання рівняння параметричних коливань

тонкого шару рейки попереду колеса, що рухається щодо рухомої системи координат (де поздовжня координата переміщається спільно з початком системи відліку O_1 зі швидкістю екіпажу V).

Складемо диференціальне рівняння коливань умовної балки, що переміщається разом із опорами балки-смужки кінцевої довжини l , навантаженою змінною силою опору перекочування T_c , згідно (37), причому балка ще додатково спирається на пружну основу внутрішніх шарів з коефіцієнтом відсічі $\bar{\beta} = \frac{E\bar{\alpha}}{2}$ (рис. 4).

Реактивне зусилля від пружної основи внутрішніх шарів рейки пропорційно до пружного (вертикального) просідання балки-смужки. (w).

Для того, щоб у рівняння поздовжнього вигину балки-смужки ввести розподілене навантаження у вигляді відсічі пружної основи [8], його необхідно двічі продиференціювати по поздовжній координаті. Балку-смужку вважаємо системою інерційною, тому в рівняння введемо ще й сили інерції, тоді матимемо

$$E_n I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + T_c [\xi(t)] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{E\bar{\alpha}}{2} w + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (96)$$

з урахуванням граничних та початкових умов

$$w(0, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial w(x_0, 0)}{\partial t} = V_0; \quad w(x_0, 0) = 0, \quad (97)$$

де $\bar{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{E}{4E_n I}}$ – число напівхвиль балки-смужки на ділянці балки завдовжки π ;

x_0 – деяке значення x з інтервалу $0 \leq x_0 \leq l$;

$\xi(t)$, $\xi(t)$ – відповідно відносне зміщення деталей пари при контакті та швидкість цього зміщення;

m_0 – погонна маса по довжині балки-смужки (товщиною h_1).

Якщо рахувати

$$w = w(x, t) = A_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (98)$$

де w – поперечний прогин балки-смужки, змінний у часі та по довжині балки, тоді (96) наводиться до вигляду

$$m_0 \frac{d^2 A_k}{dt^2} + E_n I \frac{k^4 \pi^4}{l^4} A_k + T_c [\xi(t)] \frac{k^2 \pi^2}{l^2} A_k + \frac{E}{2} \alpha A_k = 0, \quad (99)$$

Оскільки рівняння (99) ідентичні всім формам коливань при будь-яких k , то в розкладанні (98) для прогинів достатньо обмежитися першою формою втрати стійкості, тому індекс k може бути надалі опущений (у нашому випадку приймаємо $k = 1$ або $k \geq 1$). Крім A_k це стосується μ_k , Ω_k .

Якщо дотичне навантаження T_c на підставі (37), (63) можна уявити, що змінюється за гармонічним законом

$$T_c = T_0 + T_1 \cos \omega_0 t, \quad (100)$$

то рівняння (99) може бути наведено до виду

$$\frac{d^2 A_k}{dt^2} + \omega_k^2 \left(1 - \frac{T_0 + T_1 \cos \omega_0 t}{T_k^*} \right) A_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (101)$$

де $\omega_k^2 = \frac{1}{m_0} \left(\frac{k^4 \pi^4}{l^4} E_n I + \bar{\beta} \right)$ – квадрат k -ої частоти коливань не завантаженої балки-смужки ($l \times b \times h$) з індексом k ; T_0 – постійна складова дотичної сили; $T_k^* = \frac{k^2 \pi^2 E I}{l^2} + \frac{\bar{\beta} l^2}{k^2 \pi^2}$ – значення критичної дотичної сили для форми втрати стійкості з індексом k ; $\bar{\beta} = \frac{E\bar{\alpha}}{2}$ – коефіцієнт відсічі (жорсткість) пружної основи; T_1 – амплітуда коливань дотичної сили.

Введемо позначення:

$$\Omega_k = \omega_k \sqrt{1 - \frac{T_0}{T_k^*}} \quad (102)$$

Ω_k – частота власних коливань балки-смужки, навантаженої постійною складовою дотичної сили (для форми коливань з індексом k);

$$\mu_k = \frac{T_1}{2(T_k^* - T_0)}, \quad (103)$$

μ_k – коефіцієнт збудження навантаження, який для багатьох систем є малим параметром [14].

Тоді рівняння (101) перетворюється на вигляд:

$$\frac{d^2 A_k}{dt^2} + \Omega_k^2 (1 - 2\mu_k \cos \omega_0 t) A_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3 \dots), \quad (104)$$

Опускаючи індекси k , при цьому вважаємо $k = 1$.

$$A_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \cos \omega_0 t) A_1 = 0. \quad (105)$$

Рівняння (105) є рівнянням Матьє, яке описує проходження накладених параметричних коливань на деформований поверхневий шар рейки.

