УДК 629.11-52:681.51

Баранов Г. Л., д-р. техн. наук
Коваленко Ю. І.

РОЗРАХУНОК ПАРАМЕТРІВ РУХУ ТРАНСПОРТНОГО ЗАСОБУ ЗА ДАНИМИ ЗМІН ЙОГО ТРАЄКТОРІЇ РУХУ

Національний транспортний університет

Розглянуто моделювання процесів руху високошвидкісних транспортних засобів та отримано аналітичні розв'язки системи диференційних рівнянь, що значно прискорює обчислення

Постановка проблеми

Розв'язання задач оптимального керуванням руху транспортних засобів вимагає високої точності моделювання та необхідності реалізації моделі за допомогою ЕОМ. Складність нелінійної системи диференційних рівнянь , яка описує рух транспортного засобу, призводить до значного об'єму обчислень у реальному часі.

Аналіз досліджень та публікацій

Розв'язання проблеми моделювання динамічних процесів запропонував академік Пухов Г. Є. Диференціальні перетворення - це новий операційний метод, який на відміну від відомих інтегральних перетворень Лапласа, Фур'є, заснований на переводі оригіналів у область зображень за допомогою операції диференціювання. Скорочення об'єму обчислені чисельними методами досягається за рахунок аналітичних можливостей операційного методу двобічних диференційних перетворень. Переведення математичної моделі системи диференційних рівнянь методом диференційних перетворень в область зображень виключає часовий аргумент, але зберігає точність вихідної математичної моделі. В області зображень отримуються нові функціональні залежності, де головним аргументом є аргумент k із множини натуральних чисел. Зворотнє перетворення після розв'язку задачі керування рухом транспортного засобу виконується з області зображень до часової області значно простіше ніж для інте інтегральних перетворень типу Лапласа, Фур'є та інших [1-2].

Мета роботи

Знаходження аналітичних розв'язків в задачах керування рухом високошвидкісних транспортних засобів за даними спостережень параметрів за диференційних перетворень [3].

Вихідна математична модель керування рухом високошвидкісного транспортного засобу, що описується нелінійними диференційними рівняннями, виконується в область зображень прямим перетворенням виду[4-6]:

$$x(t) = X(k) = \frac{H^k}{k!}\left[\frac{d^k x(t)}{dt^k}\right]_{t=0}, \qquad (1)$$

де $x(t)$ – оригінал, що являє собою неперервну, диференційовану нескінченним числом разів і обмежену разом зі всіма своїми похідними функцію дійсного аргументу t, $X(k)$ - позначення диференціального зображення оригіналу, що представляє собою дискретну функцію цілочисельного аргументу k=0,1,2…H – масштабна стала, яка має розмірність аргументу t і обирається рівною відрізку $0 \le t \le H$,на якому розглядається функція $x(t)$.

Зворотнє зображення відновлює оригінал $x(t)$ у вигляді ряду Тейлора в точці t=0:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{t}{H}\right)^k X(k). \qquad (2)$$

Величина H повинна бути менша радіусу збіжності ряду ρ, який може бути визначений на основі ознаки збіжності Даламбера [7]:

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{X(k)}{H^k} : \frac{X(k+1)}{H^{k+1}}\right| = \\ = H\lim_{k\to\infty}\left|\frac{X(k)}{X(k+1)}\right|. \quad (3)$$

Перетворення (1) назвемо диференціальними тейлоровськими перетвореннями. Диференціальні зображення *X(k)* назвемо диференціальними спектрами, а значення функції *X(k)* при конкретних значеннях k – дискретами.

Розглянемо рівняння руху транспортного засобу масою m, що рухається зі швидкістю v_0, з урахуванням граничних умов на інтервалах зміни сил маємо наступні співвідношення:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{f(t)}{m}, \quad (4)$$

де *f(t)* – результуюча сила, яка діє на транспортний засіб на інтервалі $[0,T]$ відповідно:

$$f_1(t) = A_1\left(1-e^{-\tau_1 t}\right), t\in[0,t_1), \\ f_2(t) = A_2 t + c, t\in(t_1,t_2), \quad (5) \\ f_3(t) = A_3 e^{-\tau_2 t}, t\in(t_2,T].$$

Перетворимо рівняння (4)-(5) на систему диференційних рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v \\ \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{f(t)}{m} \end{cases}. \quad (6)$$

Розв'язки диференційного рівняння (6) визначаються окремо на кожному інтервалі $t \in [0,t_1)$, (t_1, t_2), $(t_2,T]$, де відбулися зміни сил.

