УДК 519.612 (045)

Глазок О.М., к.т.н.

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ СИНТЕЗУ ЗАКОНУ КЕРУВАННЯ ЛІТАКОМ З ВИКОРИСТАННЯМ НЕПРЯМОКУТНИХ ТА НЕРЕГУЛЯРНИХ СІТОК

Національний авіаційний університет

Розглянуто можливість застосування методу розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь до задач синтезу регуляторів для керування літальним апаратом з використанням сітки не прямокутної конфігурації. На прикладі модельної гідродинамічної задачі порівнюються швидкості збіжності процесу розв'язку за різних умов організації розрахунків.

Наукова задача дослідження

Задачі точного керування літаком з урахуванням нестаціонарності його аеродинамічних характеристик вимагають включення у процес синтезу регулятора етапу моделювання аеродинамічних процесів, що відбуваються в окрузі його несучих поверхонь, органів керування та фюзеляжу. Задача моделювання цих процесів зводиться до чисельного розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) великої розмірності. При цьому важливим елементом в постановці задачі є вибір обчислювальної сітки, від якого залежить і вигляд систем рівнянь, вигляд матриць, векторів, тензорів, що входять до їх складу, а також властивості алгоритмів чисельного розв'язання відповідних задач. При цьому часто виникає потреба у застосуванні сіток складної геометричної організації з непрямокутними елементами, оскільки предметна область задачі включає в себе об'єкти складної форми. Це ж справедливо і для багатьох інших задач гідро- та аеродинаміки, де розглядаються суттєво криволінійні тіла; такі, що мають вістря, отвори, пористі частини та інші особливості). Форму обчислювальних сіток доцільно адаптувати до форм досліджуваних об'єктів, і при цьому варіювати розмір елементів сітки відповідно до характерного масштабу досліджуваних явищ, що має місце в різних ділянках оточення об'єкта. Навіть при розгляді задач обтікання прямокутних чи круглих геометричнх тіл рівномірні прямокутні та округлі сітки є неоптимальними, оскільки в різних ділянках оточення тіла величини градієнтів параметрів потоку можуть значно відрізнятися.

Внаслідок цього є актуальними дослідження, спрямовані на організацію ефективного розв'язання задач з непрямокутними та нерегулярними сітками.

Аналіз публікацій. Сучасний стан проблеми

При спробах використання непрямокутних сіток та сіток, геометрія яких не відповідає формі об'єктів, було відзначено такі проблеми [1-4]:

1) у випадку невідповідності між сіткою та границею кроки-«сходинки» на моделі границі приводять до зростання помилок в рішеннях, особливо коли сітка має великий крок. Для криволінійних границь уникнути такої невідповідності неможливо через фундаментальне протиріччя між неперервністю кривих, що утворюють границю, та дискретністю сітки;

2) складність реалізації алгоритмів розрахунку. Кількість вузлів (точок) сітки у одному рядку не постійна, і це вимагає або застосування непрямої адресації, або введення додаткового масиву, який обмежує діапазон індексів в кожному рядку. При цьому код програми, імовірно, доведеться змінювати для кожної нової задачі;

3) особливої уваги вимагає урахування граничних умов.

Автором запропоновано ітераційний метод отримання розв'язку великої розмірності на основі застосування другого методу Ляпунова [5], який може бути застосований для розв'язання таких задач.

Ціль статті

Метою статті є модифікація запропонованого методу розв'язання СЛАР великої розмірності з метою його застосування до розв'язання задачі з криволінійною сіткою, що дозволить краще врахувати особливості геометричних форм поверхонь літальних апаратів.

Основний матеріал дослідження. Математичний апарат

Для чисельного розв'язання гідродинамічної задачі її необхідно звести до системи n лінійних алгебраїчних рівнянь

$$AX = B, \tag{1}$$

де A – задана квадратна матриця $n\times n$ з дійсними постійними елементами, B – заданий постійний вектор з дійсними елементами розмірності n, X – вектор з дійсними компонентами (вектор розв'язків) розмірності n. До такої системи може бути застосовано метод розв'язання [5].

Будемо розглядати розповсюджену гідродинамічну апроксимацію, в якій потік рідини, що не стискається, описується системою рівнянь у частинних похідних не вище другого порядку [6]. Для чисельного розв'язання задачі необхідно перейти від диференційних до різницевих рівнянь.