У разі коли дотична сила змінюється за більш загальним законом

$$T_c = T_0 + T_1 \Phi(t), \quad (106)$$

де $\Phi(t)$ – періодична сила з періодом $\frac{2\pi}{\omega_0}$, тоді замість рівняння (105) приходимо до рівняння

$$A_1'' + \Omega_1^2 (1 - 2\mu_1 \Phi(t)) A_1 = 0 \quad (107)$$

більш загального виду, що називається рівнянням Матьє-Хілла.

Оскільки функція T_c складається з постійної та змінної частин, де T_0 являє собою постійну частину параметричного навантаження, під впливом якої навантажені шари балки-смужки є стиснутою (відносно тонкою) балкою на пружній підставі, яка може втратити поздовжню стійкість, а змінна складова зовнішнього дотичного навантаження (щодо невеликої частини від параметричного навантаження) викликає стійкі або нестійкі коливання поверхневих шарів у вигляді функції часу для амплітуд, що обгинають параметричні коливання, які часто призводять до параметричного резонансу. У більшості випадків коливальний процес у поверхневих шарах відбувається за законом

$$A_1(t) = C_1 e^{\mu t} \psi_1(t) + C_2 e^{\mu t} \psi_2(t). \quad (108)$$

У наведеному виразі (108)

C_1, C_2 – деякі довільні постійні, що визначаються з початкових умов завдання; μ – деякий малий параметр; $\psi_1(t); \psi_2(t)$ – довільні лінійно незалежні періодичні функції часу, від вдалого вибору яких залежить кінцевий результат розв'язання задачі.

Існують математичні методи розв'язання диференціальних рівнянь, які дозволяють знайти дві лінійно незалежні часткові розв'язки задачі [19]. Цей прийом дозволяє побудувати рішення задачі (96), використовуючи знайдені функції $\psi_1(t); \psi_2(t)$.

Для кількісного розв'язання задачі про виникнення параметричних коливань та параметричного резонансу в поверхневих шарах рейки (або колеса, залежно від постановки задачі) застосуємо наближене рішення диференціального рівняння за методом ВКБ (Вентцеля, Крамерса, Брілюена та Джефріса) [20], яке дозволить побудувати рішення як рівняння Матьє, так і рівняння Матьє-Хілла.

Для застосування методу запишемо рівняння (107) у вигляді

$$A_k'' + \frac{Elk^4\pi^4}{l^4m_0} \left[1 + T_c(t) \frac{m_0}{EI} \frac{l^2}{k^2\pi^2} \right] A_k = 0 \quad (109)$$

або

$$A_k'' + \left[\frac{Elk^4\pi^4}{l^4m_0} + T_c(t) \frac{k^2\pi^2}{l^2} \right] A_k = 0. \quad (110)$$

Якщо вираз у квадратних дужках разом із постійним коефіцієнтом у формулі (109) позначити через $\Omega_{*k}^2(t)$ і вираз у квадратних дужках у формулі (110) позначити через $\Omega_{*k}^2(t)$, то отримаємо звичайне диференціальне рівняння другого порядку зі змінною (плаваючою) частотою $\Omega_{*k}^2(t)$, еквівалентне (109) та (110)

$$A_k'' + \Omega_{*k}^2(t) A_k = 0. \quad (111)$$

Як бачимо з (111), вирази для визначення функції амплітуд відповідних різним формам коливань абсолютно ідентичні.

При цьому критична сила, що відповідає другій формі коливань буде вчетверо більша, ніж для першої форми коливань, тоді можливість реалізації другої та наступних форм коливань буде значно меншою.

На підставі наведених міркувань запишемо рівняння для визначення функції амплітуд коливань, опускаючи індекси

$$A'' + \Omega_*^2(t) A = 0. \quad (112)$$

У наведеному рівнянні (112) функція $\Omega_*(t)$ має сенс «плаваючої» частоти коливань близько свого середнього значення.

