

ОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ПРОСТОРОВОГО ПОЛОЖЕННЯ СУПУТНИКА

Національний авіаційний університет

Розв'язана задача стабілізації руху супутника і його орієнтації як динамічного об'єкта, побудовано оптимальне стабілізуюче управління. Проведено математичне моделювання руху супутника з оптимальним та стабілізуючим управлінням в середовищі Matlab.

Вступ

Зйомка земної поверхні з космосу – одне з напрямів використання штучних супутників Землі, що стрімко розвивається. Космічні знімки з високими метричними властивостями знаходять широке використання при вирішенні задач детальної картографічної зйомки місцевості, збору та обробки інформації з метою дослідження ресурсів Землі, екологічного контролю, моніторингу надзвичайних ситуацій, з метеорологічною метою тощо. Супутники, що виведені на навколоземні орбіти, – унікальний засіб для вивчення нашої планети як цілісної системи.

Важливим елементом ефективного використання космічного апарату для перерахованих цілей є можливість здійснювати поворот його навколо центру мас по всім трьом ступеням свободи в процесі зйомки. Така організація керуючого руху космічного апарату (КА) суттєво ускладнює планування зйомки та управління засобами спостереження, але значно розширює можливості застосування КА. Наприклад, з'являється раніше недоступний режим псевдостереокадра, коли один і той же район земної поверхні знімається з однієї точки траси польоту, і через деякий час – з іншої точки того ж витка. При цьому система управління КА повинна забезпечувати високу маневреність апарата і задовольняти вимоги надзвичайно високої точності стабілізації параметрів його кутового руху. Тому розв'язана в роботі задача стабілізації та оптимальної стабілізації руху КА є досить актуальною.

Постановка задачі

Розробити процедуру оптимізації стабілізуючого управління космічним апаратом та промодельовати його рух з оптимальним і стабілізуючим управлінням у середовищі програмування Matlab.

Основна частина

Передбачається, що для точної орієнтації та стабілізації КА використовуються виконавчі органи у вигляді двигунів маховиків.

Для визначеності будемо вважати, що КА має чотири маховика, які встановлені в корпусі КА, відповідно до схеми фірми General Electric [1]. На рис.1 приведена схема їх просторового розташування. Вектори моментів $M_i (i = \overline{1,4})$ проходять через вершини a, b, c і d прямокутного паралелепіпеда. Його грані паралельні осям зв'язаної системи координат xyz [2].

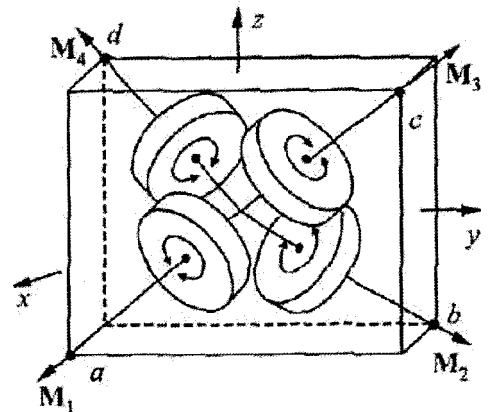


Рис.1. Просторове розташування КА

Чотири маховика формують керуючі моменти M_x, M_y, M_z , причому у випадку виходу з ладу одного маховика решта три маховика повинні забезпечувати повне управління та стабілізацію КА стосовно трьох осей.

Задача орієнтації

Застосуємо три координатні базиси (три праві трійки осей)

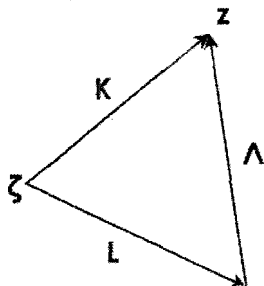


Рис.2. Координатні базиси

ζ – інерціальний базис,
 z – базис, зв’язаний з КА,
 Λ – орбітальний базис.

Нехай перехід від інерціального базису до орбітального визначається кватерніоном L , від орбітального до зв’язаного – кватерніоном Λ , а прямий перехід від інерціального базису до зв’язаного – кватерніоном K (рис. 2).