У випадку прямокутної сітки, зорієнтованої за осями декартової системи координат задачі, такий перехід виконується досить просто з використанням для наближення похідних послідовних, лінійно розташованих вузлів сітки, наприклад:

$$\Delta_{1x}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0 + h_x, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_x}\ ; \tag{2}$$

$$\Delta_{1y}(x_0, y_0) = \frac{f(x_0, y_0 + h_y) - f(x_0, y_0)}{h_y}\ ; \tag{3}$$

$$\Delta_{2xx}(x_0, y_0) = \frac{\Delta_{1y}(x_0 + h_x, y_0) - \Delta_{1y}(x_0, y_0)}{h_x} =$$

$$= \frac{f(x_0 + 2h_x, y_0) - 2f(x_0 + h_x, y_0) + f(x_0, y_0)}{h_x^2}\ ; \tag{4}$$

і так далі, де x_0, y_0 – координати точки – вузла сітки, в якій знаходимо різниці функції f, дискретно визначеної у вузлах; Δ_{1x}, Δ_{1y}, Δ_{2xx} – позначення перших та других різниць, h_x та h_y – кроки прямокутної сітки по координатах x та y відповідно. Формули наведено для правосторонніх різниць на прямокутній сітці. На практиці частіше використовують більш компактні формули середніх різниць:

$$\Delta_{2xx}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{f(x_0 + h_x, y_0) - 2f(x_0, y_0) + f(x_0 - h_x, y_0)}{h_x^2}\ , \tag{5}$$

і т.д. Відповідно, для запису перших та других похідних функції у вузлі сітки по двох координатах достатньо використати значення функції у п'яти точках: (x_0, y_0), $(x_0{+}h_x, y_0)$, $(x_0{-}h_x, y_0)$, $(x_0, y_0{+}h_y)$, $(x_0, y_0{-}h_y)$.

У випадку криволінійної сітки має місце невідповідність між декартовими координатами та направляючими векторами сітки, тому похідні функцій за декартовими координатами не можуть бути обчислені за формулами на зразок (2)–(5) з використанням лише однієї або двох сусідніх точок. Розглянемо n точок непрямокутної сітки, сусідніх із даною точкою (рис.1).

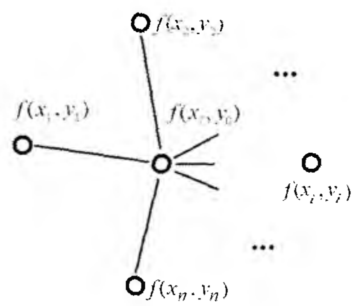

Рис. 1. Початкові дані для обчислення перших та других різниць на не прямокутній сітці.

В околі точки (x_0, y_0) запишемо розклад функції в степеневий ряд:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0, y_0}(x - x_0) +$$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}(y - y_0) + \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0, y_0}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x_0, y_0}(y - y_0)^2 +$$

$$+2\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\bigg|_{x_0,y_0}(x-x_0)(y-y_0)+$$

$$+\varepsilon\big(x_0, y_0, (x-x_0), (y-y_0)\big). \qquad (6)$$

Останній доданок суми (6) містить усі члени розкладу ступенів, вищих від другого. Записавши розклад (6) для точок (x_1, y_1), (x_2, y_2), … , (x_n, y_n), отримуємо систему рівнянь щодо перших та других похідних функції f, значення яких можна знайти наближено, якщо $n \geq 5$ (При $n > 5$ отримуємо перевизначену систему).

Альтернативною можливістю є введення в точках сітки їх власних систем координат, прив'язаних до напрямків на оточуючі вузли, та обчислення похідних у цих координатах.

Чисельний експеримент

З метою оцінки продуктивності розрахунків було розглянуто наступну модельну задачу: потік рідини, що не стискається, протікає через канал, одна з стінок якого має криволінійний виступ (рис.2), форму якого утворено функцією вигляду

$$y(x) = \exp(-(x-x_a)^2 / r^2 ,$$

де x_a – координата центра виступу; r - характерний розмір кривої.

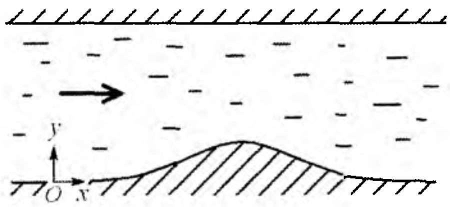

Рис. 2. Конфігурація каналу протікання рідини для модельної задачі.

Для розрахунків було обрано три сітки, принцип побудови яких схематично подано на рис. 3:

1) прямокутну сітку з вузлами у всій прямокутній області задачі (рис. 3, *а*). Деякі вузли сітки опинилися поза областю протікання рідини. В структурі матриці A це відображається як наявність нульових рядків та стовпців, які необхідно з неї видалити перед тим, як перейти до чисельного розв'язання системи. Отримана матриця залишиться п'яти-діагональною;

2) прямокутну сітку, з якої видалено вузли, що потрапили в область границь каналу (рис. 3, *б*). Для такої сітки утвориться матриця A системи (1), яка не матиме нульових рядків і стовпців, однак п'яти діагональна структура матриці буде порушена через нерегулярність нумерації вузлів у рядах сітки. Через це алгоритм [5] доведеться застосовувати до повнорозмірної матриці, а не до спрощеної;

