УДК 004.9

Тарасенко В.П., д-р техн. наук
Король І.Ю., канд. физ.-мат. наук

ДО ПИТАННЯ ПРО ВИКОНАННЯ АРИФМЕТИЧНИХ ОПЕРАЦІЙ В МІНУС-ДВІЙКОВІЙ СИСТЕМІ ЧИСЛЕННЯ

[1]НТУУ «КПІ», [2]Ужгородський національний університет

Розглянуто питання про виконання арифметичних операцій в мінус-двійковій системі числення, а також деякі уточнення відомих алгоритмів та одержано нові алгоритми переводу з десяткової та двійкової систем числення в мінус двійкову і навпаки. Одержано ряд алгоритмів виконання арифметичних операцій, які будуть покладені в основу програмного забезпечення спеціалізованих комп'ютерів та комп'ютерних систем

Розглянемо ***мінус-двійкову систему числення***, тобто систему числення з основою $p=-2$, в якій використовуються символи 0 і 1. Як відомо [1, 2], в цій системі можна зображати як додатні, так і від'ємні числа (табл. 1).

Таблиця 1. Деякі числа мінус-двійкової сис теми числення

X_{10}	X_{-2}	X_{10}	X_{-2}
0	00000		
1	00001	6	11010
-1	00011	-6	01110
2	00110	7	11011
-2	00010	-7	01001
3	00111	8	11000
-3	01101	-8	01000
4	00100	9	11001
-4	01100	-9	01011
5	00101	10	11110
-5	01111	-10	01010

Крім того, в мінус-двійковій системі числення, як і в інших позиційних системах числення, подання будь-якого раціонального числа X має вигляд

$$X=\sum_{i=-\infty}^{n} x_i p^i\,, \qquad (1)$$

де x_i – цифра i-го розряду. Однак, на відміну від систем числення з додатною основою, деякі числа в мінус-двійковій системі числення мають неоднозначне подання, а саме, це числа вигляду

$$X=\pm\frac{(-2)^k}{3}+r\cdot(-2)^{k+1}, \qquad (2)$$

де k і r – довільні числа. Прикладом таких чисел є числа

$$X=\frac{1}{3}=\begin{cases}0,010101\ldots,\\ 1,101010\ldots.\end{cases},$$

Зауважимо, що два подання кожного з наведених чисел одержуються одне з одного шляхом інвертування (заміни 0 на 1, а 1 на 0) відповідних розрядів.

Переведення цілих десяткових чисел в мінус-двійкову систему числення методом ділення

Для переведення цілих десяткових чисел в мінус-двійкову систему числення можна застосувати традиційний метод ділення на основу числення $p=-2$, але з певною корекцією. Зокрема, при використанні метода послідовного ділення на основу $p=-2$ усі залишки на кожному кроці повинні бути додатними числами, які не перевищують абсолютного значення цієї основи; у іншому випадку потрібна корекція – додавання 1 до поточно одержуваної частки. Розглянемо цей алгоритм більш детально на прикладі.

Приклад 1. Перевести десяткове число $A_{10}=23$ в мінус-двійкову систему числення.

Виконуючи ділення з остачею на основу $p=-2$, та вносячи корекцію, у випадку від'ємної остачі додаванням 1 до частки, дістанемо:

23 = -11×(-2)+1, → a_0=1,
-11 = 5×(-2) -1, потрібна корекція
-11 = 6×(-2)+1, → a_1=1,
6 = -3×(-2)+0, → a_2=0,
-3 = 1×(-2) -1, потрібна корекція
-3 = 2×(-2)+1, → a_3=1,
2 = -1×(-2)+0, → a_4=0,
-1 = 0×(-2) -1, потрібна корекція

-1 = 1×(-2)+1, → a_5=1,
1 = 0×(-2)+1, → a_6=1.
Таким чином A_{-2}=1101011.

Переведення дробових десяткових чисел в мінус-двійкову систему числення методом множення

Для переведення правильних десяткових дробів в мінус-двійкову систему числення можна застосувати традиційний метод множення на основу числення $p=-2$, але, як і у випадку цілих чисел, з певною корекцією. При цьому поточні цілі частини дробів також повинні бути додатними числами, значення яких менші за модуль основи системи. Крім того, при переведенні правильного дробу (або дробової частини змішаного дробу) необхідно, щоб дробова частина на кожному кроці задовольняла умовам:

$$-\frac{2}{3} \le X \le \frac{1}{3}, \qquad (3)$$

де X – десятковий дріб, який переводиться в систему з основою p.

Якщо обмеження (3) не виконуються, то дріб потрібно перетворити наступним чином:

– Якщо число знаходиться в діапазоні $\frac{1}{3} < A < 1$, то його перетворюють за формулою $A' = -1 + A$, де число A' уже задовольняє умовам (3). Після цього потрібно покласти $a_0 = 1$ (ціла частина шуканого числа), а наступні (дробові) розряди знаходяться шляхом перетворення числа A' за алгоритмом множення з корекцією, якщо вона потрібна.

– Якщо число знаходиться в діапазоні $-1 < A < -\frac{2}{3}$, то його перетворюють за формулою $A' = 1 + A$, де число A' уже задовольняє умовам (3). Після цього потрібно покласти: $a_1 = 1$, $a_0 = 1$. Цими розрядами представляється в новій системі числення ціле число –1 (–1= –2+1→ 11). Наступні (дробові) розряди знаходяться перетворенням числа A' за алгоритмом множення з корекцією, якщо вона потрібна.

Приклад 2. Перевести десятковий дріб $A_{10} = 0.625$ в мінус-двійкову систему числення.

