

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ ФАЛЬСИФИКАЦИИ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

Одесский национальный политехнический университет

Предложен новый подход к решению проблемы обнаружения фальсификации цифрового изображения, основанный на анализе возмущений сингулярных чисел (собственных значений) блоков матрицы изображения. Подход дает возможность локализовать область несанкционированного изменения исходного изображения

Введение

Доказательство подлинности цифровых изображений (ЦИ) является важной задачей во многих областях человеческой деятельности: медицине, прессе, научных публикациях, судебных разбирательствах и т.д. Возрастающая актуальность рассматриваемой проблемы в настоящий момент в значительной степени обязана последним успехам в технике синтеза изображений, а также общедоступности редактирующего изображения программного обеспечения, и заставляет множество ученых искать пути и методы ее решения, опираясь на технику цифровых водяных знаков [1-3], технику, основанную на оценке местоположения источника света при генерации ЦИ [4], методику выявления результатов элементарных операций обработки изображения, используемых при его фальсификации [5] и др.

Постановка задачи и цель исследования

Каждый из указанных выше методов имеет свою область применения. Большинство из методов не гарантируют обнаружение фальсификации ЦИ при ее наличии, а при обнаружении – не локализуют ее область. Это заставляет искать принципиально новые подходы к решению задачи в целом.

Целью автора настоящей работы является создание единого математического подхода к решению проблемы детектирования фальсификации ЦИ, независимо от вида фальсифицирующего воздействия, на основе теории возмущений.

Настоящая работа является начальным этапом на пути к поставленной цели.

Любая фальсификация ЦИ представляет из себя возмущение [6] его матрицы (матриц), а значит может быть представлена как совокупность возмущений сингулярных чисел (СНЧ) и (или) сингулярных векторов (СНВ), а также собственных значений (СЗ) и (или) собственных векторов (СВ) исходной матрицы [7]. Для достижения поставленной цели необходимо установить характерные признаки этих возмущений, наличие или отсутствие которых даст возможность не только отделить фальсифицированное изображение от подлинного, но и локализовать область фальсификации.

Характерные особенности сингулярных чисел (собственных значений)

Пусть исходное ЦИ (для определенности – ЦИ в градациях серого), хранящееся в некотором формате без потерь, например, в формате *TIF*, матрица которого F имеет размерность $n \times m$, разбивается стандартным образом на блоки малой размерности, например, 8×8 [8]. Если для каждого блока A ЦИ определить множество всех СНЧ (сингулярный спектр), то оказывается, что в среднем лишь 2% от общего числа блоков (ОЧБ) имеют нулевые СНЧ.

Данный факт не случаен. Ранг любой матрицы определяется количеством ее ненулевых СНЧ [6], значит наличие нулей в сингулярном спектре будет говорить о том, что число ее линейно независимых строк (столбцов) меньше размерности. Однако, для произвольного реаль-

ного ЦИ, даже с учетом коррелированности значений яркости пикселей, вероятность того, что строки (столбцы) очередного блока окажутся линейно зависимыми, невелика.

В настоящее время большинство цифровых камер используют для хранения ЦИ схему JPEG (с потерями), основанную на дискретном косинусном преобразовании (DCT), включающую 3 основных шага: DCT, квантование, энтропийное кодирование [8].

Восстановление ЦИ включает в себя шаги, обратные к перечисленным выше, в обратном порядке.

Квантование коэффициентов DCT является необратимой процедурой и приводит к некоторым особенностям возмущений СНЧ блоков.

Пусть исходное ЦИ подверглось JPEG-сжатию. Проведем для него операцию *частичного восстановления* (ЧВ), которая включает в себя:

- 1) энтропийное декодирование;

2) умножение полученных коэффициентов на соответствующие элементы массива нормализации [6];

3) применение обратного DCT, но без последующего округления.

