

УДК 532.529(045)

Буйвол В.М., д-р фіз.-мат. наук  
Фоміна Н.Б.**ТЕХНОЛОГІЇ MAPLE В ЗАДАЧАХ МЕХАНІКИ****Національний авіаційний університет**

*Розглянуті можливості і ефективність застосування технологій пакету прикладної математики Maple в дослідженнях задач механіки рідин. На прикладі кавітаційної течії, яка виникає за тілом еліптичної форми, показано, що застосування методів Maple приводить до швидкого і ефективного рішення задачі.*

**Вступ**

Складові пакету прикладної математики Maple створені таким чином, що охоплюють досить різні напрямки застосування математики у широкому спектрі прикладних задач від функціонального аналізу до задач лінійного програмування і економіки. І хоча в цій статті ми розглянемо лише застосування методів Maple до задачі про визначення форми кавітаційної каверни, яка виникає за кавітатором еліптичної форми, проте окремі аспекти роботи показують можливість інших застосувань технологій Maple.

Переважна більшість робіт з гідродинаміки кавітаційних течій присвячена в основному плоским течіям [1-3]. Просторовими кавітаційними течіями займалися значно менше і причиною цього є, мабуть, значна складність проблеми навіть у рамках теорії ідеальної рідини. В царині просторових кавітаційних течій найважливіше місце посідали чисельні методи. Коли в 1975-1976 роках стали з'являтися праці Л.Г.Гузевського [4,5], у яких чисельними методами досліджувалися осесиметричні течії при обтікання кругового диска, а потім і інших тіл, то це був без сумніву значний прорив в цій галузі знань. Проте складність задачі і недосконалість наявних обчислювальних засобів тоді стримували подальший розвиток подібних досліджень. Те ж саме стосується і задачі про форму просторової каверни.

На сьогодні досить розповсюджені нові інформаційні технології, які дозволяють реалізовувати подібні математичні моделі. В роботі [8] на основі рівнянь математичної моделі течії [3] дослідження форми просторових порожнин в рідині

при їх стиску виконане за допомогою пакету прикладної математики MATLAB.

**Постановка задачі**

Дослідження поведінки форми кавітаційної каверни, що виникає за рухомим тілом, перетин зриву струменів якого є еліпсом, використовуючи пакет Maple [9], буде представлено в цій роботі.

Будемо розглядати абсолютну систему нерухомих прямокутних декартових координат  $Oxyz$ . Вісь  $Oy$  має напрям, протилежний до напрямку сили тяжіння, а вісь  $Ox$  – протилежна до напрямку руху тіла. Площину  $yOz$  назовемо площиною спостереження, в яку в момент часу  $t = 0$  входить перетин зриву струменів у формі еліпса. В цій площині введемо також полярну систему координат  $y = r \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$ , полярний кут  $\vartheta$  якої будемо відраховувати від осі  $Oy$  за годинниковою стрілкою.

**Розв'язок задачі**

Вважатимемо, що форма поперечних перетинів каверни мало відрізняється від кола і тому її можна визначити за формулою

$$R(t, \vartheta) = R_0(t) + \sum_{n=2}^{\infty} f_n(t, \vartheta), \quad (1)$$

в якій  $R_0(t)$  – це радіус поперечного перетину осесиметричної каверни, яка утворюється за круговим диском в ідеальній рідині, і цей радіус вважається відомою функцією, а  $f_n(t, \vartheta)$  – це та деформація контуру перетину каверни в момент часу  $t$ , яку потрібно знайти і яка породжена як еліптичністю тіла, так і наявністю поля сили тяжіння. Оскільки то-

чного аналітичного виразу для функції  $R_0(t)$  немає, використаємо досить простийну її апроксимацію [1]

$$R_0(t) = R_k(\sigma) \sqrt{1 - a(\sigma)(1-t)^2},$$

де

$$R_k(\sigma) = \sqrt{\frac{c_x(\sigma)}{k(\sigma)\sigma}} - \text{радіус міделевого}$$

перетину,

$$a(\sigma) = 1 - \frac{4,38\sigma}{c_x}, \quad k(\sigma) = \frac{1 + 50\sigma}{1 + 56,2\sigma} - \text{попра-$$

вочні коефіцієнти. Величина  $c_x(\sigma)$  – це коефіцієнт опору кавітуючого тіла. Залежність його від числа кавітації  $\sigma$  для кавітатора-диска визначається формулою [1,2]  $c_x = c_{x0}(1 + \sigma)$ , для конусів  $c_x = c_{x0} + \sigma$ , а  $c_{x0}$  – коефіцієнт опору при нульовому числі кавітації, його визначають експериментально і приймають рівним  $c_{x0} \approx 0,82$ . Проте Гузевський [5] ці формули знайшов теоретично: для конусів  $c_x = c_{x0}(1 + 1,05\sigma)$  для кутів розхилу конуса  $2\gamma < 90^\circ$  і  $c_x = c_{x0} + \frac{2}{3}\sigma$  для конусів

з кутом  $2\gamma > 90^\circ$ . Змінна  $t$  у формулі (1) – це відносний час входу перетину в площину спостереження, якщо в момент  $t = 0$  в цій площині перебував кавітатор. Фактично це координата вздовж осі каверни, що відраховується від кавітатора і віднесена до напівдовжини каверни

$$L_k = \frac{1,92 - 3\sigma}{\sigma} R_H, \text{ де } R_H - \text{радіус перетину}$$

зриву струменів з кавітуючого тіла. Формула (1) для  $R_0(t)$  в такому вигляді встановлена Г.В.Логвиновичем [1].