Оскільки вихідний дріб не задовольняє умову (3), то потрібна початкова корекція $A' = -1 + 0.625 = -0.375$. Тоді:

a_0=1← 0.625
-0.375 умова (3) виконується
× -2
0.750 умова (3) не виконується
a_{-1}=1, -0.250
× -2
0.500 умова (3) не виконується
a_{-2}=1, -0.500
× -2
a_{-3}=1, 0.000

Оскільки дробова частина дорівнює нулю, то процес закінчено. Таким чином, $0.625_{10}=1.111_{-2}$.

Приклад 3. Перевести десятковий дріб $A_{10} = -0.625$ в мінус-двійкову систему числення.

Так як вихідний дріб задовольняє умову (3), то початкова корекція не потрібна. Тоді:

a_0=0 ← -0.625 умова (3) виконується
× -2
a_{-1}=1, 0.250 умова (3) виконується
× -2
a_{-2}=0, -0.500 умова (3) виконується
× -2
a_{-3}=1, 0.000

Частка дорівнює нулю, процес закінчено. Таким чином, $-0.625_{10}=0.101_{-2}$.

Приклад 4. Перевести десятковий дріб $A_{10} = -0.75$ в мінус-двійкову систему числення.

Оскільки вихідний дріб не задовольняє умову (3), причому $-0.75 < -\frac{2}{3}$, то потрібна початкова корекція $A' = 1 + A = 1 - 0.75 = 0.25$. Тоді:

a_1=1 ← -0.75 умова (3) не виконується
a_0=1 ↙
0.25 умова (3) виконується
× -2
a_{-1}=0, - 0.50 умова (3) виконується
× -2
a_{-2}=1, 0.00

Остання частка дорівнює нулю, процес закінчено. Таким чином, $-0.75_{10}=11.01_{-2}$.

Переведення змішаних дробових десяткових чисел в мінус-деійкову систему числення

Переведення змішаних дробових десяткових чисел в мінус-двійкову систему числення можна виконати шляхом переведення цілої і дробової частин окремо з наступним їх об'єднанням. При об'єднанні слід врахувати наступне:

– Якщо дробова частина задовольняє нерівності $\frac{1}{3} < A < 1$, то до цілої частини потрібно додати 1, після чого перевести одержане ціле число і дробову частину заданого числа. Далі об'єднуємо одержані в результаті переведення ціле число і дробове число без його цілої частини (без 1).

– Якщо дробова частина задовольняє нерівності $-1 < A < -\frac{2}{3}$, то від цілої частини потрібно відняти 1, після чого перевести одержане ціле число і дробову частину заданого числа. Далі об'єднуємо одержані в результаті переведення ціле число і дробове число без його цілої частини (без 11).

– Якщо дробова частина задовольняє подвійну нерівність $-\frac{2}{3} \le A \le \frac{1}{3}$, то спочатку потрібно перевести цілу і дробову частини заданого числа, після чого, одержані в результаті переведення числа, об'єднати.

Алгебраїчне додавання в мінус-двійковій системі числення

Нехай потрібно виконати операцію додавання чисел X і Y, заданих в мінус-двійковій системі числення. Особливістю додавання в мінус-двійковій системі числення є те, що ваги сусідніх розрядів мають різні знаки. Тому одиниця переносу із попереднього розряду повинна відніматись із значення суми даного розряду, а не додаватись до нього. Ця обставина дещо ускладнює побудову алгоритму додавання чисел в мінус-двійковій системі числення в порівнянні з класичною двійковою системою. В літературі відомі два підходи до реалізації операції додавання. Один з підходів [1] базується на використанні переносів двох типів: переносу –1 $\left(\Pi_i^-\right)$ і +1 $\left(\Pi_i^+\right)$, що ускладнює операцію. Інший алгоритм розглядається в [2], який базується на використанні типових комбінацій і реалізація якого теж пов'язана з певними труднощами. У зв'язку з такими обставинами розглянемо питання про побудову алгоритму виконання операції додавання, який вільний від вказаних вище недоліків.

Для побудови такого алгоритму розглянемо подання чисел X_{-2} і Y_{-2} у вигляді многочленів за степенями основи числення $p = -2$:

$$X_{-2} = x_n(-2)^n + x_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + x_0(-2)^0 + x_{-1}(-2)^{-1} + \ldots + x_{-m}(-2)^{-m}, \quad (4)$$

$$Y_{-2} = y_n(-2)^n + y_{n-1}(-2)^{n-1} + \ldots + y_0(-2)^0 + y_{-1}(-2)^{-1} + \ldots + y_{-m}(-2)^{-m}. \quad (5)$$

Додавши ліві й праві частини (4) і (5), дістанемо

$$X_{-2} + X_{-2} = (x_n + y_n)(-2)^n + (x_{n-1} + y_{n-1})(-2)^{n-1} + \ldots + (x_0 + y_0)(-2)^0 + (x_{-1} + y_{-1})(-2)^{-1} + \ldots + (x_{-m} + y_{-m})(-2)^{-m}.$$

Розглянемо вираз $(x_i + y_i)\cdot(-2)^i$, $i = -m, -m+1, \ldots, n$. У випадку, коли $x_i = 1$, $y_i = 1$ виникає необхідність переносу одиниці в старші розряди, яку можна реалізувати наступним чином

$$(1+1)\cdot(-2)^i = 2\cdot(-2)^i = ((-2)^2 + (-2)^1)\cdot(-2)^i = 1\cdot(-2)^{i+2} + 1\cdot(-2)^{i+1}.$$

Це означає, що в цьому випадку виникають переноси в старші розряди двох типів: перенос на один розряд $P1_{i+1} = 1$ – коефіцієнт при $(-2)^{i+1}$ і перенос на два розряди $P2_{i+1} = 1$ – коефіцієнт при $(-2)^{i+2}$. Тому, в загальному випадку, *i*-й розряд суми буде формуватись в залежності від компонент значення величини

$$R_i = x_i + y_i + P1_i + P2_i,$$

яка може приймати значення від 0 до 4.