У полученной матрицы практически все блоки содержат нулевые СНЧ, причем таких значений в блоках будет достаточно много (табл. 1). Такая ситуация закономерна. После квантования и округления коэффициентов DCT блоков многие из них, отвечающие высоким и средним частотам, обнулятся, оставаясь нулями после ЧВ, что, учитывая соответствие между коэффициентами дискретного преобразования Фурье и сингулярными тройками (σ_i, u_i, v_i) матрицы изображения, где σ_i, u_i, v_i - СНЧ и отвечающие ему левый и правый СНВ соответственно, установленное в [7], приведет к обнулению наименьших (а возможно и средних по величине) СНЧ матриц блоков.

Таблица 1. Результаты сингулярного разложения блоков 8×8 частично восстановленных изображений

Изображение (TIF)	ОЧБ	Количества блоков, имеющих m нулевых СНЧ									Кол-во блоков, у кот-х нулевых СНЧ больше 2-х, по отношению к ОЧБ (в %)
		$m=8$	$m=7$	$m=6$	$m=5$	$m=4$	$m=3$	$m=2$	$m=1$	$m=0$	
POUT	1080	0	473	351	183	64	9	0	0	0	100
CAMERAMAN	1024	0	472	69	72	123	167	99	20	2	88
TIRE	725	20	168	112	117	141	123	43	1	0	94
MOON	2948	218	1624	464	387	182	68	5	0	0	99.8
CELL	437	0	303	31	17	54	28	4	0	0	99

Заметим, что, чем меньше нулевых СНЧ в рассматриваемом блоке, тем больше линий контура он содержит. Действительно, наличие контуров в блоке говорит о значительной высокочастотной составляющей в сигнале, отвечающем этому блоку. Тогда коэффициенты DCT, соответствующие высоким и средним частотам, будут сравнительно большими и могут остаться ненулевыми после квантования и ЧВ, а значит внесут свой вклад не только в максимальные СНЧ [7].

Для наглядного представления справедливости вышесказанного рассмотрим изображение CELL.TIF (рис. 1(a)). На рис. 1(б) представлена матрица

нулевых СНЧ блоков (МНСЧБ) размерности $[n/8] \times [m/8]$ ЧВ-изображения, каждый элемент которой равен количеству нулевых СНЧ в соответствующем блоке. На рисунке выделены элементы, имеющие наименьшие значения, что позволяет наглядно увидеть соответствие между контурами исходного ЦИ и блоками, содержащими наименьшее количество нулевых СНЧ в ЧВ-изображении.

Пусть исходное изображение, подвергнувшись JPEG-сжатию, восстанавливается полностью. Это означает, что после ЧВ все значения яркости пикселей округляются до целых и вводятся в диапазон $[0, 255]$. Это действие возмутит матрицу

изображения, полученную после ЧВ, определенным образом изменится количество нулевых СНЧ в блоках (табл. 2). Там, где после ЧВ не было элементов, значительно меньших 0 или больших 255, возмущение матрицы будет небольшим. В соответствии с соотношением

$$|\sigma_i - \bar{\sigma}_i| \leq \|E\|_2, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

имеющим место для произвольной матрицы [6], где $\sigma_i, \bar{\sigma}_i$ - СНЧ исходной и возмущенной матриц соответственно, E - матрица возмущений, $\|\bullet\|_2$ - спек-

Таблица 2. Результаты сингулярного разложения блоков 8×8 полностью восстановленных изображений

Изображение (.TIF)	ОЧБ	Количества блоков, имеющих m нулевых СНЧ									Кол-во блоков, у которых ну- левых СНЧ больше двух, по отношению к ОЧБ (%)
		m=8	m=7	m=6	m=5	m=4	m=3	m=2	m=1	m=0	
POUT	1080	0	473	126	125	110	93	93	29	31	86
CAMERAMAN	1024	0	472	51	37	58	70	109	81	146	67
TIRE	725	20	168	47	42	59	55	80	32	222	54
MOON	2948	218	1624	250	191	195	165	138	63	104	90
CELL	437	0	303	19	7	7	14	25	17	45	70

тральная матричная норма, СНЧ являются нечувствительными к возмущающим воздействиям. Если некоторые из нулевых СНЧ блоков матрицы ЧВ-изображения станут ненулями после полного восстановления (ПВ), то их значения будут сравнимы с погрешностью округления, что не характерно для блоков исходного ЦИ.