Тоді кватерніон K можна представити у вигляді добутку кватерніонів

$$K = L \circ \Lambda. \quad (1)$$

Якщо продиференціювати співвідношення (1) і врахувати кінематичні кватерніонні рівняння [3]

$$\dot{K} = \frac{1}{2} K \circ \Omega_z, \quad \dot{L} = \frac{1}{2} L \circ \Omega_\eta,$$

то після необхідних перетворень отримаємо кінематичне рівняння руху КА відносно орбітальної системи координат у вигляді

$$\dot{\Lambda} = \frac{1}{2} (\Lambda \circ \Omega_z - \Omega_\eta \circ \Lambda), \quad (2)$$

де Ω_η – кватерніонне відображення вектора орбітальної швидкості ω_{orb} у проєкціях на осі орбітальної системи η , Ω_z – кватерніонне відображення абсолютної кутової швидкості КА ω_z на осі зв’язаної системи координат z (далі $\omega_z = \omega$).

Оскільки добуток будь-яких кватерніонів $A \circ B$ можна представити через їх кватерніонні матриці M і N [4] у вигляді:

$$A \circ B = M(a) b = N(b) a,$$

то рівняння (2) в матричному вигляді прийме форму:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} [N(\omega) + M^T(\omega_\eta)] \lambda \quad (3)$$

Тут T - знак транспонування матриць, ω^0 – вектор абсолютної кутової швидкості КА, аналогічний ω , але з першим нульовим елементом:

$$\omega^0 = [0 \ \omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3]^T, \quad M(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U(\omega) \end{bmatrix} \quad (4a)$$

$$N(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega^T \\ \omega & U^T(\omega) \end{bmatrix} \quad (4b)$$

$$U(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & - \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4b)$$

Вважатимемо, що орбіта КА кругова. Вектор кутової швидкості ω_η має вигляд $\omega_\eta = [0 \ 0 \ 0 \ \omega_{z2}]^T, \omega_{z2} = -\sqrt{\mu/R^3}$ [5], де μ – гравітаційна постійна Землі, $\mu = 398600.4 \text{ км}^3/\text{с}^2$, R – радіус орбіти КА, $R = 42164 \text{ км}$ (або висота 35768 км від поверхні Землі).

Задамо орієнтацію $\lambda \rightarrow \lambda_s$, яка буде відповідати $\omega \rightarrow \omega_s$. Тоді заданий програмний рух КА буде визначатися рівнянням

$$\dot{\lambda}_s = \frac{1}{2} [N(\omega_s) + M^T(\omega_\eta)] \lambda_s, \quad (5)$$

У загальному випадку

$$\lambda = \lambda_s + x, \quad \omega = \omega_s + u, \quad (6)$$

де x – відхилення від заданої орієнтації, u – управління кутовою швидкістю КА.

Підставивши рівності (6) у рівняння (3), будемо мати:

$$\dot{\lambda}_s + \dot{x} = \frac{1}{2} [M^T(\omega_\eta)(\lambda_s + x) + (M(\lambda_s) + M(x))(\omega_s^0 + u^0)],$$

звідки, врахувавши (5), остаточно отримаємо рівняння руху КА у відхиленнях

$$\dot{x} = \frac{1}{2} [M^T(\omega_{\eta}) + N(\omega_{\xi})] x + \frac{1}{2} M(\lambda) u^2. \quad (7)$$

Основна задача орієнтації – це синтезувати таке управління u^0 , яке забезпечить $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Позначивши для зручності:

$$N(\omega_{\xi}) + M^T(\omega_{\eta}) = A(\omega_{\xi}, \omega_{\eta}), \quad (8)$$

перепишемо рівняння (6) таким чином:

$$\dot{x} = \frac{1}{2} [A(\omega_{\xi}, \omega_{\eta}) - \frac{1}{2} M(\lambda) C^0] x. \quad (9)$$

Тут

$$u^0 = -C^0 x, \quad C^0 = \begin{bmatrix} 0^T \\ C \end{bmatrix}, \quad C \in \mathbb{R}_{2 \times 4} \quad (10)$$

– шукане стабілізуюче керування.