Розглянемо, як будуть формуватись розряди трьох величин: і-й розряд суми чисел S_i, переносу на один розряд $P1_{i+1}$ і переносу на два розряди $P2_{i+2}$.

Якщо $R_i = 0$, тоді $P2_{i+2} = 0$, $P1_{i+1} = 0$, $S_i = 0$.

Якщо $R_i = 1$, тоді $P2_{i+2} = 0$, $P1_{i+1} = 0$, $S_i = 1$.

Якщо $R_i = 2$, тоді значення розрядів трьох величин можна подати у вигляді

$$R_i \cdot (-2)^i = 2 \cdot (-2)^i =$$
$$= \left((-2)^2 + (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^0\right) \cdot (-2)^i =$$
$$= 1 \cdot (-2)^{i+2} + 1 \cdot (-2)^{i+1} + 0 \cdot (-2)^i$$

звідки маємо: $P2_{i+2} = 1$, $P1_{i+1} = 1$, $S_i = 0$.

Якщо $R_i = 3$, тоді значення розрядів трьох величин можна подати у вигляді

$$R_i \cdot (-2)^i = 3 \cdot (-2)^i =$$
$$= \left((-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0\right) \cdot (-2)^i =$$
$$= 1 \cdot (-2)^{i+2} + 1 \cdot (-2)^{i+1} + 1 \cdot (-2)^i,$$

звідки випливає, що $P2_{i+2} = 1$, $P1_{i+1} = 1$, $S_i = 1$.

Якщо $R_i = 4$, тоді значення розрядів трьох величин ряду можна подати у вигляді

$$R_i \cdot (-2)^i = 4 \cdot (-2)^i =$$
$$= \left((-2)^2 + 0 \cdot (-2)^1 + 0 \cdot (-2)^0\right) \cdot (-2)^i =$$
$$= 1 \cdot (-2)^{i+2} + 0 \cdot (-2)^{i+1} + 0 \cdot (-2)^i,$$

звідки випливає, що, $P2_{i+2} = 1$, $P1_{i+1} = 0$, $S_i = 0$.

На основі розробленого алгоритму, операцію алгебраїчного додавання можна реалізувати за допомогою наступної таблиці істинності (табл.2), де A_i, B_i – розряди чисел, які підсумовуються; P_{i-1}, Q_{i-2} – розряди переносу з молодших розрядів, відповідно на один і два розряди; S_i – розряди суми; P_i, Q_i – розряди переносів у старші розряди.

Таблиця 2. Алгебраїчне додавання в мінус-двійковій системі числення

a_i	b_i	P_{i-1}	Q_{i-2}	S_i	P_i	Q_i
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	0	1

На основі наведеної таблиці істинності можна побудувати логічні функції вихідних параметрів S_i, P_i і Q_i.

Неважко переконатись, що значення розрядів суми S_i та переносів P_i і Q_i обчислюються за логічними формулами:

$$S_i = A_i \oplus B_i \oplus P_i \oplus Q_i \ ,$$

$$P_i = \overline{A}_i P_i Q_i \vee A_i \overline{B}_i P_i \vee A_i \overline{B}_i Q_i \vee A_i B_i \overline{P}_i \vee$$
$$\vee B_i \overline{P}_i Q_i \vee B_i P_i \overline{Q}_i,$$

$$Q_i = A_i Q_i \vee A_i P_i \vee A_i B_i \vee B_i Q_i \vee B_i P_i \vee P_i Q_i$$

де $\oplus$ – символ операції додавання за модулем 2.

На основі одержаних формул легко побудувати мінус-двійковий суматор.

Приклад 5. Дано числа

$X = 45{,}625_{10} = 1110010{,}111_{-2}$,

$Y = -42{,}75_{10} = 11010101{,}01_{-2}$.

Знайти їх суму.

Результати виконання операції додавання наведено в табл.3.

Таблиця 3. Ілюстрація додавання чисел в мінус-двійковій системі числення

		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
X	45,625				1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
Y	-42,75			1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
P1			1		1	0	1	1	1	1	1	1	0	0

P2		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
Z		**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**

Отже,

$$Z_{-2}=111{,}001_{-2}=1\cdot(-2)^2+1\cdot(-2)^1+$$
$$1\cdot(-2)^0+1\cdot(-2)^{-3}=3-0{,}125=2{,}875$$

Звернемо увагу на комбінацію одиниць в розрядах 8 і 9, яка виходить за розряди заданих чисел. Число, яке відповідає даній комбінації, дорівнює нулю. Дійсно, у загальному випадку дану комбінацію можна подати у вигляді виразу

$$1\cdot(-2)^{i+1}+(1+1)\cdot(-2)^i=1\cdot(-2)^{i+1}-$$
$$-(-2)\cdot(-2)^i=1\cdot(-2)^{i+1}-1\cdot(-2)^{i+1}=0.$$

Переведення двійкових чисел в мінус-двійкову систему числення

Нехай маємо число X_2, задане в канонічній двійковій системі числення, яке потрібно перевести в мінус-двійкову систему числення. У цьому випадку процедура переведення є дещо простішою, ніж традиційна, яка вимагає застосування операції ділення (для цілих) або множення (для дробових) чисел і зводиться до розділення вихідного числа на два числа *A* і *B*, причому спосіб такого розділення залежить від знака вихідного числа, над якими *потрібно виконати лише операцію* додавання. Це істотно пришвидшує виконання операції переведення в порівнянні з традиційними алгоритмами.