Наиболее заметным различие между совокупным исходным изображением и полностью восстановленным после JPEG-сжатия будет при сравнении их МНСЧБ. Типичная картина представлена на рисунке 1(в), при этом МНСЧБ для CELL.TIF имела только нулевые значения.

В общем случае матрица блока

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{18} \\ \dots \dots \dots \\ a_{81} \dots a_{88} \end{pmatrix},$$

симметричной не является. Согласно [9], ей можно поставить в соответствие две симметричные матрицы:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{18} \\ \dots \dots \dots \\ a_{18} \dots a_{88} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{81} \\ \dots \dots \dots \\ a_{81} \dots a_{88} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

рассмотрение которых вместо A приводит к более мелкой дискретизации матрицы ЦИ и, как следствие, большей чувствительности предлагаемого ниже метода выявления фальсификации ЦИ, по сравнению с рассмотрением блока A целиком.

Если в качестве блока изображения рассматривать его симметричный аналог A_1 или A_2 , то вместо множества СНЧ можно рассматривать множество СЗ соответствующих матриц, вычисление которых обладает рядом преимуществ перед вычислением сингулярного спектра [6]. В тоже время СЗ симметричной матрицы могут отличаться от ее СНЧ только знаком, кроме того, в симметричном случае соотношение (1) сохраняется и для СЗ, а потому все выводы о характерных чертах возмущений СНЧ при ЧВ и ПВ будут иметь место и для СЗ симметричных аналогов блоков.

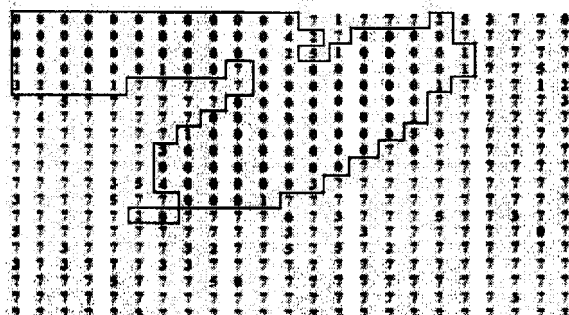
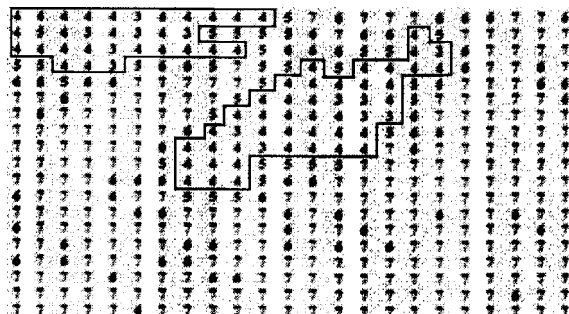


Рис. 1. Исходное изображение *CELL.TIF* (а); МНСЧБ после ЧВ (б); МНСЧБ после полного восстановления (в)

Обнаружение фальсификации

Будем считать, что в нашем распоряжении имеются фотоснимки, полученные современными цифровыми фотокамерами, т.е. каждый из них – это полностью восстановленное после *JPEG*-сжатия ЦИ. Тогда качественная картина для значений элементов соответствующих МНСЧБ будет аналогична, представленной на рис. 1(в).

Пусть часть фотоснимка, который будем называть *основным изображением* (ОИ), заменяется частью ЦИ, далее называемой *вклейкой*, или *замещающей областью* (ЗО), хранящегося в формате без потерь, причем для большей наглядности получаемых ниже выводов никакая последующая обработка изображения не производится. Такое фальсифицирован-