Розв'яжемо задачу стабілізації КА, використовуючи другий метод Ляпунова [6], коли задача синтезу систем стабілізації приводить до розгляду матричного рівняння Ляпунова:

$$\dot{D} + D(A - BC) + (A - BC)^T D = -Q^*. \quad (11)$$

Тут $D(t)$, $Q(x, t)$ – симетричні матриці коефіцієнтів позитивно визначених квадратичних форм:

$$V(x, t) = x^T D(t) x, \quad (12a)$$

$$W(x, t) = x^T Q^*(x, t) x, \quad (12b)$$

які згідно з другим методом Ляпунова повинні задовольняти умову

$$\dot{V} = -W < 0$$

на будь-яких траєкторіях $x = x(x_0, t_0, t)$ вихідної нелінійної системи (9), замкнутої обмеженим управлінням (10).

Таким чином, у загальному випадку з одного рівняння Ляпунова (11) треба отримати дві матриці: матрицю управління C з (10) і матрицю D коефіцієнтів квадратичної форми V – функції Ляпунова з (12).

Проте ця, здавалося б погано обумовлена задача, розв'язується, зокрема, методом прямого жорсткого синтезу (ПЖС) нелінійних систем стабілізації [7], в якому

жорстко обмежується структура матриць коефіцієнтів квадратичних форм (12) $D = D_* D_*^T$, $Q^* = Q_* Q_*^T$ шляхом їх мультиплікативної параметризації довільними неособливими квазітрикутними нижніми (тоді і матриці D , Q^* називаються *нижніми*) чи верхніми (відповідно матриці D , Q^* називаються *верхніми*) матрицями D_* , Q_* , що гарантує не тільки симетричність і позитивну визначеність матриць D , Q^* , але й дозволяє використовувати стаціонарні матриці D .

Відзначимо неминучу обмеженість області застосування методів ПЖС при розв'язанні задач стабілізації *нелінійних* систем, обумовлену такими факторами:

- використанням квадратичних форм (12) замість нелінійних функцій Ляпунова;

- стаціонарністю матриці D коефіцієнтів квадратичної форми V у випадках нестационарних нелінійних систем (3);

- априорною параметризацією матриць D і Q^* коефіцієнтів квадратичних форм (12).

Перепишемо рівняння Ляпунова (10) в позначеннях (8)-(10), поклавши в ньому $D = \text{const}$ і для зручності $Q^* = 2DQD$. В результаті будемо мати

$$D(A - MC^0) - (A - MC^0)^T D = -2DQD. \quad (13)$$

Застосувавши до рівняння Ляпунова (12) метод кососиметризації [3], для чого його варто переписати у вигляді:

$$[D(A - MC^0) + DQD] + [D(A - MC^0) + DQD]^T = 0,$$

коли його можна задовольнити довільною кососиметричною матрицею $P \in \mathbb{P}$:

$$[D(A - MC^0) + DQD] = DSD.$$

У результаті отримано:

$$M(\lambda)C^0 = A + (Q + S)D. \quad (14)$$

Закон керування (14) можна спростити, поклавши в ньому $D = I_4$ – одинична матриця 4×4 , тоді з (13) будемо мати $C^0 = I_4^0 M^T(\lambda)(A + Q + S)$ або з урахуванням позначення (8) відповідно:

$$C^0 = I_4^0 M^T(\lambda) \cdot [M^T(\omega_z) + M(\omega_z) + Q + S], \quad (15)$$

де $I_4^0 = \begin{bmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & I_3 \end{bmatrix}$.

Остаточно згідно з (6), (10) і (15) закон управління матиме вигляд:

$$u^0 = C^0(\lambda - \lambda_s). \quad (16)$$

Перепишемо рівняння (3) і (5) так, щоб вони відповідали системам з керуючими органами:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{2} M^T(\omega_z) \lambda + \frac{1}{2} M(\lambda) \omega^0, \quad (17a)$$

$$\dot{\lambda}_z = \frac{1}{2} M^T(\omega_z) \lambda_z + \frac{1}{2} M(\lambda_z) \omega_z^0, \quad (17b)$$

Тоді згідно з (6) та (16) будемо мати:

$$u^0 = \omega^0 - \omega_z^0 = C^0(\lambda - \lambda_s), \quad (18)$$

причому, як видно із співвідношення (18), керування (16), (15), забезпечуючи стабілізацію відповідного кінематичного рівняння КА (першого з (17)), гарантує виконання умови:

$\omega \rightarrow \omega_s$ при $\lambda \rightarrow \lambda_s$ і навпаки.