Переведення додатних двійкових чисел в мінус-двійкову систему числення

Нехай маємо деяке додатне число X_2, задане в канонічній двійковій системі числення. Тоді його можна подати у вигляді многочлена

$$X_2=x_n(-2)^n+x_{n-1}(-2)^{n-1}+\ldots+$$
$$+x_0(-2)^0+x_{-1}\cdot(-2)^{-1}+\ldots+x_{-m}\cdot(-2)^{-m}. \qquad (6)$$

Перейдемо від числа X_2 до числа X_{-2}, заданого в мінус-двійковій системі числення, замінивши степені двійки з парними і непарними степенями за формулами:

$$2^{2k}=(-2)^{2k},\quad k=0,1,2,\ldots;$$
$$2^{2k-1}=(-2)^{2k}+(-2)^{2k-1},\quad k=1,2,\ldots$$

Підставивши одержані вирази в формулу (6), дістанемо многочлен

$$\begin{aligned}X_{-2}&=\ldots+x_3\cdot\left((-2)^4+(-2)^3\right)+x_2\cdot(-2)^2\\&+x_1\cdot\left((-2)^2+(-2)^1\right)+x_0\cdot\left((-2)^1+(-2)^0\right)\\&+x_{-1}\cdot\left((-2)^0+(-2)^{-1}\right)+x_{-2}\cdot(-2)^{-2}+\\&x_{-3}\cdot\left((-2)^{-2}+(-2)^{-3}\right)+\ldots,\end{aligned}\qquad (7)$$

який, після впорядкування за степенями основи числення $p=-2$, набуде вигляду

$$\begin{aligned}X_{-2}&=\ldots(x_3+x_4)\cdot(-2)^4+x_3\cdot(-2)^3+\\&(x_1+x_2)\cdot(-2)^2+x_1\cdot(-2)^1+\\&(x_0+x_1)\cdot(-2)^0+x_{-1}\cdot(-2)^{-1}+\\&(x_{-1}+x_{-2})\cdot(-2)^{-2}+x_{-3}\cdot(-2)^{-3}+\ldots\end{aligned}\qquad (8)$$

Розглянемо два способи перетворення многочлена (8), на основі яких мо*жна побудувати два алгоритми переве*дення цілих двійкових чисел в мінус-двійкову систему числення.

$$\begin{aligned}X_{-2}&=\ldots+x_4\cdot(-2)^4+x_2\cdot(-2)^2+\\&+x_0\cdot(-2)^0+x_{-2}\cdot(-2)^{-2}+x_{-4}\cdot(-2)^{-4}+\\&\ldots+x_3\left((-2)^4+(-2)^3\right)+\\&+x_1\left((-2)^2+(-2)^1\right)+x_{-1}\left((-2)^0+(-2)^{-1}\right)\\&+x_{-3}\left((-2)^{-3}+(-2)^{-2}\right)+\ldots\end{aligned}\qquad (9)$$

Виходячи з подання числа X_{-2} у вигляді (9) можна сформулювати наступне правило розділення числа (6) на складові *A* і *B*.

Якщо вихідне число X_2 додатне, то розряди числа A з парними номерами i (у тому числі і з $i=0$) дорівнюють розрядам числа X_2 з такими самими i, а розряди числа A з непарними i – дорівнюють нулю. Розряди числа B з парними номерами i дорівнюють нулю, а в розрядах з непарними i кожна, не рівна нулю цифра, заміняється одиницею в i-му і $i+1$-му розрядах. Після цього необхідно виконати підсумовування чисел A і B з урахуванням знаків ваг окремих розрядів.

Правила додавання чисел A і B за основою $p=-2$ пояснюються випадками, наведеними в табл. 4.

Таблиця 4. Пояснення правила додавання складових A і B

Випадки		1			2				3			4		
+	A	0	0	1	0	1	1	1	•	0	1			1
	B	0	1	0	1	1	0	1	•	0	1			1
=	Z	0	1	1	0	0	0	0	<u>1</u>	1	0	1	1	0

Перший алгоритм. Розділимо многочлен (8) на два многочлени: з парними і непарними індексами двійкових цифр x_i:

Випадок 1. Якщо у відповідних стовпцях складових A і B є нулі або одиниця і нуль чи нуль і одиниця, то відбувається звичайне додавання.

Випадок 2. Якщо у двох сусідніх стовпцях складових A і B є вказані комбінації, то у відповідних розрядах Z записуються нулі. Це пояснюється наступним чином. Нехай вказані комбінації знаходяться в розрядах з номерами $2k-1$ і $2k$ або $2k$ і $2k+1$.

Тоді:

$$(-2)^{2k}+(-2)^{2k-1}+(-2)^{2k-1}=$$
$$=2^{2k}-2\cdot 2^{2k-1}=0;$$
$$(-2)^{2k+1}+(-2)^{2k}+(-2)^{2k}=$$
$$=-2^{2k+1}+2\cdot 2^{2k}=0.$$

Випадок 3. Якщо у двох крайніх справа стовпцях складових A і B є вказані комбінації, а на місці символу «•» значення нуль або одиниця, то у відповідних розрядах Z записується комбінація 10, а крайня зліва одиниця (в таблиці вона виділена) є одиницею переносу в старший розряд. Це легко показати наступним чином:

$$2\cdot(-2)^{2k}=(-2)^{2k}(2^2-2^1)=$$
$$=(-2)^{2k+2}+(-2)^{2k+1};$$
$$2\cdot(-2)^{2k-1}=(-2)^{2k-1}(2^2-2^1)=$$
$$=(-2)^{2k+1}+(-2)^{2k}.$$

Випадок 4. Якщо у двох крайніх зліва стовпцях складових A і B є вказані комбінації, то у відповідних розрядах Z записується комбінація 110. Це є окремий випадок випадку 3.

Зауважимо, що розглянутий алгоритм розділення вихідного двійкового числа на складові співпадає із алгоритмом, розглянутим в [2].

