УДК 004.942+004.042

Гамаюн В.П., д-р техн. наук

АРИФМЕТИКО–АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ БАЗИС МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ СРЕДСТВ

Институт компьютерных технологий
Национального авиационного университета

Предложено применение принципа специализации для повышения эффективности компьютеров и компьютерных средств на уровне систем счисления. Специализированные и проблемно-ориентированные системы счисления составляют арифметико-алгоритмический базис моделирования компьютерных средств

Введение

Моделирование с применением компьютерной техники является одним из фундаментальных применений компьютеров. Возможность программирования и решения задач на компьютере обеспечивает реализацию всех математически представимых моделей различных процессов и явлений. Необходимость решения задач с высокой производительностью и в режиме реального времени обусловило развитие класса Супер-ЭВМ и специализированных, проблемно-ориентированных компьютерных средств. Кроме структурной поддержки в архитектуре компьютеров получили развитие специальные языки программирования, ориентированные на моделирование. На командном уровне организации вычислительного процесса реализуются макрокоманды и макрооператоры, построенные по аналогии преобразований в моделируемых процессах или явлениях. Такая специализация в организации компьютерных средств для «поддержки» моделирования охватывает уже и арифметико-алгоритмический базис в части применения систем счисления, ориентированных на класс решаемых задач. Таким образом реализация задач моделирования с применением компьютеров включает следующие аспекты:

– применение универсальных и специализированных языков программирования для решения задач моделирования;

– использование серийной компьютерной техники;

– применение высокопроизводительной техники и специализированных, проблемно ориентированных средств:

– специализация организации вычислительного процесса;

– применение специализированного арифметико–алгоритмического базиса;

– использование систем счисления, ориентированных на преобразования информации заданного класса задач.

Материалы по результатам исследования последнего аспекта представлены в данной статье.

Системы счисления специализированного назначения

Системы счисления являются теоретико-арифметической основой вычислений-обработки данных в компьютере. Представление данных в ЭВМ реализуется через использование систем счисления разных типов. Системы счисления представляют конструктивные модели абстрактных числовых систем таких как кольца целых чисел, поля действительных и комплексных чисел и других [1 - 2]. Конструктивность систем счисления понимается как возможность выполнения арифметических операций над изображениями (кодами) чисел и определяет изображение (коды) чисел также как конструктивные объекты систем счисления с характеристиками:

– выражения, которые определяют способ изображения, которой разрешает представить абстрактное число как конструктивный объект, как правило это слово в конечном алфавите;

– операционная конструктивность, возможность реализовать арифметические и другие операции над изображениями чисел.

Системы счисления оцениваются рядом параметров, которые необходимо применять в сравнительном анализе и которые отличаются одни от других. Однако упоминавшиеся характеристики имеют инвариантную основу и практически во всех прикладных исследованиях и разработках учитываются именно такие показатели. При конструировании систем счисления рассматриваются в первую очередь следующие вопросы [1 - 2]:

– диапазон представления чисел;

– единственность представления – кодовая комбинация соответствует одному и только одному числу в заданном диапазоне;

– конструктивность при выполнении операций сложения и умножения;

– операции перевода в данную систему счисления и обратно;

– перспективность в увеличении скорости выполнения операций;

– простота управления операционными устройствами, выполняющими алгоритмы обработки;

– технологичность реализуемых операций, построенных на арифметико-логическом базисе выбранной системы счисления.

Учитывая исследуемый аспект применения компьютерных средств, определим как ***дополнение*** к перечисленным вопросам следующее:

– специализация системы счисления в соответствии с решаемыми задачами.

Такая трактовка разработки системы счисления отличается от имеющихся подходов. Решение поставленной задачи позволит повысить эффективность применения такой системы счисления, так как появляется возможность конструктивного выполнения не только операций сложения и умножения, но преобразований данных в соответствии с аналогичными преобразованиями в моделируемом объекте.