Звертаючись до рівняння (110), укладаємо, що воно є рівнянням Хілла, для побудови рішення такого рівняння необхідно знайти два окремі рішення $\psi_1(t)$; $\psi_2(t)$, які є періодичними та лінійно незалежними. Відповідь на це питання не очевидна. Якщо орієнтуватися на рівняння (112), його рішення може бути побудовано за методом ВКБ [20] у такому вигляді

$$A_1(t) = \sqrt{\frac{\Omega_{*0}}{\Omega_{*1}}} A_0 \cos \int_0^t \Omega_{*1}(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\Omega_{*1}\Omega_{*0}}} \left(\dot{A}_0 + \frac{\dot{\Omega}_1}{\Omega_{*0}} A_0 \right) \sin \int_0^t \Omega_{*1} dt, \quad (113)$$

де $A(0) = A_0$; $\dot{A}(0) = \dot{A}_0$; $\Omega_{*0} = \Omega_*(0)$; $\dot{\Omega}_{*0} = \dot{\Omega}_*(0)$.

Вираз (113) може бути прийнято як наближене рішення (112), якщо виконується умова

$$\left| 0,5 \frac{\ddot{\Omega}_{*1}}{\Omega_{*1}^3} - 0,75 \left(\frac{\dot{\Omega}_{*1}}{\Omega_{*1}^2} \right)^2 \right| \ll 1. \quad (114)$$

На практиці найбільш небезпечним є режим, що відповідає першій власній формі коливань поверхневих шарів (або першій формі втрати поздовжньої стійкості), тобто при $k = 1$.

Для визначення меж головної області нестійкості (64) використовуємо формулу В. В. Болотіна або Н. М. Беляєва [8], згідно з якими діапазон зміни частот визначається

$$\Theta_{*1} = 2\Omega_{*1} \sqrt{1 \pm \mu_1}, \quad (115)$$

$$\Theta_{*1} = 2\Omega_{*1} (1 \pm \mu_1), \quad (116)$$

де Ω_{*1} – перша власна частота коливань балки-смушки, навантаженої постійною складовою дотичної сили (102); μ_1 – коефіцієнт збудження навантаження для першої власної частоти коливань, що є «малим» параметром.

Крім того, не вдаючись до рішення (64), можна визначити зони нестійкості для рівняння, використовуючи діаграму Айнса-Стретта [8].

Колівання, які можуть виникати під час руху колеса, є автопараметричними коліваннями на ділянці контакту та попереду точки взаємодії колеса з рейкою

(рис. 4). Ці коливання, як випливає з рішення (113), можуть досягати значної інтенсивності та перешкоджати збільшенню швидкості руху колеса (екіпажу).

Зазначимо, що для провідних коліс (колісних пар) транспортних візків (контейнерів) або локомотивів матимуть місце ефекти зчеплення і прослизання, тому коливання, що самозбуджуються, можуть виникати як в зоні зчеплення коліс і рейок, так і в зоні перед набігаючим колесом при деформуванні рейки у вигляді параметрично збуджуваних коливань на гребенях деформаційної хвилі рейки та її поверхневих шарів. Якщо ж колесо або колісна пара є веденим, то попереду точки набігання колеса спостерігатиметься деформаційна хвиля без прояву коливань, що самозбуджуються. Тому такі хвилі призводять до менших руйнувань поверхневих шарів та підвищення їхньої несучої здатності. У цьому випадку можуть мати місце деформаційні хвилі, амплітуди згинальних деформацій поверхневих шарів яких будуть меншими в результаті підвищення твердості, меж витривалості, плинності та міцності.

Таким чином, у місцях взаємодії провідних коліс із рейками буде більше підстав для руйнування поверхневих шарів рейок та коліс під дією додаткових навантажень при автопараметричних коливаннях. Саме в місцях прослизання та деформаційної взаємодії колеса та рейки в першу чергу відбуватиметься лущення, крихке руйнування та скол поверхневих шарів. Звернемося до деформаційних гребенів, вони виникають попереду коліс, що котяться, а після проходження колеса по утворених гребенях вони вирівнюються. Результатом таких місцевих деформацій на рейках після припинення прокочування колеса буде виникнення з певним кроком поперечних смуг, які є викладеними гребенями деформаційних хвиль після багаторазового прокочування коліс деформаційними поверхневими шарами. Зазначимо, що такий характер приробітку колеса та рейки свідчить про прояв тут деформаційно-хвильової гіпотези при терті (і зношуванні) для випадку тертя «кочення» [15], [18].

Висновки

1. В результаті постановки та вирішення задачі про зчеплення та ковзання колеса в зоні контакту встановлено, що для всіх швидкостей руху рухомого складу мають місце режими виникнення фрикційних автоколивань провідних колісних пар під дією дотичних сил тертя.