Другий алгоритм. Іншого вигляду виразу (7) можна надати, якщо його розділити на два многочлени, перший з яких містить доданки усіх степенів, а другий – тільки парних степенів основи:

$$\begin{aligned}X_{-2}&=\ldots+x_3\cdot(-2)^3+x_2\cdot(-2)^2+\\&+x_1\cdot(-2)^1+x_0\cdot(-2)^0+x_{-1}\cdot(-2)^{-1}+\\&+x_{-2}\cdot(-2)^{-2}+\ldots+x_5\cdot(-2)^6+\\&+x_3\cdot(-2)^4+x_1\cdot(-2)^2+x_{-1}\cdot(-2)^{-2}+\\&+x_{-3}\cdot(-2)^{-4}+\ldots=A_{-2}+B_{-2}.\end{aligned} \tag{10}$$

Перший многочлен відповідає числу A_{-2} мінус-двійкової системи числення, розряди якого співпадають з розрядами вихідного двійкового числа X_2. Другий многочлен відповідає числу B_{-2} мінус-двійкової системи числення, розряди якого співпадають з непарними розрядами вихідного числа, зсунутими на один розряд вліво. Сформовані таким чином числа потрібно додати в мінус-двійковій системі числення.

Приклад 6. Перевести число $X = 5.625_{10} = 101.101_2$ в мінус-двійкову систему числення.

В табл. 5 – 6 наведено результати переведення за допомогою першого та другого алгоритмів. Тут X_2 – двійкове число, A, B – результати розщеплення числа X_2; $P1$, $P2$ – проміжні результати, які одержуються при додаванні складових A і B (одиниці переносу).

Таблиця 5. Перший алгоритм

		4	3	2	1	0	-1	-2	-3
X_2				**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
A				1	0	1	0	0	0
B			0	0	0	1	1	1	1
P1				0	1	0	0	0	0
P2				1	0	0	0	0	0
Z		**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Таблиця 6. Другий алгоритм

		4	3	2	1	0	-1	-2	-3
X_2				**1**	**0**	**1**	**1**	**0**	**1**
A				1	0	1	1	0	1
B			0	0	0	1	0	1	0
P1		0	1	0	1	0	0	0	0
P2		1	0	1	0	0	0	0	0
Z		**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**

Перевірка:

$$Z = (-2)^4 + (-2)^3 + (-2)^1 + (-2)^{-1} + $$
$$+ (-2)^{-2} + (-2)^{-3} = 5.625$$

Переведення від'ємних двійкових чисел в мінус-двійкову систему числення

Нехай маємо від'ємне двійкове число X_2. Тоді його можна подати у вигляді многочлена

$$X_2 = -x_n \cdot 2^n - x_{n-1} \cdot 2^{n-1} - \ldots - \\ - x_0 \cdot 2^0 - x_{-1} \cdot 2^{-1} - \ldots - x_{-m} \cdot 2^{-m}. \quad (11)$$

Перейдемо від числа X_2 до числа X_{-2}, замінивши степені двійки з парними і непарними степенями за формулами:

$$-2^{2k} = (-2)^{2k+1} + (-2)^{2k},$$
$$k = 0,1,2,\ldots;$$
$$-2^{2k-1} = (-2)^{2k-1}, \quad k = 1,2,\ldots$$

Підставивши одержані вирази в формулу (11), дістанемо многочлен

$$X_{-2} = \ldots + x_3 \cdot (-2)^3 + x_2 \cdot \left((-2)^3 + (-2)^2\right) \\ + x_1 \cdot (-2)^1 + x_0 \cdot \left((-2)^1 + (-2)^0\right) + \\ x_{-1} \cdot (-2)^{-1} + x_{-2} \cdot \left((-2)^{-1} + (-2)^{-2}\right) + \\ x_{-3} \cdot (-2)^{-3} + x_{-4} \cdot \left((-2)^{-3} + (-2)^{-4}\right) \ldots \quad (12)$$

Знову розглянемо два способи перетворення многочлена (12), на основі яких можна побудувати два алгоритми переведення від'ємних двійкових чисел в мінус-двійкову систему числення.

Перший алгоритм. Розділимо многочлен на два многочлена: з парними і непарними індексами двійкових цифр x_i:

$$X_{-2} = x_2 \cdot \left((-2)^2 + (-2)^3\right) + \\ + x_0 \cdot \left((-2)^0 + (-2)^1\right) + \\ + x_{-2} \cdot \left((-2)^{-2} + (-2)^{-1}\right) + \ldots + \\ + x_5 \cdot (-2)^5 + x_3 \cdot (-2)^3 + x_1 \cdot (-2)^1 + \\ x_{-1} \cdot (-2)^{-1} + x_{-3} \cdot (-2)^{-3} + x_{-5} \cdot (-2)^{-5} + \ldots \quad (13)$$

Виходячи з подання числа X_{-2} у вигляді (13) можна сформулювати наступне правило розділення числа (12) на складові A і B.

Якщо вихідне число X_2 від'ємне, то розряди числа A з парним i при $x_i \neq 0$ замінюються одиницею в i-м і $i+1$-му розрядах, а непарні розряди числа A дорівнюють нулю. Розряди числа B з парним i дорівнюють нулю, а розряди з непарним i дорівнюють i-м розрядам числа X_2. Підсумовування чисел A і B здійснюється за такими самими правилами, як і у випадку переведення додатних чисел.

Другий алгоритм. У цьому випадку многочлен (12) розділимо на два многочлени, перший з яких містить доданки усіх степенів, а другий – тільки парних степенів основи:

$$X_{-2} = x_3 \cdot (-2)^3 + x_2 \cdot (-2)^2 + x_1 \cdot (-2)^1 + \\ x_0 \cdot (-2)^0 + x_{-1} \cdot (-2)^{-1} + x_{-2} \cdot (-2)^{-2} + \ldots \\ + x_4 \cdot (-2)^5 + x_2 \cdot (-2)^3 + y_0 \cdot (-2)^1 + \\ + x_{-2} \cdot (-2)^{-1} + x_{-4} \cdot (-2)^{-3} + \ldots \quad (14)$$

Перший многочлен відповідає числу A_{-2} мінус-двійкової системи числення, розряди якого співпадають з розрядами вихідного двійкового числа X_2. Другий многочлен відповідає числу B_{-2} мінус-двійкової системи числення, розряди якого *співпадають* з парними розрядами вихідного числа, зсунутими на один розряд вліво. Сформовані таким чином числа потрібно додати в мінус-двійковій системі числення.