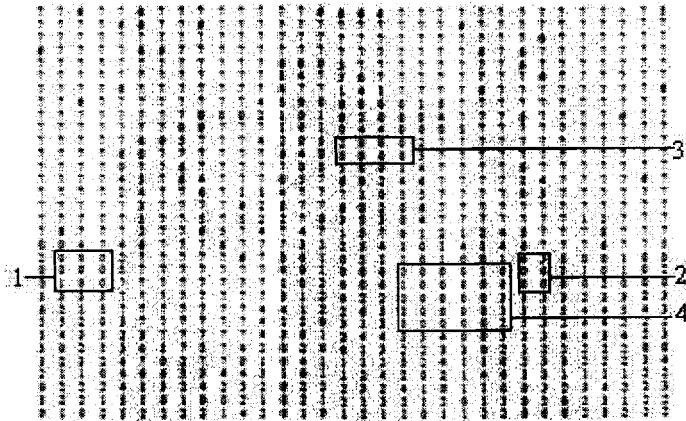
ное ЦИ (фотомонтаж) сохраняется без потерь. Пример на основе изображения *CAMERAMAN.TIF*, намеренно явно демонстрирующий вклейку, представлен на рис.3(а). При построении МНСЧБ полученного фотомонтажа части, отвечающие ОИ и ЗО, будут отличаться по количеству нулевых СНЧ блоков: подобласть МНСЧБ, которая соответствует вклейке, будет содержать большое количество нулей и значений, мало отличающихся от нуля (на рис. 3(б) – область 4).

Таким образом, для детектирования ЗО необходимо выделить в МНСЧБ связанные области, содержащие нули и близкие к нулю значения. Однако такие совокупности могут отвечать: а) вклейкам, б) областям ОИ, где малое количество нулевых СНЧ обязано округлениям, проводимым после ЧВ изображения (наименьшие СНЧ будут незначительно отличаться от нуля и значительно от предыдущих, что не свойственно вклейке), в) областям ОИ, содержащим значительное количество контуров, у которых после квантования и ЧВ уже имелось малое число нулевых СНЧ. Примеры областей б) и в) на рис.3(б) обозначены 1-3. Очевидно, что различить области а) и б), сравнивая сингулярные спектры блоков, входящих в них, не представляет труда (см. в табл.3 – «вклейка» и «основное изображение» 1, 2). Однако поведение СНЧ блоков 3-ей части ОИ качественно неотлично от поведения СНЧ блоков ЗО и никак не выделяет вклейку (табл. 3).

Проведем *JPEG*-сжатие для смонтированного изображения, но элементы массива нормализации возьмем меньше, чем использованные при первом квантовании коэффициентов *DCT* ОИ. Из сказанного выше вытекает, что второе квантование и ЧВ не должны качественно изменить картину для сингулярных спектров блоков 3-ей области ОИ. Действительно, отсутствие нулевых СНЧ в блоках этой части, значительное отличие последних по порядку СНЧ от нуля говорит о том, что эти блоки содержат большое количество контуров, т.е. значительными являются коэффициенты *DCT*, соответ-



а



б

Рис. 2. Фальсифицированное изображение (а); соответствующая МНСЧБ (б)

Таблица 3. Сингулярные спектры различных областей фальсифицированного изображения

		Блок изображе- ния	Сингулярные числа							
Вклейка 4		(21,19)	939.00	106.24	82.73	63.24	26.64	17.88	4.18	0.16
		(22,20)	819.41	214.78	199.64	85.04	45.49	29.48	21.38	6.29
		(23,20)	446.52	227.72	72.71	53.47	16.68	4.35	3.13	1.11
		(23,22)	1095.5	197.5	120.5	94.9	28.1	19.8	10.2	1.3
		(24,23)	659.30	86.37	16.86	10.68	6.69	5.86	2.71	0.63
		(25,22)	1099.9	289.7	134.4	72.8	50.5	33.3	8.8	2.2
Основное изображение	1	(20,3)	1175.8	96.4	57.9	21.8	7.2	0.7	0.4	0.4
		(20,4)	1122.3	106.1	63.1	38.6	14.9	0.7	0.6	0.1
		(21,2)	702.78	28.24	19.22	13.16	0.78	0.55	0.24	0.07
		(21,3)	675.31	46.64	39.91	16.16	8.77	0.49	0.40	0.25
		(22,3)	1035.5	111.0	33.2	22.4	1.8	0.8	0.3	0.1
	2	(20,25)	1145.0	98.4	77.2	32.7	19.0	0.5	0.3	0.1
		(21,26)	1009.1	181.5	67.2	24.9	15.8	0.9	0.5	0.3
		(22,27)	768.91	195.99	95.11	79.82	13.22	0.64	0.42	0.15
	3	(11,17)	1001.6	223.7	180.4	136.7	106.6	60.3	6.6	0.5
		(11,18)	651.09	124.11	90.55	59.19	30.20	21.44	2.09	0.65
		(12,17)	1124.2	244.3	144.9	137.5	91.0	52.4	4.0	1.3
		(12,19)	1026.1	220.8	151.9	117.3	59.8	13.7	7.2	1.4