При цьому програмне значення абсолютної кутової швидкості КА буде визначатися виразом

$$\omega_s^0 = I_4^0 M^T(\lambda_s) [N(\lambda_s) \omega_{sp0}^0 + 2\lambda_s]. \quad (19)$$

Динаміка КА з маховиками

Математична модель механічної системи, що складається з твердого тіла (КА) з діагональним тензором інерції I_n та N маховиків має вигляд [8]:

$$I_n \dot{\omega} + U(\omega) I_n \omega + G \dot{q}_z + U(\omega) G q_z = 0, \quad (20)$$

де $I_n = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$ – діагональний тензор

інерції КА,

ω – абсолютна кутова швидкість КА в проєкціях на осі z , зв'язані з КА,

q_z – кінематичні моменти маховиків, $U(\omega)$ – матриця коефіцієнтів, що має вигляд (4).

Кінематичні моменти маховиків визначаються: $q = [q_1, q_2, \dots, q_N]^T$, $q_i = J_i \dot{\phi}_i$, $t = \mathbb{T} \cdot N$, де $\dot{\phi}_i$ – кутова швидкість i -го маховика, J_i – момент інерції маховика відносно його осі обертання.

Нехай:

$$G \dot{q}_z + U(\omega) G q_z = u_z, \quad (21)$$

де $u_z \in \mathbb{R}_{2 \times 1}$ – матриця управління КА.

Тоді матимемо незалежну задачу синтезу управління:

$$I_n \dot{\omega} + U(\omega) I_n \omega + u_z = 0 \quad (22)$$

Помножимо рівняння (22) на J_n^{-1} справа, отримаємо:

$$\dot{\omega} + J_n^{-1} U(\omega) I_n \omega + J_n^{-1} u_z = 0 \quad (23)$$

Необхідно синтезувати таке управління u , щоб ω прямувало до ω_s – заданого значення кутової швидкості з (19). При $\omega = \omega_s$, управління дорівнює нулю, тоді:

$$\dot{\omega}_s = J_n^{-1} U(\omega_s) I_n \omega_s \quad (24)$$

Введемо наступне позначення:

$$A(\omega) = J_n^{-1} U(\omega_s) I_n$$

$$\text{де } A(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & I_{21} \omega_3 & I_{31} \omega_2 \\ -I_{12} \omega_3 & 0 & I_{32} \omega_1 \\ I_{13} \omega_2 & -I_{23} \omega_1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_{ij} = \frac{I_i}{I_j} \quad (25)$$

Тоді рівняння (23), (24) матимуть вигляд:

$$\dot{\omega} = A(\omega) \omega - J_n^{-1} u, \quad (26)$$

$$\dot{\omega}_s = A(\omega_s) \omega_s. \quad (27)$$

Кутова швидкість КА у відхиленнях від заданої описується рівністю:

$$\omega - \omega_s = x, \quad (28)$$

враховуючи яку та віднімаючи від рівняння (26) рівняння (27), можна отримати рівняння руху КА у відхиленнях. Будемо мати:

$$\dot{x} = A(x)\omega_s + A(\omega)x - J_n^{-1}u. \quad (29)$$

Розглянемо перетворення:

$$A(x)\omega_s = \begin{bmatrix} 0 & J_{21}x_3 & -J_{21}x_2 \\ -J_{12}x_3 & 0 & J_{22}x_1 \\ J_{13}x_2 & -J_{23}x_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = A_n(\omega_s)x,$$