3) викривлену сітку, з якої видалено вузли, що потрапили в область границь каналу (рис. 3, *в*). Ця сітка має дві переваги: по-перше, її структура відповідає структурі границь і на ній простіше задавати граничні умови; по-друге, регулярність нумерації вузлів у ній зберігається, тому матриця системи залишається п'ятидіагональною. Недоліком же є те, що для використання цієї сітки потрібно додатково знаходити похідні, користуючись розкладом (6), як сказано вище. Тобто, необхідні додаткові матриці, в яких будуть зберігатися коефіцієнти систем рівнянь, за якими обчислюється п'ять похідних, і, як наслідок, обсяг даних, що

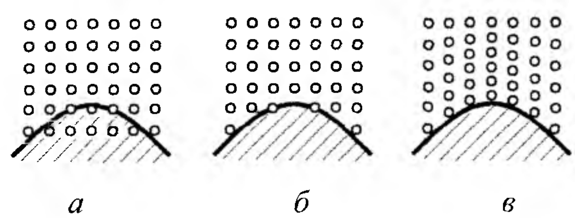

Рис. 3. Варіанти розміщення вузлів сітки, використані в чисельному експерименті. *а* – проста прямокутна сітка; *б* – прямокутна сітка з видаленими вузлами; *в* – викривлена сітка.

зберігаються, зросте у 5 разів, порівняно з обсягом даних матриці А для скороченого алгоритму на повній прямокутній сітці. Обсяг обчислень також зросте на 30-40%, оскільки необхідно на кожному кроці ітерації додатково обчислювати похідні для кожного вузла сітки.

В табл.1 наведено результати одного з чисельних експериментів, метою яких було порівняння результатів застосування трьох запропонованих сіток. Було випробувано також застосування функцій бібліотек *GMP* в процесі розрахунків.

Таблиця 1. Порівняння швидкостей збіжності обчислень за величинами ($|AX_{100}-B|/|AX_0-B|$)

Кількість точок	Умови експерименту				
	Рис. 3, *а*	Рис. 3, *а* +GMP	Рис. 3, *б*	Рис. 3, *в*	Рис. 3, *в* +GMP
800	0.760	0.754	0.744	0.723	0.717
1500	0.847	0.848	0.823	0.834	0.833
2000	0.892	0.880	0.909	0.894	0.881

Висновки. Перспективні напрямки подальших досліджень

Розглянуто модифікацію методу розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь з метою його застосування до задач керування літаком з урахуванням нестаціонарності аеродинамічних процесів та з непрямокутною конфігурацією обчислювальної сітки. Запропонована модифікація дозволяє узгодити побудову математичної моделі з геометричними особливостями предметної області задач керування літальними апаратами. На прикладі модельної гідродинамічної задачі виконано порівняння ефективності обчислень за різних умов організації геометрії сітки. З отриманих даних можна зробити висновок, що ефективність розрахунків може бути підвищена за рахунок використання сіток, структура яких узгоджена з геометричними формами об'єктів предметної області. Також вдалося отримати деяке підвищення ефективності при використанні бібліотечних функцій *GNU GMP*.

Напрямки, за якими доцільні подальші дослідження: вивчити можливість застосувати інші математичні підходи до переходу від криволінійних сіток до систем різницевих рівнянь; застосувати для знаходження похідних за значеннями у вузлах сітки функції ядра (формові функції), розробити алгоритм автоматичного формування сітки з урахуванням умови задачі та вимог ефективного застосування обчислювального методу; детально дослідити зміни обсягів обчислень, до яких приводить зміна геометрії розрахункової сітки; дослідити можливості більш ефективного використання бібліотечних функцій.

Список літератури

1. Четверушкин Б. Н., Шильников Е. В. Вычислительный и программный инструментарий для моделирования трехмерных течений вязкого газа на многопроцессорных системах // Ж. вычисл. математики и матем. физики. – 2008. – № 48. – Т. 2. – С. 309 – 320.

2. Титарев В.А. Численный метод расчета двухмерных нестационарных течений раз-реженного газа в областях произвольной формы // Ж. вычисл. математики. и матем. физики. – 2009. – Т. 49. - № 7. – С. 1 – 16.

3. Тонков Л.Е. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости методом функции уровня // Вестник Удмуртского ун-та. – 2010. – Вып. 3. – С. 134 – 140.

4. Ferziger J.H., Peric M. Computational Methods for Fluid Dynamics. – Springer, 2002. – 423 p.

5. Глазок О.М. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для синтезу закону керування літальним апаратом з урахуванням нестаціонарності аеродинамічних характеристик // Проблеми інформатизації та управління. – 2009. – №4 (28). – С. 36 – 39.

6. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 520 с.