2. Визначено поздовжні і згинальні деформації в зоні рейки, що випереджає колесо, що котиться у вигляді ділянки хвилі деформації, для якої встановлені довжина і крок. При цьому на деформаційну хвилю накладаються автопараметричні коливання, спричинені фрикційною взаємодією в зоні контакту колеса та рейки. Ці коливання, часом, можуть призводити до появи зон тріщинуватості і хвилястості на поверхневих шарах колеса і рейки. Такі дефекти на поверхнях колеса і рейки свідчать або про завищене навантаження, або про вибір недостатньо міцного матеріалу, або про недостатню поверхневу обробку тиском пари, що контактує, і втрати втомної міцності.

3. У роботі доведено, що зусилля перекочування колеса рейкою T_c обумовлено спільним проявом ефекту «псевдоковзання» (гіпотеза 1 – Картера про «псевдоковзання»), і крім того, як результат дії вертикальних тисків на ділянці контакту без ковзання (гіпотеза 2 – Б. С. Ковальського, М. М. Саверіна). Р. Лоренца та Л. Фепля з поправкою Ф. Фредеріка). Тобто було отримано результат

про те, що зусилля перекочування колеса рейкою T_c обумовлено одночасною дією обох гіпотез.

4. Встановлено, що підвищення несучої здатності пари колесо – рейка пов'язане з поверхневим зміцненням зовнішніх шарів деталей і, як наслідок, з товщиною шару накатаного в процесі експлуатації транспортних засобів. Причому товщина накатаного шару не має перевищувати деякого значення, що називається «критичною» товщиною. При великих значеннях товщини накатаного шару праездатність пари помітно знижуватиметься.

5. Виявлено, що та сама глибина ущільненого поверхневого шару може бути отримана або в результаті тривалого приробітку колеса і рейки в експлуатаційних умовах, або спочатку отримана в процесі попередньої механічної обробки за методом обкатування за рахунок докладання статичного або динамічного зусилля (наприклад, вібруючим роликом).

6. Рекомендовано отримувати підвищені механічні характеристики контактуючих деталей шляхом їх обкатування в умовах заводу виробника до початку їхньої промислової експлуатації.

Список літератури

1. Вериго М. Ф., Коган А. Я. Взаимодействие пути и подвижного состава. М.: «Транспорт», 1986. 539 с.
2. Малиновский Ю. А., Учитель А. Д., Лялюк В. П. и др. Параметрический анализ фрикционных автоколебаний при взаимодействии деформирующего инструмента с заготовкой. *Сталь*. 2021. №1. С. 40-50.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: «Наука», 1980. 305 с.
4. Проскураков Ю. Г. Упрочняюще-калибрующие методы обработки. М.: «Машиностроение», 1965. 205 с.
5. Ткачев В. Н. Методы повышения долговечности деталей машин. М.: «Машиностроение», 1971. 272 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. / Под редакцией И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М.: «Машиностроение», 1968. Том 1. 831 с.
7. Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ. М.: «Машиностроение», 1977. 526 с.
8. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1956. 600 с.
9. Исаев И. П., Лужнов Ю. М. Проблемы сцепления колес локомотива с рельсами. М.: «Машиностроение», 1985. 240 с.
10. Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Динамика неголономных систем. М.: «Наука», 1967. 520 с.
11. Малиновский Ю. А., Малиновская С. И. Контактное взаимодействие и долговечность пары колесо-рельс. *Разработка рудных месторождений*. Кривой Рог, 2003. №84. С. 137-142.
12. Смирнов В. В., Яковлев Р. А. Механика приводов прокатных станов. М.: «Металлургия», 1977. 216 с.
13. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. 4 изд., Л.: Политехника, 1990. 272 с.
14. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1. Под ред. В. В. Болотина. М.: «Машиностроение», 1978. 352 с.
15. Эрлих Л. Б., Кособудский В. А., Вершин А. И. Волнообразование на обкатываемых поверхностях. М.: «Наука», 1973. 51 с.

16. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. Части I, II. 3-е изд., М.: «Юрайт», 2018. 880 с.
17. Учитель А. Д., Малиновский Ю. А., Панченко А. Н. и др. Интенсификация процессов механического взаимодействия инструмента с заготовкой при выполнении высокоточных и энергоемких технологических операций методами давления и резания. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. Дніпро, 2019. № 5 – 6. С. 1-28.
18. Учитель А. Д., Малиновский Ю. А., Данилина Г. В. и др. Влияние параметрического резонанса на механизм разрушения контактирующих поверхностей при трении и изнашивании. *Металлургическая и горнорудная промышленность*. Дніпро, 2018. № 4. С. 65-73.
19. Каннингхем В. Введение в теорию нелинейных систем. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1962. 456 с.
20. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: «Наука», 1970. 576 с.