з якого випливає співвідношення:

$$A(x)\omega = A_n(\omega)x, \quad (30)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & (J_{21} - J_{31})\omega_3 + J_{21}x_3 & (J_{21} - J_{31})\omega_2 - J_{21}x_2 \\ (J_{32} - J_{12})\omega_3 - J_{12}x_3 & 0 & (J_{32} - J_{12})\omega_1 + J_{32}x_1 \\ (J_{13} - J_{23})\omega_2 + J_{13}x_2 & (J_{13} - J_{23})\omega_1 - J_{23}x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Для стабілізації системи (32) потрібно синтезувати стабілізуюче управління за зворотним зв'язком виду (10), а саме:

$$u = C_1 x. \quad (34)$$

Тоді рівняння (32) набере вигляду:

$$\dot{x} = (A_1 - J_n^{-1}C_1)x. \quad (35)$$

Застосовуючи знову другий метод Ляпунова, виберемо додатно визначену квадратичну форму $V_1 = x^T D_1 x > 0$, а її повну похідну у часі $\dot{W}_1 = -x^T D_1 Q_1 D_1 x < 0$ - від'ємно визначену квадратичну форму. В результаті отримаємо рівняння Ляпунова, подібне до (13), а саме:

$$D_1(A_1 - J_n^{-1}C_1) + (A_1 - J_n^{-1}C_1)^T D_1 = -2D_1 Q_1 D_1, \quad (36)$$

з матрицями D_1 і Q_1 у вигляді [9]:

причому:

$$A_n(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -J_{21}\omega_3 & J_{21}\omega_2 \\ J_{32}\omega_3 & 0 & -J_{12}\omega_1 \\ -J_{23}\omega_2 & J_{13}\omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Якщо до рівняння (29) застосувати перетворення (30), то з (29) отримаємо:

$$\dot{x} = A(x, \omega_s)x - J_n^{-1}u, \quad (32)$$

де:

$$A(x, \omega_s) = A_n(\omega_s) + A(\omega_s) + A(x) = A_1.$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22}^2 \end{bmatrix}, \quad (37.a)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} d_{11}^2 q_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & d_4^2 q_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22}^2 q_{22}^2 \end{bmatrix}. \quad (37.b)$$

Застосовавши до рівняння (36) процедуру методу кососиметризації (13)-(14), отримаємо матрицю управління:

$$C_1 = J_n [A(x, \omega_s) + (Q_1 + S_1)D_1], \quad (38)$$

з якою рівняння (26) перепишеться так:

$$\dot{\omega} = A(\omega_s) - [A_1(x, \omega_s) + (Q_1 + S_1)D_1](\omega - \omega_s), \quad (39)$$

причому:

$$A(x, \omega_s) = A(\omega - \omega_s, \omega_s) = A(\omega_s) + \begin{bmatrix} 0 & -J_{21}\omega_3^* & J_{21}\omega_2^* \\ J_{32}\omega_3^* & 0 & -J_{12}\omega_1^* \\ -J_{23}\omega_2^* & J_{13}\omega_1^* & 0 \end{bmatrix}, \quad (40)$$

(де $\omega^* = \omega_s$).

Отже, остаточно застabilізований рух КА описується рівнянням:

$$\dot{\omega} = -(Q_1 + S_1)D_1(\omega - \omega_s) + A_n(\omega_s)\omega_s, \quad (41)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} a_{11}^4 q_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{44}^4 q_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}^4 q_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^4 q_{11}^2 & -J_{21}\omega_2^* & J_{21}\omega_2^* \\ J_{32}\omega_2^* & a_{44}^4 q_{22}^2 & -J_{12}\omega_1^* \\ J_{23}\omega_2^* & J_{13}\omega_1^* & a_{22}^4 q_{33}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Динамічні рівняння системи маховиків

Для маховиків маємо два рівнозначні рівняння [9, 10]:

$$\dot{q}_x = U^T(\omega)q_x + C_1(\omega, \omega_s)\omega, \quad (43)$$

$$\dot{q}_x = -J\dot{\omega} + M_m, \quad (44)$$

причому рівняння (43) отримане з (21) з урахуванням (38), (40).

