УДК 621.396.96(045)

Васильєв В.М., д.т.н.,
Науменко К.В.

ОЦІНКА ТОЧНОСТІ ОПТИМАЛЬНОГО ОБРОБЛЕННЯ ТРАЄКТОРНИХ ВИМІРЮВАНЬ БАГАТОПОЗИЦІЙНИХ ДАЛЕКОМІРНИХ СИСТЕМ

Національний авіаційний університет

Використовуючи методи оптимальної нелінійної фільтрації синтезовано алгоритм оптимального оброблення даних вимірювань багатопозиційних далекомірних радіонавігаційних систем спостереження. Розглянуто задачу оцінки точності оптимального оброблення. Наводяться результати комп'ютерного моделювання

Вступ

Для забезпечення навігації і керування повітряним рухом наряду с однопозиційними системами спостереження використовуються багатопозиційні радіонавігаційні системи спостереження, що представляють сукупність рознесених пунктів випромінювання, прийому й обробки радіосигналів, функціонально зв'язаних між собою для визначення (оцінки) параметрів траєкторії польоту.

Багатопозиційні радіонавігаційні системи спостереження можуть бути з одноетапною й двоетапною обробкою даних. При одноетапній обробці оцінка параметрів траєкторії виконується в один етап безпосередньо з первинних спостережуваних сигналів. При двоетапній обробці спочатку провадиться оцінка параметрів радіосигналів у пристрої первинної обробки, а потім у пристрої вторинної обробки провадиться остаточна оцінка параметрів траєкторії.

Необхідність застосування оптимальних статистичних методів оцінки траєкторних параметрів обумовлена наявністю досить високого рівня завад у радіонавігаційних системах.

Різні математичні методи вирішення задачі обробки даних у багатопозиційних радіонавігаційних системах спостереження викладені в роботах [1-4] та ін.

Специфічною особливістю задачі оцінки параметрів траєкторій польоту літаків при навігації й керуванні повітряним рухом є те, що математична постановка задачі в загальному випадку записується в нелінійному вигляді й відповідно потрібує застосування нелінійних методів оцінки, що ускладнює розв'язання задачі і зніжує точність оцінки.

Методи марковської теорії оптимального нелінійного оцінювання [1] є найбільш загальними й прийнятними для вирішення поставленого завдання при використанні радіонавігаційних систем спостереження.

У реальних системах обробки траєкторної інформації прагнуть використати добре розроблені лінійні методи оптимальної оцінки, такі як лінійну фільтрацію Калмана.

У оботі синтезується алгоритм оптимальної одноетапної оцінки параметрів траєкторії руху літаків за даними вимірювань двопозиційної далекомірної системи спостереження й провадиться оцінка точності алгоритму.

Завдання зводиться до статистичного синтезу оптимального алгоритму оцінки параметрів траєкторії руху літаків у рамках теорії лінійної фільтрації.

Досліджується проблема коректного завдання початкових умов для рівняння Ріккаті, що описує розвиток матриці коваріацій.

Методом комп'ютерного моделювання досліджується синтезований алгоритм і дається оцінка точності у порівнянні з погрішністю обчислення параметрів траєкторії у випадку відсутності оптимальної обробки даних далекомірних систем.

Постановка завдання

Розглянемо двопозиційну систему спостереження, що складається із двох далекомірних радіонавігаційних станцій, які відстоять друг від друга на відстані d (рис. 1).

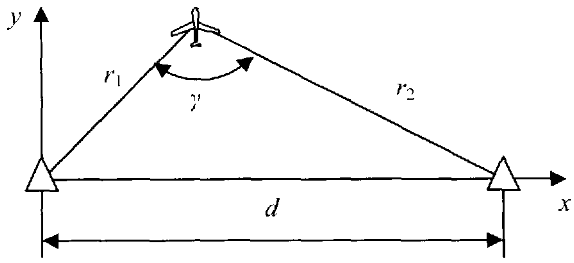

Рис. 1. Схема взаємного положення літака і далекомірних систем

Синтезуємо оптимальний алгоритм оцінки параметрів траєкторії руху літаків за даними вимірювань двопозиційної далекомірної системи спостереження й оцінимо точність алгоритму.

Основу будь-якого методу оцінки складають математичні моделі, що описують оцінюваний процес, процес спостереження (вимірювання) і зв'язок між вимірюваними й оцінюваними параметрами.