Запишемо розв'язок диференційного рівняння (4) на першому інтрвалі. Спектральна модель системи (6) в області зображень має вигляд:

$$\begin{cases} X_1(k+1) = \dfrac{H}{(k+1)}V_1(k) \\ V_1(k+1) = -\dfrac{A_1 H}{(k+1)m} * \\ *\left(\sigma(k) + \left(\dfrac{(-\tau_1 H)^k}{k!}\right)\right) \end{cases}, \quad (7)$$

де $\sigma(k) = \begin{cases} 1, k=0 \\ 0, k>0 \end{cases}$

$$V_1(0) = v(0) = v_0, \\ X_1(0) = 0.$$

З рекурентного співвідношення (7), послідовно присвоюючи цілочисельні значення аргументу k=0,1,2…, знайдемо розв'язок системи (5) у вигляді диференційних спектрів:

$$X_1(1) = H * v_0, V_1(1) = 0, X_1(2) = 0,$$

$$V_1(2) = -\frac{A_1\tau_1 H^2}{2m},$$

$$X_1(3) = -\frac{A_1\tau_1 H^3}{6m},$$

$$V_1(3) = -\frac{A_1\tau_1^{\,2} H^3}{6m}.$$

Після зворотного перетворення отримаємо розв'язок рівняння (4) на першому інтервалі:

$$x_1(t) = v_0 t - \frac{A_1\tau_1^{\,2}}{6m}t^3. \quad (8)$$

Швидкість руху транспортного засобу на інтервалі $t \in [0,t_1)$ визначається рівнянням:

$$v_1(t) = v_0 - \frac{A_1\tau_1^{\,2}}{2m}t^2. \quad (9)$$

Визначимо розв'язок рівняння(4)-(5) на інтервалі (t_1, t_2). Запишемо спектральну модель системи (6) на другому інтервалі:

$$\begin{cases} X_2(k+1) = \dfrac{H}{(k+1)}V_2(k) \\ V_2(k+1) = -\dfrac{Hc}{(k+1)m}, при = 0 \end{cases}. \quad (10)$$

$$\begin{cases} X_2(k+1) = \dfrac{H}{(k+1)}V_2(k) \\ V_2(k+1) = -\dfrac{H^2 A_2}{(k+1)m}, при = 1 \end{cases}. \quad (11)$$

Враховуючи властивості диференціальних перетворень, початкові диференціальні спектри в точці $t=t_1$ дорівнюють алгебраїчній сумі дискрет інтервалу $t \in$

$[0,t_1)$, або відповідному значенню оригіналу в цій точці:

$$V_2(0) = V_2(t_1) = v_1(t_1) = v_0 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3},$$

$$X_2(0) = X_2(t_1) = x_1(t_1) = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3},$$

$$X_2(1) = H\left(v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3}\right),$$

$$V_2(1) = -\frac{cH}{m},$$

$$X_2(2) = -\frac{cH^2}{2m},$$

$$V_2(2) = -\frac{A_2H^2}{2m},$$

$$X_2(3) = -\frac{A_2H^3}{6m},$$

$$V_2(3) = 0.$$

Отже розв'язок системи (6) на другому інтервалі в області оригіналу після зворотнього перетворення має вигляд:

$$x_2(t) = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3} + \left(v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3}\right)t - \frac{c}{2m}t^2 - \frac{A_2}{6m}t^3 \quad (12)$$

Швидкість руху транспортного засобу на інтервалі $t \in (t_1,\ t_2)$ визначається рівнянням:

$$v_2(t) = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3} - \frac{c}{m}t - \frac{A_2}{2m}t^2. \quad (13)$$

Розглянемо систему диференційних рівнянь (6) на третьому інтервалі.