Розглянемо реалізацію розглянутих алгоритмів на конкретних прикладах.

Приклад 7. Перевести число $X = -5.625_{10} = -101.101_2$ в мінус-двійкову систему числення.

В табл.7 – 8 наведено результати переведення за допомогою першого та другого алгоритмів. Тут X_2 – двійкове число, A, B – результати розщеплення числа X_2, $P1$, $P2$ – проміжні результати, які одержуються при додаванні складових A і B (одиниці переносу).

Таблиця 7. Перший алгоритм

		4	3	2	1	0	.	-1	-2	-3
X_2				**1**	**0**	**1**		**1**	**0**	**1**
A			1	1	1	1		0	0	0
B			0	0	0	0		1	0	1
P1			0	0	0	0		0	0	0
P2			0	0	0	0		0	0	0
Z			**1**	**1**	**1**	**1**		**1**	**0**	**1**

Таблиця 8. Другий алгоритм

	4	3	2	1	0	.	-1	-2	-3
X_2			**1**	**0**	**1**		**1**	**0**	**1**
A			1	0	1		1	0	1
B		1	0	1	0		0	0	0
P1		0	0	0	0		0	0	0
P2		0	0	0	0		0	0	0
Z		**1**	**1**	**1**	**1**		**1**	**0**	**1**

Перевірка:

$$Z = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2)^1 + (-2)^0 + \\ + (-2)^{-1} + (-2)^{-3} = -5.625$$

Перехід від додатного числа, заданого в мінус-двійковій системі числення, до від'ємного і навпаки

Нехай маємо число Z, задане в мінус-двійковій системі числення. Запишемо його у вигляді многочлена

$$Z = z_n \cdot (-2)^n + \ldots + z_1 \cdot (-2)^1 + \\ + z_0 \cdot (-2)^0 + z_{-1} \cdot (-2)^{-1} + z_{-2} \cdot (-2)^{-2} + \\ + \ldots + z_{-m} \cdot (-2)^{-m}, \qquad (15)$$

де n – номер старшого розряду числа. Якщо n – парне, то число додатне; якщо n – непарне, то – від'ємне.

Так само, як і при переведенні двійкових чисел в мінус-двійкову систему, можна вказати два алгоритми переходу до числа з протилежним знаком.

Помноживши ліву і праву частини виразу (15) на (–1) дістанемо число з протилежним знаком, яке подамо у вигляді

$$-Z = -z_n \cdot (-2)^n - \ldots - z_1 \cdot (-2)^1 - \\ - z_0 \cdot (-2)^0 - z_{-1} \cdot (-2)^{-1} - z_{-2} \cdot (-2)^{-2} - \\ - \ldots - z_{-m} \cdot (-2)^{-m} \qquad (16)$$

Перший алгоритм. Для одержання першого алгоритму [2] перетворимо праву частину рівності (15) до вигляду

$$-Z = z_n \cdot \left((-2)^{n+1} + (-2)^n\right) + \ldots + \\ z_1 \cdot \left((-2)^2 + (-2)^1\right) + z_0 \cdot \left((-2)^1 + (-2)^0\right) + \\ z_{-1} \cdot \left((-2)^0 + (-2)^{-1}\right) + \\ + z_{-2} \cdot \left((-2)^{-1} + (-2)^{-2}\right) + \ldots \\ + z_{-m} \cdot \left((-2)^{-m+1} + (-2)^{-m}\right) \qquad (17)$$

З останнього подання числа $-Z$ можна зробити висновок, що його можна подати у вигляді суми двох чисел A і B, які одержуються з числа $-Z$ наступним чином. Кожній одиниці парного розряду ($z_{2k} = 1$, $k = 0,1,\ldots$) числа Z ставляться у відповідність дві одиниці в розрядах $2k$ і $2k+1$ в числі A, а інші розряди числа A – дорівнюють нулю. Аналогічно, кожній одиниці непарного розряду ($z_{2k-1} = 1$, $k = 1,2,\ldots$) числа Z ставляться у відповідність дві одиниці в розрядах $2k-1$ і $2k$ в числі B, а інші розряди числа B – дорівнюють нулю.

Другий алгоритм. Для одержання другого алгоритму перетворимо праву частину рівності (17) до вигляду

$$
\begin{aligned}
-Z &= z_n \cdot (-2)^n + \ldots + z_1 \cdot (-2)^1 + \\
&+ z_0 \cdot (-2)^0 + z_{-1} \cdot (-2)^{-1} + z_{-2} \cdot (-2)^{-2} + \\
&+ \ldots + z_{-m} \cdot (-2)^{-m} + z_n \cdot (-2)^{n+1} + \ldots + \\
&+ z_1 \cdot (-2)^2 + z_0 \cdot (-2)^1 + z_{-1} \cdot (-2)^0 + \\
&+ z_{-2} \cdot (-2)^{-1} + \ldots + z_{-m} \cdot (-2)^{-m+1}.
\end{aligned}
$$

З останнього подання числа $-Z$ можна зробити висновок, що його можна подати у вигляді суми двох чисел $A = Z$ і $B = 2 \cdot Z$. Число B одержується з числа Z шляхом зсуву його на один розряд вліво.

Після утворення чисел A і B необхідно виконати підсумовування їх з урахуванням випадків, наведених в табл. 9 або за правилами додавання чисел у мінус-двійковій системі числення.

Таблиця 9. Пояснення правила додавання складових A і B.