вующие высоким и средним частотам. Если эти коэффициенты не обнулились при первом квантовании, то большая их часть останутся ненулевыми и при втором, где коэффициенты квантования будут меньше. Для вклейки процесс квантования коэффициентов DCT будет первым, поэтому проявится картина результатов первого квантования – значительное увеличение количества нулевых СНЧ в ее блоках. Проиллюстрируем вышесказанное на рассматриваемом примере.

При ЧВ смонтированного ЦИ, как и ожидалось, для области 3 ОИ картина количества нулевых СНЧ в блоках изменилась незначительно. Подматрица МНСЧБ, отвечающая области 3, будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

(нулевые элементы матрицы стали 1 или 2). Для вклейки нулевые значения МНСЧБ изменились в диапазоне от 1 до 5, что однозначно выделит ее как область фальсификации:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, если ОИ является результатом ПВ ЦИ после $JPEG$ -сжатия, а

ЗО – часть изображения, хранившегося без потерь, причем фальсифицированное ЦИ сохранено без потерь (TIF, BMP и т.д.), то основные шаги предлагаемого метода определения наличия вклейки и локализации ее области будут следующими:

1. Матрица анализируемого ЦИ разбивается стандартным образом на блоки малой размерности (8×8), для каждого блока находится сингулярный спектр, результатом чего является МНСЧБ M_1 .

2. В M_1 выделяются связные области O_1, O_2, \dots, O_m , большинство элементов которых имеют нулевое значение. Эти области могут соответствовать вклейкам.

3. Из O_1, O_2, \dots, O_m удаляются те области, для которых значительная часть минимальных СНЧ блоков мало отличается от нуля. Пусть $O_{k_1}, O_{k_2}, \dots, O_{k_p}$ – оставшиеся области.

4. Анализируемое ЦИ подвергается JPEG-сжатию, при котором элементы массива нормализации будут меньше, чем для JPEG-сжатия ОИ, с последующим ЧВ. Для матрицы ЧВ-изображения получаем МНСЧБ M_2 .

5. В матрице M_2 выделяем подобласти $\bar{O}_{k_1}, \dots, \bar{O}_{k_p}$, отвечающие O_{k_1}, \dots, O_{k_p} в M_1 . Вклейкам соответствуют те из $\bar{O}_{k_1}, \dots, \bar{O}_{k_p}$, которые содержат значительное число элементов из множества $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Замечание 1. Предлагаемый метод, как показывает вычислительный эксперимент, дает хорошие результаты с точки зрения правильного определения области фальсификации в случае, когда эта область захватывает несколько блоков по каждому из координатных направлений. Если же размеры ЗО вдоль какого-либо направления малы, то с ее локализацией возможны трудности.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Проведем фотомонтаж на основе ЦИ CELL следующим образом: в матрице ПВ-изображения размерами 159×191 строки 151-152 заменяются строками с

теми же номерами из CELL.TIF. Высота вклейки составляет всего 2 пикселя, или $\frac{1}{4}$ высоты блока. Такой монтаж даже без последующей обработки никак не отразился на визуальном восприятии ЦИ (рис.3(а)). Как видно (рис.3(б)), последняя строка МНСЧБ возмутилась, но не настолько, чтобы в этой области можно было заподозрить несанкционированное изменение. Поставим блокам смонтированного ЦИ в соответствие их симметричные аналоги вида $A_2 (A_1) (2)$, тогда последняя строка полученной МНСЧБ будет иметь вид:

3 3 3 0 3 0 3 0 3 3 3 0 3 3 0 3 3 0 3 3 0,
(5 5 5 2 5 1 5 1 5 5 5 1 6 5 3 5 5 1 5 1 5 5 2),

что уже явно указывает на фальсификацию ЦИ, локализирующуюся в нижних частях блоков последней блоковой строки.