$$M_m = \left\{ J_n [A(\omega) + A_n(\omega_s)] + \frac{1}{2} (J_n - J \cdot I_3) (Q_1 + S_1) D_1 \right\} \omega + J \left[A_n(\omega_s) \omega_s + J_n^{-1} M_x + \frac{1}{2} (Q_1 + S_1) D_1 \omega_s \right]. \quad (46)$$

Але

$$M_m = M_{\text{вд}} + M_{\text{шп}} U^T(\omega)q_x = M_{\text{вд}} + k_{\text{тп}} \text{stgn} \phi - k \phi,$$

де:

$$M_{\text{вд}} = \left\{ J_n [A(\omega) + A_n(\omega_s)] + \frac{1}{2} (J_n - J \cdot I_3) (Q_1 + S_1) D_1 \right\} \omega + J \left[A_n(\omega_s) \omega_s + J_n^{-1} M_x + \frac{1}{2} (Q_1 + S_1) D_1 \omega_s \right] + U^T(\omega)q_x + k_{\text{тп}} \text{stgn} q_x + k_n q_x$$

причому $k_n = \frac{k}{j}$, k – коефіцієнт в'язкого тертя.

Оптимальне управління супутником

Проблема оптимізації управління системою виникає при обмежених енергетичних ресурсах, коли реалізація управління певною потужністю для стабілізації

де ω_s – знайдене із задачі орієнтації за формулою (19).

Підставивши в рівняння (41) значення матриць D_1, Q_1 з (37), поклавши $S_1 = 0$ та врахувавши формулу (31) для $A_n(\omega_s)$, отримаємо диференціальне динамічне рівняння застabilізованого руху КА в матричному вигляді:

Використовуючи рівняння (41), виключимо $\dot{\omega}$ в рівнянні (44) і в результаті отримаємо:

$$\dot{q}_x = -J \left[-\frac{1}{2} (Q_1 + S_1) D_1 (\omega - \omega_s) A_n(\omega_s) \omega_s + J_n^{-1} M_x \right] + M_m, \quad (45)$$

Виключивши \dot{q}_x з рівнянь (43), (45), знайдемо момент M_m . Будемо мати:

супутника виявляється неможливою. Тоді ймовірні або залишкові похибки стабілізації, або перехід об'єкта не в задану точку, а в її приблизний окіл.

За критерієм узагальненою роботи О.А. Красовського [11]

$$I(x, u, u_{\text{опт}}) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q(x, t) + u^T R u + + u_{\text{опт}}^T R u_{\text{опт}}) dt \rightarrow \min_{u \in U}$$

де $Q(x, t) = Q_1$ визначається формулою

$$(37), R = \begin{bmatrix} r_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2 \end{bmatrix} - \text{додатно визна-}$$

чена матриця вагових коефіцієнтів.

Побудуємо оптимальне управління, прирівнявши матрицю підсилення стабілізуючого управління $C_1(\omega, \omega_s)$ з виразу (38), (40) до матриці підсилення оптимального управління $K = -R J_n^{-1} E_1$. В результаті отримаємо управління, яке забезпечує оптимальну стабілізацію супутника, у вигляді:

$$u_{\text{опт}} = \begin{bmatrix} r_1^2/d_{11}^2 J_1 & J_{21} \omega_2 - J_{31} \omega_3 & -J_{31} \omega_2 + J_{21} \omega_1^* \\ -J_{12} \omega_3 + J_{32} \omega_3^* & r_2^2/d_4^2 J_2 & J_{32} \omega_1 - J_{12} \omega_1^* \\ J_{13} \omega_2 - J_{23} \omega_2^* & -J_{23} \omega_1 + J_{13} \omega_1^* & r_3^2/d_{22}^2 J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1^2/d_{11}^2 J_1 & J_{21} \omega_2 - J_{31} \omega_3 & -J_{31} \omega_2 + J_{21} \omega_1^* \\ J_{12} \omega_3 + J_{32} \omega_3^* & r_2^2/d_4^2 J_2 & J_{32} \omega_1 - J_{12} \omega_1^* \\ J_{13} \omega_2 - J_{23} \omega_2^* & -J_{23} \omega_1 + J_{13} \omega_1^* & r_3^2/d_{22}^2 J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Запишемо рівняння замкнутої системи з оптимальним управлінням:

$$\dot{\omega} = A(\omega, \omega_s) \omega - J_n u_{\text{опт}} (\omega - \omega_s), \quad (48)$$