Випадки		1			2				3	
+	A	0	0	1	0	1	1	1	1	1
	B	0	1	0	1	1	0	1	1	1
=	Z	0	1	1	0	0	0	0	1	0

Приклад 8. Для заданого числа $Z_{-2} = 1110010.111 = 45.625_{10}$, користуючись першим та другим алгоритмом, знайти число, протилежне за знаком та виконати перевірку повторним перетворенням.

Результати перетворення наведено в табл.10–11.

Таблиця 10. Перший алгоритм

X=	45.625	8	7	6	5	4	-3	2	1	0		-1	-2	-3
Z				1	1	1	0	0	1	0	.	1	1	1
A			**1**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	.	**1**	**1**	**0**
B			**0**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	.	**1**	**1**	**1**
-Z	-45.625		1	1	0	1	0	1	1	1	.	1	0	1
A'		**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	.	**0**	**0**	**0**
B'		**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	.	**1**	**1**	**1**
Z	45.625	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	.	**1**	**1**	**1**

Таблиця 11. Другий алгоритм

X=	45.625	8	7	6	5	4	-3	2	1	0		-1	-2	-3
Z				**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	.	**1**	**1**	**1**
A				1	1	1	0	0	1	0	.	1	1	1
B			1	1	1	0	0	1	0	1	.	1	1	0
-Z	-45.625		**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**1**	**1**	.	**1**	**0**	**1**
A'			1	1	0	1	0	1	1	1	.	1	0	1
B'		1	1	0	1	0	1	1	1	1	.	0	1	0
Z	45.625	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	.	**1**	**1**	**1**

Операція віднімання в мінус-двійковій системі числення

Операцію віднімання в мінус-двійковій системі числення легко виконати шляхом заміни операцією додавання, якщо у від'ємника замінити знак на протилежний, що легко зробити за одним із вище описаних алгоритмів.

Приклад 9. Відняти числа

$A=18{,}625=10111{,}111_{-2}$

і $B=5{,}6875=11010{,}1111_{-2}$.

Виконаємо операцію віднімання шляхом заміни її операцією додавання, прийнявши до уваги, що

$-B=-5{,}6875=1110{,}0101_{-2}$:

$$
\begin{array}{r}
A - B = 10111{,}111 - 11010{,}1111 = 10111{,}1110 \\
+\ 1110{,}0101 \\
\hline
11101{,}0011
\end{array}
$$

Перевірка: $A-B=12{,}9375=11101{,}0011_{-2}$. Зауважимо, операцію додавання зручно виконувати за допомогою таблиці 8.

Переведення чисел з мінус-двійкової системи числення в канонічну двійкову

Для переведення числа із мінус-двійкової системи числення в канонічну двійкову можна скористатись алгоритмом, наведеним в [2]. Згідно з цим алгоритмом також необхідно розділити вихідний операнд Z на дві частин A і B. При цьому парні розряди числа A дорівнюють парним розрядам числа Z, а непарні розряди числа A дорівнюють нулю. Число B має в непарних розрядах ті ж цифри, що і число Z в непарних розрядах, а парні розряди числа B дорівнюють нулю. Далі з A необхідно відняти B, якщо Z додатне, або ж з B відняти A, якщо Z від'ємне. Операцію віднімання можна замінити операцією додавання в оберненому або доповняльному коді.

Операція множення в мінус-двійковій системі числення

Операція множення в мінус-двійковій системі числення виконується так само, як множення прямих кодів в двійковій канонічній системі числення, тобто шляхом додавання часткових добутків вигляду $A \cdot B_i \cdot (-2)^i$, B_i – цифри множника. При цьому добуток зразу одержується з правильним знаком, оскільки знаки операндів визначаються вагами старших значущих цифр. Зауважимо, що для даної системи числення, якщо операнди мають по n розрядів, то добуток може мати як менше, так і більше ніж $2n$ розрядів, що зумовлено специфікою подання чисел в мінус-двійковій системі числення.

Приклад 10. Перемножити числа:

$A=-3_{10}=1101_{-2}$ і $B=5_{10}=101_{-2}$.

Одну із схем множення наведено в табл.12.

Таблиця 12. Ілюстрація операції множення

СМ		0	0	0	0		
$A \cdot B_0$	+	1	1	0	1		
СМ		1	1	0	1		
СМ→		0	1	1	0	1	
$A \cdot B_1$	+	0	0	0	0		
СМ		0	1	1	0	1	
СМ→		0	0	1	1	0	1
$A \cdot B_2$	+	1	1	0	1		
СМ		**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**

Перевірка: $A \cdot B=1 \cdot (-2)^5+1 \cdot (-2)^4+1=-15$.

Операція ділення в мінус-двійковій системі числення

Операція ділення в мінус-двійковій системі числення є найбільш складною, оскільки на парних і непарних кроках алгоритму повинні формуватись цифри частки різних знаків, що складає значні труднощі при реалізації.

В даній роботі розглядаються три алгоритми, які базуються:

1. на використані операції віднімання з відповідною корекцією;
2. на заміні операції віднімання операцією додавання від'ємника, протилежного за знаком;
3. діленням многочленів з корекцією.

Проілюструємо запропоновані алгоритми на прикладах.

Приклад 11. Нехай задано числа: $A1 = 33_{10} = 1100001_{-2}$, $A2 = -33_{10} = 100011_{-2}$, $B1 = 11_{10} = 11111_{-2}$, $B2 = -11_{10} = 1100101_{-2}$. Знайдемо частки від ділення для різних комбінацій заданих чисел.

1. Алгоритм віднімання з корекцією. Користуючись даним алгоритмом знайдемо частку C1=A1/B1. Корекція полягає в заміні числа $\bar{1}$ в i-му розряді, яке одержується при відніманні, на дві одиниці в i-му і i+1-му розрядах, що випливає з формули

$$\bar{1} \cdot (-2)^i = -1 \cdot (-2)^i = 1 \cdot (-2)^{i+1} + 1 \cdot (-2)^i .$$

Результати наведено в табл. 13.