Характерною особливістю задачі обробки даних у навігаційних системах і системах керування повітряним рухом є те, що математичний зв'язок між оцінюваними й вимірюваними параметрами, як правило, нелінійний. Тому в загальному випадку синтез оптимальних алгоритмів оцінки параметрів траєкторії руху літаків виконується в рамках теорії оптимальної нелінійної фільтрації.

Математична модель процесу польоту

Обробка траєкторної інформації в системах керування повітряним рухом, як правило, виконується в прямокутній системі координат x,y.

На більшій частині маршруту літаки летять по прямій лінії з постійною швидкістю. Рекурентна модель прямолінійного й рівномірного руху літака записується у вигляді:

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + V_x T; \quad y(t_i) = y(t_{i-1}) + V_y T, \tag{1}$$

де V_x, V_y – складові швидкості по відповідних координатах; $T = t_i - t_{i-1}$ – крок дискретизації, якій дорівнюється інтервалу часу між моментами траєкторних вимірів.

Запишемо математичну модель у просторі станів. Приймемо вектор станів:

$$\vec{X} = [x, y, V_x, V_y]^T. \tag{2}$$

Математичний опис прийнятої моделі траєкторії руху літака (1) описується рівнянням станів:

$$\vec{X}(t_i) = \Phi \vec{X}(t_{i-1}), \tag{3}$$

де Φ – перехідна матриця, що за даних умов має вигляд:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Математична модель вимірів

Для двох далекомірних систем вектор вимірюваних параметрів включає виміри, що надходять від кожної станції:

$$\vec{Z} = [r_1, r_2]^T. \tag{5}$$

Приймемо, що погрішності вимірювання дальності є адитивними випадковими величинами ν_{r1}, ν_{r2} типу «білий шум» з інтенсивностями, що дорівнюють σ_1^2 і σ_2^2 відповідно для першого і другого далекоміра.

Запишемо рівняння, що встановлюють зв'язок між вимірюваними $\vec{Z}$ (5) й оцінюваними $\vec{X}$ (2) параметрами:

$$r_1 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2} + \nu_{r1}; \quad r_2 = \sqrt{(d-x)^2 + y^2} + \nu_{r2}. \tag{6}$$

Позначимо:

$$r_1 = h_1(x, y) + \nu_{r1};$$
$$r_2 = h_2(x, y) + \nu_{r2}. \qquad (7)$$

Математична модель вимірювань являє собою нелінійну функцію від компонентів вектора станів:

$$\vec{Z}(t_i) = h(\vec{X}(t_i)) + \vec{U}(t_i), \qquad (8)$$

де $\vec{U} = [\nu_{r1}, \nu_{r2}]^T$ – нормально розподілений випадковий вектор похибок вимірювань далекомірів типу дискретний «білий шум».

Для моделі вимірника (8) матриця квадратів середньоквадратичних похибок вимірювань має вигляд:

$$R = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Нульові значення недіагональних елементів матриці R свідчать про те, що вимірювання далекомірів є некорельовані, тобто незалежні.

Виконаємо лінеаризацію рівняння вимірювань (6), (7) шляхом розкладання в ряд Тейлора щодо оцінок складових вектора станів $\hat{\vec{X}}$.

Лінеаризована матриця спостереження приймає вигляд:

$$H = \frac{\partial h}{\partial \vec{X}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x} & \dfrac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & 0 \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x} & \dfrac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

де

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = -\frac{(d - x)}{\sqrt{(d - x)^2 + y^2}};$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{(d - x)^2 + y^2}}.$$

У результаті отримуємо лінеаризовану математичну модель вимірів:

$$\vec{Z} = H\Delta\vec{X} + \vec{U}, \qquad (11)$$

де $\Delta\vec{X} = \vec{X} - \hat{\vec{X}}$.

Оптимальна обробка траєкторної інформації і оцінка точності

Отримані вирази для математичної моделі (3), (4), що описує рух літака, а також моделі вимірів (10), (11) представлені у вигляді, що задовольняє рекурентному лінійному нестаціонарному фільтру Калмана, який широко застосовується в навігаційних системах і системах керування повітряним рухом. Основні рівняння фільтра стосовно до даної постановки завдання й прийнятих умов у дискретному вигляді записуються й виконуються послідовно в такий спосіб [5]:

– прогноз на крок дискретизації:

$$\vec{X}_e = \Phi\hat{\vec{X}}_{i-1}; \qquad (12)$$

$$P_e = \Phi P_{i-1}\Phi^T; \qquad (13)$$

– оцінка (корекція прогнозу):

$$K = P_e H^T (H P_e H^T + R)^{-1}; \qquad (14)$$

$$\hat{\vec{X}}_i = \vec{X}_e + K(\vec{Z}_i - H\vec{X}_e); \qquad (15)$$

$$P_i = P_e - KHP_e, \qquad (16)$$

де P – матриця дисперсій похибки оцінки (матриця коваріацій); K – матриця коефіцієнтів корекції фільтра; i – поточний момент часу; e – індекс, що означає екстраполильоване значення.