Таким образом, использование симметричных аналогов блоков ЦИ приводит к большей чувствительности предлагаемого метода выявления области его несанкционированного изменения.

Замечание 2. При формировании монтажа ОИ не использовались дополнительно операции обработки изображения для маскировки вклейки. Однако их применение не изменит характерных особен-

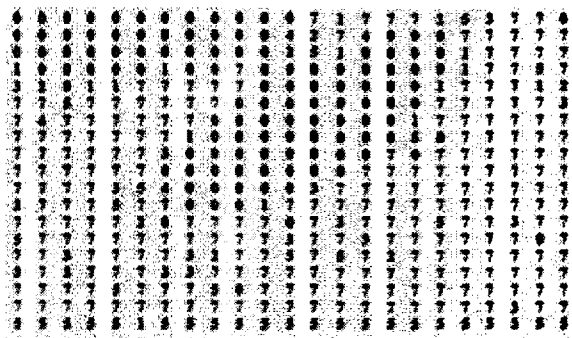


Рис. 3. Фальсифицированное ЦИ (а); соответствующая МНСЧБ (б)

ЗО – часть изображения, хранившегося без потерь, причем фальсифицированное ЦИ сохранено без потерь (TIF, BMP и т.д.), то основные шаги предлагаемого метода определения наличия вклейки и локализации ее области будут следующими:

1. Матрица анализируемого ЦИ разбивается стандартным образом на блоки малой размерности (8×8), для каждого блока находится сингулярный спектр, результатом чего является МНСЧБ M_1 .

2. В M_1 выделяются связные области O_1, O_2, \dots, O_m , большинство элементов которых имеют нулевое значение. Эти области могут соответствовать вклейкам.

3. Из O_1, O_2, \dots, O_m удаляются те области, для которых значительная часть минимальных СНЧ блоков мало отличается от нуля. Пусть $O_{k_1}, O_{k_2}, \dots, O_{k_p}$ – оставшиеся области.

4. Анализируемое ЦИ подвергается JPEG-сжатию, при котором элементы массива нормализации будут меньше, чем для JPEG-сжатия ОИ, с последующим ЧВ. Для матрицы ЧВ-изображения получаем МНСЧБ M_2 .

5. В матрице M_2 выделяем подобласти $\bar{O}_{k_1}, \dots, \bar{O}_{k_p}$, отвечающие O_{k_1}, \dots, O_{k_p} в M_1 . Вклейкам соответствуют те из $\bar{O}_{k_1}, \dots, \bar{O}_{k_p}$, которые содержат значительное число элементов из множества $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Замечание 1. Предлагаемый метод, как показывает вычислительный эксперимент, дает хорошие результаты с точки зрения правильного определения области фальсификации в случае, когда эта область захватывает несколько блоков по каждому из координатных направлений. Если же размеры ЗО вдоль какого-либо направления малы, то с ее локализацией возможны трудности.

Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Проведем фотомонтаж на основе ЦИ CELL следующим образом: в матрице ПВ-изображения размерами 159×191 строки 151-152 заменяются строками с

теми же номерами из CELL.TIF. Высота вклейки составляет всего 2 пикселя, или $\frac{1}{4}$ высоты блока. Такой монтаж даже без последующей обработки никак не отразился на визуальном восприятии ЦИ (рис.3(а)). Как видно (рис.3(б)), последняя строка МНСЧБ возмутилась, но не настолько, чтобы в этой области можно было заподозрить несанкционированное изменение. Поставим блокам смонтированного ЦИ в соответствие их симметричные аналоги вида $A_2 (A_1)$ (2), тогда последняя строка полученной МНСЧБ будет иметь вид:

3 3 3 0 3 0 3 0 3 3 3 0 3 3 0 3 3 0 3 3 0,
(5 5 5 2 5 1 5 1 5 5 5 1 6 5 3 5 5 1 5 1 5 5 2),

что уже явно указывает на фальсификацию ЦИ, локализирующуюся в нижних частях блоков последней блоковой строки.