Таблиця 13. Ділення за алгоритмом з корекцією.

		1	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**	**1**
1	-	1	1	1	1	1			**1**	**1**	**1**		
		0	0	$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{1}$	0	1					
		0	0	1	1	1	0	1	Корекція:				

	+	0	1	1	1	0	0	0	$\bar{1}=11$
		0	1	1	0	1	0	1	
1	-	0	1	1	1	1	1	0	
		0	0	0	$\bar{1}$	0	$\bar{1}$	1	
		0	0	0	1	0	1	1	Корекція:
	+	0	0	1	0	1	0	0	$\bar{1}=11$
		0	0	1	1	1	1	1	
1	-	0	0	1	1	1	1	1	
		0	0	0	0	0	0	0	

2. Алгоритм додавання від'ємника, протилежного за знаком. Користуючись даним алгоритмом знайдемо частки C1=A1/B1 та C2=A2/B1, замінивши операцію віднімання числа B1 на операцію додавання числа B2. Результати наведено в табл. 14-15.

Таблиця 14. Ділення за алгоритмом додавання від'ємника

		−	+	−	+	−	+	−	+	
			1	1	0	0	0	0	1	1 1 1 1 1
1	+	1	1	0	1	0	1			1 1 1
		0	0	1	1	0		0	1	
1	+		1	1	0	1	0	1		
			0	0	1	1	1	1	1	
1	+		0	1	1	0	1	0	1	
			0	0	0	0	0	0	0	

Таблиця 15. Ділення за алгоритмом додавання від'ємника з протилежним знаком

		+	−	+	−	+	−	+	−	+	
					1	0	0	0	1	1	1 1 1 1 1
	+	1	1	0	1	0	1				1 1 0 1
1		0	0	1	0	0	1	0	1	1	
	+		1	1	0	1	0	1	0		
1				0	0	1	1	1	1	1	
				1	1	0	1	0	1	0	
0				0	0	1	1	1	1	1	
	+				1	1	0	1	0	1	
1				0	0	0	0	0	0	0	

З результатів, одержаних за алгоритмом додавання від'ємника з протилежним знаком, можна зробити наступні висновки:

1) старші розряди діленого і дільника (у різних випадках) можуть бути зміщені один відносно одного вліво чи вправо на різну кількість розрядів, що ускладнює правильний початок операції ділення;

2) в частку записується 1 і дільник зсувається вправо, якщо старші розряди часткового діленого (залишку) і дільника знаходяться в стовпчиках з різною парністю (з різними знаками);

3) в частку записується 0 і дільник зсувається вправо на один розряд, якщо старші розряди знаходяться в стовпчиках з однаковою парністю (з однаковими знаками).

3. Алгоритм ділення многочленів з корекцією. Суть алгоритму ділення з використанням многочленів полягає в наступному.

Позначимо через P основу числення мінус-двійкової системи числення, тобто $P=-2$. Тоді будь-яке число в цій системі можна подати у вигляді (1) (деякого узагальненого многочлена), а операцію ділення (у випадку скінчених сум) звести до ділення многочленів. Оскільки при діленні многочленів коефіцієнти x_i при p^i одержуються трьох видів 0, 1 або $\pm k$ $(k>1)$, то в останньому випадку потрібна корекція. Наприклад, вираз $2p^i = p^{i+2} + p^{i+1}$, що еквівалентно переносу на два розряди вліво. Аналогічно, $-p^i = p^{i+1} + p^i$ і т.д.

Приклад 12 Нехай задано числа: $A1 = 33_{10} = 1100001_{-2}$, $B1 = 11_{10} = 11111_{-2}$.

Знайти частку від ділення C1=A1/B1 користуючись третім алгоритмом (діленням многочленів з корекцією) . Результати наведено в табл. 16.

Таблиця 16. Ділення за третім алгоритмом.

	$p^5+0\cdot p^4+0\cdot p^3+0\cdot p^2+p+1$	$p^4+p^3+p^2+p^1+1$
-	$p^5+\ \ p^4+\ \ p^3+\ \ p^2+p$	P-1
	$-p^4-p^3-p^2+0\cdot p+1$	
-	$-p^4-p^3-p^2-p-1$	
	$p+2$	
	0	

Розшифруємо одержані результати.

1. Вираз Р+2=0. Дійсно,

$$p+2=p^1+2p^0=-2+2=0;$$

2. Вираз $p-1=p^3+p^2+1$.

Дійсно,

$$p-1=p-p^0=p+p+p^0=$$
$$=2p+p^0=p^3+p^2+1.$$

Одержаний запис відповідає многочленному запису числа $C1=1101_{-2}$ в мінус-двійковій системі числення.

Висновки

Розглянутий в даній роботі комплекс алгоритмів для переведення з десяткової та канонічної двійкової в мінус-двійкову систему числення і навпаки, а також комплекс алгоритмів для виконання арифметичних операцій дасть можливість розробити оптимальні за швидкодією цифрові логічні пристрої, які можуть знайти застосування при розробці спеціалізованих обчислювальних пристроїв та їх систем. Прикладом такого застосування є мінус-двійковий суматор, в якому немає потреби аналізувати знаки доданків і легко фіксувати переповнення розрядної сітки. Це ж саме стосується і операції множення. Дещо складнішою виявиться реалізація операції ділення.

Список літератури

1. *Поспелов Д.А.* Арифметические основы вычислительных машин дискретного действия. – М.: «Высшая школа», 1970. – 138 с.

2. *Корнійчук В.І., Тарасенко В.П., Тарасенко-Клятченко О.В.* Основи комп'ютерної арифметики. – К.: «Корнійчук», 2006. – 164 с.