За умови лінеарізації для розв'язання рівнянь фильтра треба на кожному кроку дискрстизації обчислювати матрицю спостереження H (10), тому що її елементи залежать від положення літака, тобто матриця нестаціонарна.

Для реалізації оптимальної обробки даних із застосуванням фільтра Калмана необхідно задати початкові дані для матриці коваріацій $P(0)$ і вектора станів $\hat{\vec{X}}(0)$.

Особливістю фільтра Калмана є те, що у рівняннях для матриці коваріацій P відсутні виміри і для розв'язання рівнянь не треба виконувати безпосередньо саму процедуру фільтрації. Тому точність, з якої може бути виконана оцінка траєкторних параметрів із застосуванням фільтра Калмана, визначається рішенням рівнянь (13), (14), (16), що описують розвиток дисперсії похибки оцінки.

Комп'ютерне моделювання і оцінка точності оптимального оброблення траєкторних вимірювань

Оцінка точності алгоритму оптимального оброблення даних далекомірних систем виконується за розв'язанням рівнянь, що описують розвиток матриці коваріацій (13), (14), (16).

Для визначення початкових значень матриці коваріацій $P(0)$ фільтра Калмана необхідно знайти статистичні характеристики погрішностей вимірів далекомірів у прямокутній системі координат x, y.

Запишемо виміри, обчислені у прямокутну систему координат, як:

$$\begin{aligned} x^*(i) &\cong x(i) + v_x(i); \\ y^*(i) &\cong y(i) + v_y(i), \end{aligned} \tag{17}$$

де v_x, v_y – випадкові похибки визначення відповідних прямокутних координат.

Для знаходження похибок вимірювання прямокутних координат v_x, v_y скористаємося методом лінеаризації.

Встановимо зв'язок прямокутних координат з виміряними значеннями дальностей.

Для координати x:

$$x = f_1(r_1, r_2) = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}. \tag{18}$$

Для координати y:

$$\begin{aligned} y &= f_2(r_1, r_2) = \\ &= \frac{1}{2d}\left(2r_1^2 d^2 - r_1^4 + 2r_1^2 r_2^2 - \right. \\ &\left. - r_2^4 + 2r_2^2 d^2 - d^4\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2d}\sqrt{A}. \end{aligned} \tag{19}$$

У результаті лінеаризації виразу (18) одержимо для погрішності визначення координати x:

$$v_x = \Delta x = \frac{\partial f_1}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial f_1}{\partial r_2}\Delta r_2, \tag{20}$$

де $\Delta r_1 = v_{r1}$; $\Delta r_2 = v_{r2}$ – погрішності вимірювань відповідних далекомірів:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r_1} = \frac{r_1}{d}; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial r_2} = -\frac{r_2}{d}.$$

Аналогічно для погрішності визначення координати y після лінеаризації виразу (19) одержимо:

$$v_y = \Delta y = \frac{\partial f_2}{\partial r_1}\Delta r_1 + \frac{\partial f_2}{\partial r_2}\Delta r_2, \tag{21}$$

де:

$$\frac{\partial f_2}{\partial r_1} = \frac{1}{d\sqrt{A}}\left(d^2 r_1 - r_1^3 + r_1 r_2^2\right);$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial r_2} = \frac{1}{d\sqrt{A}}\left(d^2 r_2 - r_2^3 + r_1^2 r_2\right).$$

Тепер, використовуючи вирази (20), (21), визначимо дисперсії погрішностей обчислення прямокутних координат за результатами вимірювань далекомірів:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= M\{v_x^2\} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_1}\right)^2 \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial r_2}\right)^2 \sigma_{r2}^2 = \\ &= \frac{1}{d^2}\left(r_1^2 \sigma_{r1}^2 + r_2^2 \sigma_{r2}^2\right); \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^2 &= M\{v_y^2\} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial r_1}\right)^2 \sigma_{r1}^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial r_2}\right)^2 \sigma_{r2}^2 = \\ &= \frac{1}{d^2 A}\left[\left(d^2 r_1 - r_1^3 + r_1 r_2^2\right)^2 \sigma_{r1}^2 + \right. \\ &\left. + \left(d^2 r_2 - r_2^3 + r_1^2 r_2\right)^2 \sigma_{r2}^2\right]. \end{aligned} \tag{23}$$