Для визначення функцій  $f_n(t, \vartheta)$  в роботі [3] була побудована математична модель, в основі якої лежить гідродинаміка гіпотетичної течії, особливістю якої є врахування поля сили тяжіння і сил в'язкості у прилежових областях течії. В цьому разі задача зводиться до інтегрування рівняння Лапласа і виконання динамічної і кінематичної умов на межах каверни. Оскільки самі ці межі є невідомими, то використовуються розклади шуканих функцій в ряди Тейлора в околі

поверхні осесиметричної каверни, що виникає в ідеальній невагомій рідині. В результаті приходимо до такої задачі

$$\nabla^2 \varphi = 0, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t} = (\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla f - \nabla\varphi\nabla F_0 - f \frac{\partial(\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla F_0}{\partial n}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\nabla\Phi_0 - \vec{c})\nabla\varphi + f \left[ \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial n \partial t} + (\nabla\Phi_0 - \vec{c}) \frac{\partial\nabla\Phi_0}{\partial n} \right] = -\frac{\partial\Phi_0}{\partial t} + \vec{c}\nabla\Phi_0 - \frac{1}{2}(\nabla\Phi_0)^2 - \frac{\tilde{p}_n - p_\infty}{\rho}. \quad (4)$$

де  $\Phi_0$  і  $R_0$  – потенціал незбуреної рідини і радіус осесиметричної каверни,  $\varphi$  і  $f$  – збурений потенціал і деформація радіуса перетину каверни,  $F(t, x, r, \vartheta)$  – рівняння перетину зриву,  $p$  – гідродинамічний тиск,  $\rho$  – густина рідини,  $\vec{c} = \{u \cos \vartheta, -u \sin \vartheta, 0\}$ ,  $u$  – швидкість вертикального переміщення порожнини або перетинів каверни, а  $n$  – додатна нормаль до поверхні. Як незбурені течії, характеристики яких  $(\Phi_0, F_0)$  входять в ці рівняння, зручно (хоча і не обов'язково), використовувати течії з потенціалом

$$\Phi_0 = R_0 \dot{R}_0 \ln r - \frac{u R_0^2}{r} \cos \vartheta,$$

а збурені величини шукати у формі

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) r^{-n} \cos n\vartheta,$$

$$f(t, \vartheta) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(t, \vartheta). \quad (5)$$

Функція  $\phi$  задовольняє рівнянню Лапласа, а підстановка її в рівняння (3) приводить до визначення залежностей між модами  $a_n$  потенціалу і модами деформацій  $f_n(t, \vartheta)$

$$\frac{(n+1)a_n}{R_0^{n+2}} = -\dot{f}_n - 2\dot{R}_0 \frac{f_n}{R_0}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6)$$

З системи лінійних алгебраїчних рівнянь (6) можна знайти коефіцієнти  $a_n$  мод потенціалу і використати їх в динамічній умові (4). Тоді можна отримати нескінченну систему диференціальних рівнянь другого порядку відносно мод

деформацій  $f_n(t, \vartheta)$ , яку ми запишемо в дещо спрощеному вигляді

$$\begin{aligned} \ddot{f}_1 &= -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_1 + \frac{\dot{f}_1 \dot{f}_2}{R} + \frac{1,92 - 3\sigma}{2\sigma \cdot Fr^2}, \\ \ddot{f}_2 &= -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_2 - \frac{2\dot{f}_1(\dot{f}_1 - \dot{f}_3)}{R} + \frac{1 \cdot \ddot{R}}{R} f_2, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\ddot{f}_n = -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_n - \frac{n\dot{f}_1(\dot{f}_{n-1} - \dot{f}_{n+1})}{R} + \frac{(n-1)\ddot{R}}{R} f_n$$

В рівняннях системи (7) параметр  $Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gd_H}}$ , ( $d_H$  – діаметр перетину зриву

струменів,  $V_0$  – швидкість руху кавітатора вздовж від’ємної осі  $Ox$ ) – число Фруда, поява якого зумовлена наявністю поля сили тяжіння.

Нескінченну систему диференціальних (7) можна розв’язувати методом редукції. Але для інтегрування цієї системи потрібні початкові умови. Ми будемо вважати, що в початковий момент часу (коли у площину спостереження входить перетин зриву струменів) швидкості зміни мод деформацій дорівнюють нулю:  $\dot{f}_n(0) = 0$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ). Якби перетин зриву був колом, то і самі деформації в початковий момент були б теж нульовими.