Запишемо спектральну модель системи (6):

$$\begin{cases} X_3(k+1) = \dfrac{H}{(k+1)}V_3(k) \\ V_3(k+1) = -\dfrac{A_3H}{(k+1)m} * \\ * \dfrac{(-\tau_2 H)^k}{k!} \end{cases} \quad (14)$$

Нульові значення диференційного спектру моделі (6) або нульові дискрети на інтервалі $t \in (t_2, T]$ дорівнюють алгебраїчній сумі дискрет функції в $t=t_2$ дорівнюють алгебраїчній сумі дискрет інтервалу $t \in (t_1,\ t_2)$, або відповідному значенню оригіналу в цій точці.

Отже розв'язок системи (6) у вигляді диференційних спектрів на інтервалі $t \in (t_2,\ T]$ обчислюється за допомогою системи (14):

$$V_3(0) = V_3(t_2) = v_2(t_2) = \\ = v_0 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3} - \frac{ct_2}{m}$$

$$X_3(0) = X_3(t_2) = x_2(t_2) = \\ = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3} + \\ + \left(v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3}\right)t_2 - \\ - \frac{c}{2m}t_2^{\,2} - \frac{A_2}{6m}t_2^{\,3}.$$

З рекурентних співвідношень (14) знайдемо розв'язок системи (6) у вигляді диференціальних спектрів на третьому інтервалі:

$$X_3(1) = H\left(v_0 - \frac{A_1\tau_1}{2m}t_1^{\,2} - \frac{A_1\tau_1}{6m}t_1^{\,3} - \frac{ct_2}{m}\right),$$

$$V_3(1) = \frac{-HA_3}{m},$$

$$X_3(2) = \frac{-H^2A_3}{2m},$$

$$V_3(2) = \frac{H^2A_3\tau_2^{\,2}}{2m},$$

$$X_3(3) = \frac{H^3A_3\tau_2^{\,2}}{2m},$$

$$V_3(3) = -\frac{H^3A_3\tau_2^{\,3}}{6m}.$$

Отже розв'язок системи диференційних рівнянь (6) в області оригіналу на третьому інтервалі після зворотнього перетворення має вигляд:

$$x_3(t) = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{6m} t_1^{\,3} + \left(v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m} t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m} t_1^{\,3} \right) t_2 - \frac{c}{2m} t_2^{\,2} - \frac{A_2}{6m} t_2^{\,3} + \left(v_0 - \frac{A_1\tau_1}{2m} t_1^{\,2} - \frac{A_1\tau_1}{6m} t_1^{\,3} \right) t - \frac{A_3}{2m} t^2 + \frac{A_3\tau_2^{\,2}}{6m} t^3 \quad (15)$$

Швидкість руху транспортного засобу на інтервалі $t \in (t_2, T]$ визначається рівнянням:

$$v_3(t) = v_0 t_1 - \frac{A_1\tau_1}{2m} t_1^{\,2} + \frac{A_1\tau_1}{6m} t_1^{\,3} + v_0 - \frac{A_1\tau_1}{2m} t_1^{\,2} - \frac{A_1\tau_1}{6m} t_1^{\,3} - \frac{A_3}{m} t + \frac{A_3\tau_2^{\,2}}{2m} t^2 \quad (16)$$

Висновки

Отримано аналітичний розв'язок рівняння руху транспортних засобів, що дозволяє в прискореному масштабі часу визначити будь-які проміжні значення параметрів високошвидкісних транспортних засобів. Подальші дослідження слід спрямувати на визначення невимірюємих параметрів за даними, що можливо виміряти досить точно.

Список літератури

1. *Пухов Г.Е.* Преобразования Тейлора и их применение в электротехнике и электронике. – К.: Наук. думка, 1978. – 256 с.

2. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 419 с.

3. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. – К.: Наук. думка, 1986. – 158 с.

4. *Баранов Г.Л.*, Макаров А.В. Структурное моделирование сложных динамических систем. – К.: Наук. думка, 1986. – 272 с.

5. *Пухов Г.Е.* Приближённые методы математического моделирования, основанные на применении Т-преобразований. – К.: Наук. думка, 1988. – 216 с.

6. *Пухов Г.Е.* Дифференциальные спектры и модели. – К.: Наук. думка, 1990. – 184 с.

7. *Стасюк О.І., Баранов В.Л., Баранов Г.Л., Фролова О.Г.* Диференціальні перетворення для комп'ютерного моделювання керуючих систем – К.: КУЕТТ, 2005. – 135 с.