Стаття надійшла 25.01.2023.

Маліновський Юрій Олександрович – кандидат технічних наук, доцент, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, Україна, 50045, E-mail: malinovsky129@gmail.com, тел.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>.

Невлюдов Ігор Шакірович – Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна.

Цвіркун Сергій Леонідович – кандидат технічних наук, старший викладач, голова циклової комісії, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: tserg300@gmail.com., тел.: +38 067 296 69 99, <https://orcid.org/0000-0001-5430-3427>.

Власенков Дмитро Петрович – старший викладач, заступник директора, Відокремлений структурний підрозділ «Криворізький професійний коледж Національного авіаційного університету», вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, 50045, Україна, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com., тел.: +38 067 296 71 75.

Ткаченко Андрій Сергійович – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна.

Олійник Світлана Юрїївна – старший викладач кафедри технології машинобудування Криворізький національний університет, вул. Віталія Матусевича, 11, м. Кривий Ріг, 50027, Україна, E-mail: olynik.syu@knu.edu.ua., тел.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>.

*Yu. O. MALINOVSKIY, I. Sh. NEVLJUDOV, S. L. TSVIRKUN, D. P. VLASENKOV,
A. S. TKACHENKO, S. Yu. OLIINYK*

ELEMENTS OF FRICTION INTERACTION AND INCREASE OF THE LOAD OF THE GEAR-RACK PAIR

The loading property of the wheel-rail pair is one of the main factors affecting the rational design of vehicles of various technical purposes. Based on the experience of railway transport, there is an idea that with an increase in the vertical load on the wheel and, accordingly, the rail, the durability of this pair decreases in proportion to the increase in load. However, the observations of some researchers outside of the steam load suggest that within a certain range of increasing working vertical loads on the wheel (pair of wheels) there may be a slight increase in steam strength. These data, as it were, were not refuted and did not receive theoretical confirmation. For example, from the results of solving Hertz's contact problem on the rolling of an elastic cylinder in a strip of the same material (or closed in the properties), where a direct proportion was established between the load current and New stresses in the materials of the interacting parts, and therefore proportionally reduce the durability of the pair. In contrast to the mentioned results, when setting the task, an assumption was made that the wheel and rail materials were not uniform throughout their thickness. The outer thin layers of the material under the influence of vertical and tangential adhesion loads receive surface hardening and are therefore harder, the anisotropy of the material properties of the parts in their thickness is manifested in this. In this work, an analogy was used between the task of rolling a wheel on a rail and the tasks of metal pressure processing for the cases of cold and hot rolling, running -in and other types of surface treatment of pressure parts. For these technological processes, with an increase in vertical load, significant structural changes occur in the crystal lattices of the surface layers, which can "increase", can be interpreted as a change in the modulus of elasticity and hardness indicators of the surface layers. As the depth of the stamped layer increases, the values of yield strength, strength and durability of these thin layers increase. Therefore, given this analogy, the resistance to force and wear of the corresponding pair is significantly increased during operational production within the limits limited by the so-called "critical" thickness of the stamped layer. If this thickness is exceeded, further intensive wear and further destruction of the interacting parts should follow. However, the surface strength of the parts of the wheel-rail pair can be significantly increased using static and dynamic hardening methods even before the operation of these pairs on vehicles.

Key words: wheel, rail, wheel pair, vertical load, tangential force, pseudo-slip, coefficient of friction, surface strengthening, knurling, running-in, vibrating rollers.

References

1. Verigo M. F., Kogan A. Ja. *Vzaimodejstvie puti i podvizhnogo sostava*. M.: «Transport», 1986. 539 s.
2. Malinovskij Ju. A., Uchitel' A. D., Ljaljuk V. P. i dr. Parametricheskij analiz frikcionnyh avtokolebanij pri vzaimodejstvii deformirujushhego instrumenta s zagotovkoj. *Stal'*. 2021. №1. S. 40-50.
3. Galin L. A. *Kontaktnye zadachi teorii uprugosti i vjazkouprugosti*. M.: «Nauka», 1980. 305 s.
4. Proskurjakov Ju. G. *Uprochnjajushhe-kalibrujushhie metody obrabotki*. M.: «Mashinostroenie», 1965. 205 s.
5. Tkachev V. N. *Metody povyshenija dolgovechnosti detalej mashin*. M.: «Mashinostroenie», 1971. 272 s.
6. *Prochnost', ustojchivost', kolebanija. Spravochnik v treh tomah.* / Pod redakciej I. A. Birgera i Ja. G. Panovko. M.: «Mashinostroenie», 1968. Tom 1. 831 s.
7. Kragel'skij I. V., Dobychin M. N., Kombalov V. S. *Osnovy raschetov na trenie i iznos*. M.: «Mashinostroenie», 1977. 526 s.