або відповідно в кінцевому варіанті:

$$\begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_1^2/d_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_2^2/d_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3^2/d_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1^2/d_{11}^2 & -J_{31} \omega_3^* & J_{21} \omega_2^* \\ J_{32} \omega_3^* & r_2^2/d_4^2 & -J_{12} \omega_1^* \\ -J_{23} \omega_2^* & J_{13} \omega_1^* & r_3^2/d_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1^* \\ \omega_2^* \\ \omega_3^* \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Математичне моделювання руху супутника

Побудуємо математичну модель кутового руху супутника методом Рунге-Кутта в середовищі Matlab зі стабілізуючим та оптимальним управлінням за початкових умов $\omega(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$,

$t \in [0;10]$ для $\omega_1(t)$, $t \in [0;3]$ для $\omega_2(t)$, $t \in [0;1]$ для $\omega_3(t)$ і наступних значеннях коефіцієнтів:

$J_1 = 30$, $J_2 = 35$, $J_3 = 40$; $d_{11} = 0,5$,
 $d_4 = 0,7$, $d_{22} = 0,9$; $q_{11} = 5$, $q_2 = 7$, $q_{22} = 9$ і при оптимальному управлінні $r_1 = 1,5$, $r_2 = 3,7$, $r_3 = 7,8$. Будемо мати рис.3.а, 3.б, та 3.в відповідно для кутових швидкостей $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$.

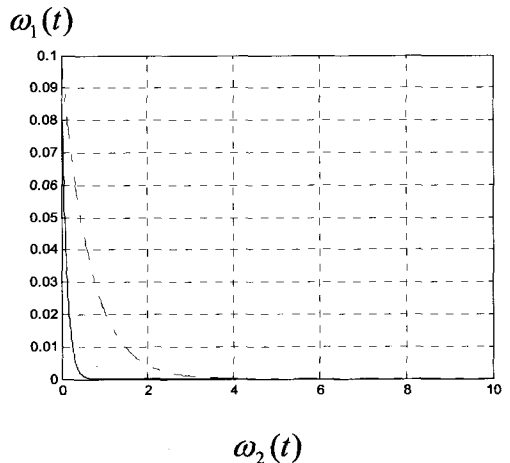


Рис. 3.а. Відхилення кугової швидкості супутника $\omega_2(t)$ від заданої $\omega_2^*(t)$ при початкових умовах $\omega_2(0) = [0,1; 0,1; 0,1]$, $t \in [0;3]$.

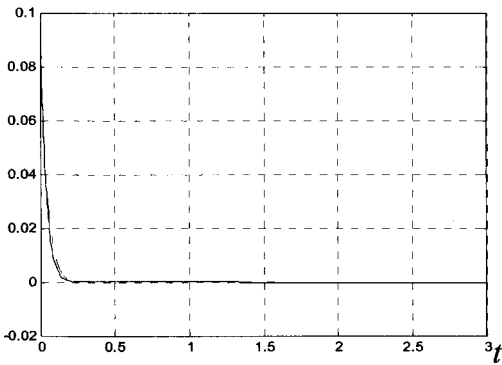


Рис. 3.б. Відхилення кутової швидкості супутника $\omega_2(t)$ від заданої $\omega_2^*(t)$ при початкових умовах $\omega_2(0) = [0, 1; 0, 1; 0, 1]$, $t \in [0; 3]$.