Гиперкомплексные системы счисления является одним из примеров разработки систем представления информации для решения многомерных задач, моделирования движущихся в пространстве объектов, цифровой фильтрации и систем защиты информации, цифровой обработки изображений и т.д. [3 - 4]. Исследования применения кватернионов, бикватернионов позволяет строить гиперкомплексные системы счисления, компьютерные арифметики. На основе таких арифметик реализованы решения многих актуальных фундаментальных и прикладных задач
[3 - 4]. Другим вариантом специализированной системы счисления является следующий.

Несмотря на принципиальные отличия между непозиционным и позиционным кодированиям, доказана возможность объединения этих систем в такую, которой присущи положительные признаки составляющих [5 - 6]. Исследуя возможности применения нетрадиционных кодов для реализации мультипликативных операций, а также общие требования к конструктивности кодирования данных (возможности выполнения операций) было предложено оригинальное кодирование данных, которое получило название ***разрядно-логарифмическое*** [5 - 6].

Разрядно-логарифмическим (РЛ) представлением (кодированием) данных называют изображение двоичного операнда в виде набора двоичных кодов ненулевых разрядов $\{Nx_i\}$ того же операнда, каждый из которых определяется как результат вычисления логарифма от веса этого разряда:

$$x_i \to \{Nx_i = \log_2 x_i * p^1 | x_i \neq 0\},$$

где x_i – ненулевой разряд,

p – основание системы счисления.

При разрядно-логарифмическом представлении каждый двоичный разряд a_j, который не равняется нулю, представляется как код N_i, который определяется как двоичный логарифм от количества, представленного этим разрядом:

$$N_i \log_2 a_i 2^i = i(a_i \neq 0).$$

Другими словами, N_i – это номер (код) ненулевого разряда. Число A (числовой операнд) будет записано в виде массива двоичных кодов – $N_1 N_2 N_3 \ldots N_i \ldots$. Например, двоичное число с фиксированной запятой

$$\overset{12\,11\,10\,9\,8\,7\,6\,5\,4\,3\,2\,1\,0\,-1\,-2\,-3}{A = 1000110100101.1\,0\,1}$$

в разрядно-логарифмическом представлении будет иметь такой вид – $A = 12.8.7.5.2.0.-1.-3$.

Наиболее удобной для использования разрядно-логарифмическом изображения с практической точки зрения есть структура, в которой для числа A будет указан знак этого числа, количество значащих единиц и набор разрядно-логарифмических кодов. Общий вид такой структуры следующий:

$$A \to sign\, A\, Q_A N_1 N_2 N_3 N_4 \ldots N_Q,$$

где $signA$ – поле знака числа A (0 - положительное число; 1 – отрицательное число),

Q_A – поле количества значащих единиц,

$N_1 N_2 N_3 \ldots N_{Q_A}$ – поле РЛ кодов. Для приведенного выше примера число A будет записано как – $A_{рл} = 0.8.12.8.7.5.2.0.-1.-3$.

Переход от двоичной формы представления A к форме, где каждый ненулевой разряд представлен своим номером, определяется однозначно и реализуется без дополнительных функциональных преобразований – выполняется операция подстановки по каждому ненулевому разряду. Разрядно-логарифмические коды двоичных операндов A =+111111000111 и B =+10100100001 имеет следующий вид :

$$A^{рл} = 0.9.11.10.9.8.7.6.2.1.0.$$

и

$$B^{рл} = 0.4.10.8.5.0.$$

Для обратного перехода в двоичное представление (двоичный код) надо применить операцию дешифрования.

Применение РЛ кодирования позволяет построить единую структуру для плавающей запятой и фиксированной запятой. Для плавающей запятой необходимо увеличить разрядность представления (поля) каждого номера ненулевого разряда на один бит и прибавить к каждому номеру значение порядка числа, если порядок выражается показателем степени двойки. Структура обобщенного изображения для плавающей запятой и фиксированной запятой имеет вид (p – порядок числа):

Sign A	Q	$\pm N_1 \pm p$	$\pm N_2 \pm p$	...	...	$\pm N_Q \pm p$

Для естественной запятой применима такая же структура. Таким образом при использовании РЛ кодирования данные – числовые операнды (целые, дроби, смешанные) – имеют одну структуру представления.