8. Bolotin V. V. *Dinamicheskaja ustojchivost' uprugih sistem*. M.: GITTL, 1956. 600 s.
9. Isaev I. P., Luzhnov Ju. M. *Problemy sčeplenija koles lokomotiva s rel'sami*. M.: «Mashinostroenie», 1985. 240 s.
10. Nejmark Ju. I., Fufaev N. A. *Dinamika negolonomnyh sistem*. M.: «Nauka», 1967. 520 s.
11. Malinovskij Ju. A., Malinovskaja S. I. *Kontaktnoe vzaimodejstvie i dolgovechnost' pary koleso-rel's*. *Razrabotka rudnyh mestorozhdenij*. Krivoj Rog, 2003. №84. S. 137-142.
12. Smirnov V. V., Jakovlev R. A. *Mehanika privodov prokatnyh stanov*. M.: «Metallurgija», 1977. 216 s.
13. Panovko Ja. G. *Osnovy prikladnoj teorii kolebanij i udara*. 4 izd., L.: Politehnika, 1990. 272 s.
14. *Vibracii v tehnikе. Spravochnik v 6h tomah. Tom 1. Pod red. V. V. Bolotina*. M.: «Mashinostroenie», 1978. 352 s.
15. Jerlih L. B., Kosobudskij V. A., Vershin A. I. *Volnoobrazovanie na obkatyvaemyh poverhnostjah*. M.: «Nauka», 1973. 51 s.
16. Vol'mir A. S. *Ustojchivost' deformiruemyh sistem. Chasti I, II*. 3-e izd., M.: «Jurajt», 2018. 880 s.
17. Uchitel' A. D., Malinovskij Ju. A., Panchenko A. N. i dr. *Intensifikacija processov mehanicheskogo vzaimodejstviya instrumenta s zagotovkoj pri vypolnenii vysokotochnyh i jenergoemkih tehnologicheskikh operacij metodami davlenija i rezanija. Metallurgicheskaja i gornorudnaja promyshlennost'*. Dnipro, 2019. № 5 – 6. S. 1-28.
18. Uchitel' A. D., Malinovskij Ju. A., Danilina G. V. i dr. *Vlijanie parametricheskogo rezonansa na mehanizm razrushenija kontaktirujushhih poverhnostej pri trenii i iznashivanii. Metallurgicheskaja i gornorudnaja promyshlennost'*. Dnipro, 2018. № 4. S. 65-73.
19. Kanninghem V. *Vvedenie v teoriju nelinejnyh sistem*. M.-L.: Gosjenergoizdat, 1962. 456 s.
20. Kamke Je. *Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravnenijam*. M.: «Nauka», 1970. 576 s.

Malinovskij Yuriy Olexandrovich – candidate of technical sciences, associate professor, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: malinovskij129@gmail.com, tel.: +38 098 130 73 24, <https://orcid.org/0000-0001-5980-0908>

Nevljudov Igor Shakirovych – Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045

Tsvirkun Sergij Leonidovich – candidate of technical sciences, senior teacher, chairman of the cycle commission, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: tserg300@gmail.com., tel.: +38 067 296 69 99, <https://orcid.org/0000-0001-5430-3427>

Vlasenkov Dmitro Petrovich – senior teacher, head's assistant, Separate structural unit «Krivyi Rih professional college of National Aviation University», Krivyi Rih, Tupolev 1, Ukraine, 50045, E-mail: vlasenkov.d@gmail.com., tel.: +38 067 296 71 75.

Tkachenko Andrij Sergijovych – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Krivyi Rih National University, Krivyi Rih, Vitaly Matusevicha 11, Ukraine, 50027

Oliinyk Svitlana Yuryivna – senior lecturer of the Department of Mechanical Engineering Technology Krivyi Rih National University, Krivyi Rih, Vitaly Matusevicha 11, Ukraine, 50027, E-mail: oliynyk.syu@knu.edu.ua., tel.: +38 067 981 52 35, <https://orcid.org/0000-0002-6169-8874>.