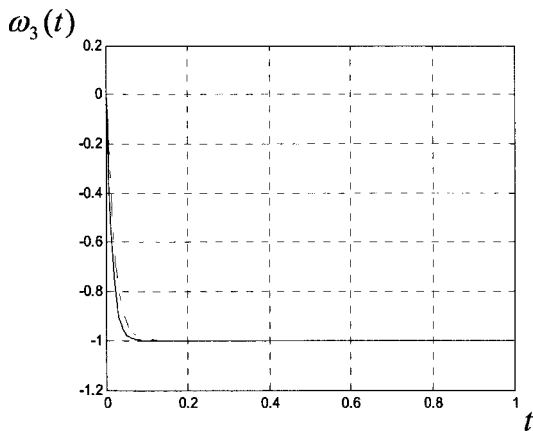


Рис.3.в. Відхилення кутової швидкості супутника $\omega_3(t)$ від заданої $\omega_3^*(t)$ при початкових умовах $\omega_3(0) = [0, 1; 0, 1; 0, 1]$, $t \in [0; 1]$.

На всіх трьох рисунках оптимальний стабілізований рух КА позначено суцільною лінією, а його неоптимальний стабілізований рух – штрих-пунктиром.

З рисунків бачимо, що отримане оптимальне управління забезпечує стійкість системи значно раніше (відхилення кутової швидкості ω_1 досягає нульового значення вже на 1-ій секунді (рис.3.а), ω_2 – на 0,3 секунді (рис.3.б), відхилення ω_3 досягає значення $\omega_3 = -\sqrt{\mu/R^3} = -1$ на 0,15 секунді (рис.3.в)) ніж неоптимальне стабілізуюче управління (відхилення кутової швидкості ω_1 досягає нульового значення на 4-ій секунді (рис.3.а), ω_2 – на 0,4 секунді (рис.3.б), відхилення ω_3 досягає значення $\omega_3 = -1$ на 0,2 секунді (рис.3.в)).

Висновки

1. Розв'язана задача стабілізації руху супутника і його орієнтації як динамічного об'єкта підтверджує доцільність реалізації методів прямого жорсткого синтезу для стабілізації нелінійних систем.

2. Розроблена процедура оптимізації стабілізуючого управління космічним апаратом та застосування запропонованого управління (47) сприяє підвищенню точності стабілізації і мінімізує квадратичний критерій якості О.А. Красовського.

3. Проведене математичне моделювання руху супутника показує, що отримане оптимальне управління підвищує якість стабілізації КА в середньому на 50-60 %, що покращує швидкодію системи та дозволяє зменшити витрати енергетичних ресурсів.

Список літератури

1. Dodds S.J., Walleer A.B. Sliding-mode control for the tree-axis attitude control of rigid-body spacecraft with unknown dynamics parameters // International Journal of Control. – 1991, 54. – Р. 737–761.
2. Лебедєв Д.В., Ткаченко О.І. Навігація і керування орієнтацією малих космічних апаратів. – К.: Наукова думка, 2006. – 300 с.
3. Баренц В.Н. Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с.
4. Онищенко С.М. Применение гиперкомплексных чисел в теории инерциальной навигации. Автономные системы. – К.: Наукова думка, 1983. – 208 с.
5. Абалакин В.К., Аксенов Е.П. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. – М.: Наука, 1976. – 864 с.
6. Малоед М.М. Адитивна оптимальна стабілізація нелінійних систем методами жорсткого синтезу // Автоматика-2008: доповіді XV міжнародної конференції з автоматичного управління, 23-26 вересня 2008 р. – Одеса: ОНМА. – С. 858-861.
7. Малоед М.М., Онищенко С.М. Стабілізація нелінійних систем оптимальними методами прямого жорсткого синтезу

зу // Проблеми динаміки та стійкості багатомірних систем / Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т.6, №3. С. 169-177.

8. Волосов В.В., Куценко И.А., Попадинец В.И. Математические модели вращательного движения космических аппаратов с избыточными системами гиродринов и маховиков и задачи управления их ориентацией. Часть 2 // Проблемы управления и информатики. – 2003. – № 3. С. 109-116.

9. Онищенко С.М., Коваленко Н.П., Сусол М.Н. Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к не-

линейным объектам // Проблеми інформатизації та управління. К. НАУ, 2005. – Вип. 2(13). – С. 73-77.

10. Волосов В.В., Хлебников М.В., Шевченко В.Н. Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения // Проблемы управления и информатики. – 2011. – №2. – С. 114-121.

11. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. – М.: Наука. – 1973. – 560 с.