Множество чисел, изображенных в разрядно-логарифмическое коде, имеет следующие свойства:

– разрядно-логарифмическое кодирование (изображение) есть ограниченное подмножество рациональных чисел;

– множество РЛ кодов симметрично относительно числа нуль;

– элементы РЛ распределены равномерно на действительной прямой – важный фактор повышения точности представления данных.

Таким образом, в компьютерной среде каждое разрядно-логарифмическое изображение числа есть одномерный массив. Такой массив программируется с элементами типа „*ЦЕЛОЕ*", так как номера позиций ненулевых разрядов являются целыми числами. Разрядно-логарифмическое кодирование (изображение) является иерархической системой с алфавитом (носителем), который совпадает с алфавитом двоичной системы. Функция отображения при этом является логарифмической функцией, областью определения которой есть ненулевые разряды операндов

$$\beta_S : A_2 \to A^{\text{рл}}, \beta_S = \log_2 a_i p^i .$$

Числовой диапазон при разрядно-логарифмическом представлении (кодировании) значительно расширяется – диапазон представления чисел увеличивается на несколько порядков в соответствии с размерами разрядной сетки используемого компьютера или компьютерной среды [5 - 6]. Это связано с тем, что в разрядной сетке компьютера будет представляться не самое число A, а наборы кодов N_i, которые количественно совпадают (равны) со степенями двойки значащих единиц в двоичной форме числа A. Указанные элементы N_i составляют РЛ форму числа, а для их представления используется машинная разрядная сетка.

Так при традиционном подходе при n-разрядной сетке ***максимальное*** целое знаковое число можно записать как $A_{\max} = 2^{n-1} - 1$, то при РЛ кодировании

$$A_{\max RL} = 2^{mm} - 1,$$

где $mm = 2^{n-1} - 1$ - (один разряд выделяется для знака двоичного числа).

В табл.1 продемонстрированная зависимость диапазона двоичного представления чисел, диапазона РЛ представление и разрядности РЛ чисел от разрядности компьютера. В результате расширения диапазона представления данных сокращается влияние на точность вычислений процедуры округления.

Для разрядно-логарифмической системы покрытие числовой оси является равномерным во всем выбранном диапазоне. Такое покрытие достигается за счет увеличения количества элементов в массиве кодов, представляющих значащие разряды. Следует отметить,что такое увеличение мантиссы не является механистическим и полное покрытие числовой оси, как показывает моделирование числовых данных, обеспечивается увеличением общей разрядности в 3-5 раз.

Таблица 1. Сравнительная характеристика двоичного и РЛ представлений по диапазону данных

Разрядность двоичного кода	Диапазон двоичных чисел	Разрядность РЛ кода	Диапазон РЛ чисел
4	$2^{+3} \le A \le 2^{-3}$	16	$2^{+7} \le A \le 2^{-7}$
8	$2^{+7} \le A \le 2^{-7}$	256	$2^{+127} \le A \le 2^{-127}$
16	$2^{+15} \le A \le 2^{-15}$	65435	$2^{+32767} \le A \le 2^{-32767}$
32	$2^{+31} \le A \le 2^{-31}$	4294566395	$2^{+2147483647} \le A \le 2^{-2147483647}$

При этом основным признаком разрядно-логарифмического кодирования является единой структуры для всех типов чисел. Никакая другая система счисления не допускает точного представления такого числа, например, как
A= +. 2. +1637833. -187183738.