Таким образом, использование симметричных аналогов блоков ЦИ приводит к большей чувствительности предлагаемого метода выявления области его несанкционированного изменения.

Замечание 2. При формировании монтажа ОИ не использовались дополнительные операции обработки изображения для маскировки вклейки. Однако их применение не изменит характерных особен-

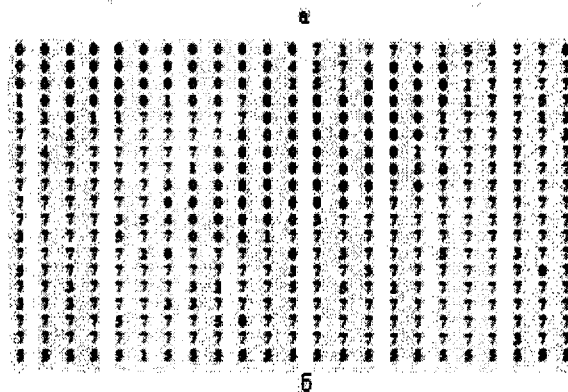
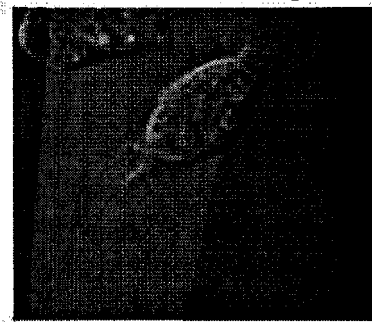


Рис. 3. Фальсифицированное ЦИ (а); соответствующая МНСЧБ (б)

ностей СНЧ (СЗ), выявленных выше, отличающих блоки ОИ от блоков ЗО, поскольку основа этих отличий лежит в том, что ОИ было сохранено с потерями, а вклейка без потерь. Заметим лишь, что размывка контура ЗО может привести к изменению картины полностью восстановленного после JPEG-сжатия изображения в областях ОИ, прилегающих к вклейке, что может затруднить определение ее границы.

Выводы

В работе предлагается принципиально новый подход к проблеме детектирования фальсификации ЦИ, основанный на теории возмущений, что никогда не делалось ранее. Предложенный в работе метод и его уточнение дает возможность не только установить сам факт несанкционированного изменения цифровой фотографии, но и достаточно точно локализовать область такого изменения, не привлекая для этого никакие дополнительные технические средства, а также средства обработки полученного изображения. Вся анализируемая информация предоставляется непосредственно матрицей ЦИ.

Список литературы

1. *Kundur D., Hatzinakos D.* Digital watermarking for tell-tale tamper proofing and authentication // *Proceedings of the IEEE*. – 1999. – Vol. 87(7). – P. 1167 – 1180.
2. *Fridrich J., Goljan M., Du M.* Invertible authentication // *In SPIE, Security and Watermarking of Multimedia Contents*. – 2001.
3. *Blythe P., Fridrich J.* Secure digital camera // *In Proc. Digital Forensic Research Workshop*. – 2004.
4. *Johnson M. K., Farid H.* Exposing digital forgeries by detecting inconsistencies in lighting // *In Proc. ACM Multimedia and Security Workshop, New York*. – 2005. – P. 1 – 10.
5. *Bayram S., Sankur B., Memon N.* Image manipulation detection // *Journal of Electronic Imaging*. – 2006. – Vol. 15(4). – P. 1 – 17.
6. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
7. *Кобозева А.А.* Связь свойств стеганографического алгоритма и используемой им области контейнера для погружения секретной информации // *Искусственный интеллект*. – 2007. – №4. – С. 531 – 538.
8. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. – М.: Техносфера, 2005. – 1072 с.
9. *Кобозева А.А.* Использование нормального спектрального разложения симметричной матрицы в компьютерной стеганографии // *Тр. Одес. политехн. ун-та*. – Одесса, 2007. – Вып.1(27). – С. 185 – 190.