Знайдемо взаємну кореляцію похибок обчислених прямокутних координат v_x і v_y:

$$\begin{aligned} \sigma_{xy}^2 &= M\{v_x v_y\} = \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial r_1}\frac{\partial f_2}{\partial r_1}\sigma_{r1}^2 + \frac{\partial f_1}{\partial r_2}\frac{\partial f_2}{\partial r_2}\sigma_{r2}^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Отримані вирази (22), (23), (24) використовувалися для завдання початкових значень матриці коваріацій $P(0)$ при моделюванні, а саме:

$$p_{11}(0) = \sigma_x^2;\ p_{22}(0) = \sigma_y^2;$$

$$p_{12}(0) = p_{21}(0) = \sigma_{xy}^2.$$

На рис. 2 наведено результат комп'ютерного моделювання та оцінки точності оптимальної обробки даних двох далекомірних систем. Приймалися наступні вихідні дані: відстань між далекомірами – $d = 50$ км; похибки виміру дальності – $\sigma_{r1} = \sigma_{r2} = 100$ м.

Моделювання проводилося з використанням програмного пакета *MatLab*.

Криві на рис. 2 показують зміну середньоквадратичного значення радіальної похибки визначення місцеположення літака у залежності від віддалення (координата y) літака від бази.

Крива 1 – результат розв'язку рівнянь (13), (14), (16).

Крива 2 – зміна радіальної похибки обчислення положення літака за даними вимірів двох далекомірних систем без оптимальної обробки, отримана з використанням виразу $\sigma_r = \sqrt{2}\,\sigma_s \operatorname{cosec}\gamma$ [2].

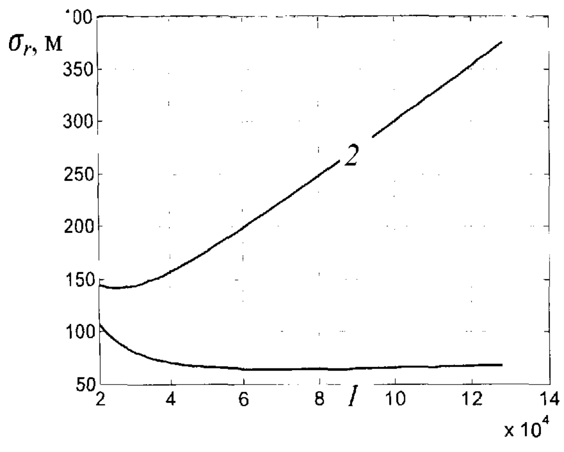

Рис. 2. Середньоквадратичні похибки визначення місцеположення літака

Висновки

Синтезовано алгоритм одноетапної оптимальної оцінки параметрів траєкторії руху літаків за результатами вимірювань двопозиційної далекомірної системи спостереження.

При нелінійній математичній постановці завдання отримане рішення в лінеаризованому вигляді, що дозволяє використати лінійний рекурентний фільтр Калмана, якій забезпечує оцінку параметрів траєкторії в прямокутній системі координат.

Особлива увагу приділено завданню початкових значень для матриці коваріацій, що включає дисперсії похибок оцінки координат і складових швидкостей.

Отримані результати комп'ютерного моделювання показують, що точність визначення параметрів траєкторії руху літака при використанні інформації багатопозиційних далекомірних систем спостереження може бути істотно підвищена при застосуванні синтезованого алгоритму оптимальної обробки.

Список літератури

1. Ярлыков М.С. Статистическая теория радионавигации. – М.: Радио и связь, 1985. – 344 с.

2. Кондратьев В.С., Котов А.Ф., Марков Л.Н. Многопозиционные радиотехнические системы. – М.: Радио и связь, 1986. – 264 с.

3. Черняк В.С. Многопозиционная радиолокация. – М.: Радио и связь, 1993. – 416 с.

4. Детков А.Н. Квазиоптимальная цифровая фильтрация траекторных сообщений в дальномерной многопозиционной радиосистеме // Радиотехника. – 1996.– № 11. – С. 23-26.

5. Балакришнан А.В. Теория фильтрации Калмана. – М.: Мир, 1988. – 200 с.