Основные правила разрядно-логарифмической арифметики

Способ представления чисел определяет правила и алгоритмы выполнения операций на ними. Основные правила выполнения разрядных операций приведены в табл. 2 [5 - 6]. Для организации обработки данных в РЛ представлении нужно учитывать, что код ненулевого разряда (номер позиции ненулевого разряда) равен логарифму от веса, который определяется этим разрядом. Такое представление позволяет свести мультипликативные операции к реализации операции сложения-вычитания. Например, произведение двух чисел при РЛ представлении реализуется как процедура поэлементного сложения двух векторов [5 - 6]. Замена умножения-деления сложением-вычитанием при реализации мультипликативных операций уменьшает аппаратные затраты в операционных структурах и упрощает организацию таких структур. Организация обработки данных в РЛ представлении основана на применении алгоритмов целочисленной арифметики [5 - 6]. В программной модели реализации РЛ арифметики структура РЛ данных представляет собой одномерный массив целых чисел со знаком. Первый элемент массива содержит знак числа (нуль или единицу). Второй элемент массива содержит целое число, равное количеству значащих единиц в РЛ коде числа Q_A. Другие элементы отображают поле РЛ кодов. Размерность массива, который представляет одно РЛ данное A, будет равняется $Q_A + 2$.

Таблица 2. Правила выполнения разрядных операций в РЛ представлении

Операция	Правила выполнения операции
Сложение	1) $N_i + N_k = N_i.N_k$, если $N_i > N_k$; 2) $N_i + N_k = N_i + 1$, если $N_i = N_k$;
Вычитание	1) $N_i - N_k = N_{i-1}.N_{i-2}....N_k$, если $N_i > N_k$; 2) $N_i - N_k = 0$, если $N_i = N_k$;
Умножение	$N_i * N_k = N_i + N_k$;
Сдвиг числа на m разрядов	$N_1.N_2....N_n. \rightarrow (N_1 + m)(N_2 + m)....(N_n + m).$;
Логическое И	1) $N_i * N_k = 0$, если $N_i \neq N_k$; 2) $N_i * N_k = N_i$, если $N_i = N_k$;
Логическое ИЛИ	1) $N_i \vee N_k = N_i$, если $N_i = N_k$; 2) $N_i \vee N_k = N_i.N_k$, если $N_i \neq N_k$;

где N_i, N_k – ненулевые разряды операндов.

Возможность представления данных в широком диапазоне, имитация обработки с различными разрядными сетками определяет применение РЛ системы в качестве арифметико-алгоритмического базиса моделирования компьютерных средств [5 - 6]. На основе РЛ системы исследованы многоразрядных компьютерные системы, поразрядная, пословная, арифметика массивов и других сложных структур данных реализуются как достаточное средство для изучения компьютеров и различных типов преобразований. Так как РЛ вычисления реализуются на технологической базе двоичной арифметики, то на известной операционной структуре (например, ассоциативного процессора) реализуется РЛ арифметика такими же встроенными микрокомандами-операциями. Дополнение в виде модулей специализированного программного обеспечения устанавливаются на серийном компьютере, что позволяет улучшить его точностные характеристики и расширить возможности по моделированию до специализированной системы моделирования [5-6].

Выводы

1. Специализированные, проблемно-ориентированные и традиционные системы счисления определяют арифметико–алгоритмический базис моделирования компьютерных средств и решения

задач моделирования различных процессов и объектов.

2. Реализации вычислений по принципам перечисленных систем счислений могут иметь единую структурную организацию и технологическую базу, что позволяет рассматривать новые подходы в организации компьютеров. Такая организация определяет обработку данных с применением различных систем счисления с соответствующей структурно-аппаратной основой операционной части.

Список литературы

1. *Амербаев В.М.* Теоретические основы машинной арифметики. – Алма-Ата: Наука, 1976. – 323с.

2. *Карцев М.А.* Арифметика цифровых машин. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

3. *Синьков М.В., Губарени Н.М.* Непозиционные представления в многомерных числовых системах.– К.: Наук. думка, 1979. – 140 с.

4. *Синьков М.В.,Калиновский Я.А., Синькова Т.В., Чапор А.А.* О повышении производительности вычислений в некоторых классах гиперкомплексных числовых систем// Электронное моделирование. – 2000. – №6. – С. 13 – 18.

5. *Гамаюн В.П.* Моделювання багаторозрядних комп'ютерних систем: Навч. посібник. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 112 с.

6. *Гамаюн В.П.* Разрядно-логарифмическая арифметика. Методы и алгоритмы. – К.: Книжное изд-во НАУ, 2007. – 272 с.