При еліптичній формі перетину зриву можна використати метод представлення еліпса за допомогою деформації кола. Для цього рівняння кліпса  $\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (вісь  $Oy$  направлена вгору) запишемо у полярній системі координат  $y = r \cos \vartheta$ ,  $z = r \sin \vartheta$ . Тоді для "радіуса" еліпса отримаємо вираз

$$r(e, \vartheta) = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \vartheta}}, \quad \text{у якому}$$

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{c^2}, \quad (\text{при } c > b) - \text{ексцентриситет}$$

еліпса. Оскільки  $|\sin \vartheta| \leq 1$ , а  $e < 1$ , то функцію  $r(e, \vartheta)$  можна розкласти в ряд Тейлора за параметром  $(e \sin \vartheta)^2 < 1$  [11]

$$r(e, \vartheta) = b \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} e^{2k} \sin^{2k} \vartheta \right). \quad (8)$$

Ряд (8) можна перетворити в ряд Фур’є, якщо скористатися представленням степеню косинуса через косинуси кратних кутів [11]. Тоді, після підстановки виразу цього степеню у рівняння (8) і деяких перетворень остаточно будемо мати вираз для "радіуса" еліпса  $r(e, \vartheta)$ , який тепер будемо позначати  $R_H(e, \vartheta)$

$$R_H(e, \vartheta) = b \left( R_{H0} + \sum_{m=1}^{\infty} f_{2m,0}(e) \cos 2m \vartheta \right),$$

$$R_{H0}(e) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(2n-1)!! e^n}{n! 2^n} \right]^2 \quad (9)$$

Тут  $R_{H0}(e)$  – радіус деякого гіпотетичного кола, а

$$f_{2m,0}(e) = (-1)^m \sum_{k=n}^{\infty} \left[ \frac{(2k-1)!! (2k)! e^k}{2^k} \right]^2 \times \frac{2}{(k-m)!(k+m)!} \quad (11)$$

– це ті деформації, накладання яких на радіус гіпотетичного кола робить функцію  $R_H(e, \vartheta)$  рівнянням еліпса. Maple дозволяє "побачити", як виглядає радіус  $R_{H0}(e)$  гіпотетичного кола з співвідношення (10) для різних значень ексцентриситету. Для цього досить виконати команди

```
assume(0 < e < 1);
Rn0(e) := 1 + sum( ((2*n-1)!! / (2*n)!!)^2 * e^2*n, n=1..infinity );
Rn0 := e -> 1 + sum( doublefactoria[2*n-1]^2 * e^2*n / doublefactoria[2*n]^2, n=1..infinity );
> Rn0(e);
1 + 1/4 * e^2 * ( -4/e^2 + 8 * EllipticK(e) / (e^2 * pi) )
> simplify(%);
2 * EllipticK(e) / pi
```

Тут функція  $\text{sum}(f(x), x = a..b)$  є функцією, яка у Maple обчислює визначений інтеграл від функції  $f(x)$  в межах від  $a$  до  $b$ , а функція  $\text{assume}(0 < e < 1)$  забезпечує умову, накладену на величину

ексцентриситету. Символ infinity у програмі *Maple* означає нескінченність.

Як бачимо з виразу (12), цей радіус пропорційний до повного еліптичного інтегралу першого роду в нормальній формі. На скільки добре формули (10) і (11) апроксимують еліпс, видно з рис.1.

Незважаючи на те, що тут використані лише три члени ряду Фур'є, а ексцентриситет досить значний, апроксимація цілком пристойна.

Систему рівнянь (7) треба розв'язувати при початкових умовах  $f_{2n}(0) = f_{2n,0}(e)$  і  $f_{2n-1}(0) = 0$ , а також  $\dot{f}_n(0) = 0$ .

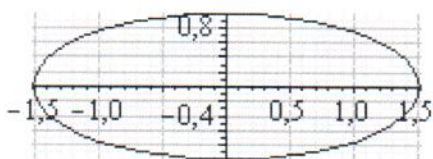


Рис.1 Перетин зриву при  $t=0$

Найважливіша (і найбільша за абсолютною величиною) деформація  $f_2(0) = f_{2,0}(e)$  може бути визначена простою формулою, яку досить легко знаходить *Maple*:

$$\begin{aligned} &> \text{assume}(0 < e < 1): f_{2,0}(e) := -2 \cdot \text{sum} \left( \left( \frac{(2 \cdot k - 1)!! \cdot e^k}{k! \cdot 2^k} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \cdot \left( \frac{k}{k+1} \right), k=1 \dots \text{infinity} \right); \\ f_{2,0} &:= e \rightarrow -2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{doublefactoria}[2k-1]^2 (e^k)^2 k}{k!^2 (2^k)^2 (k+1)} \right) \\ &> f_{2,0}(e); \\ &-\frac{1}{4} e^2 \left( \frac{(32 - 16 e^2) \text{EllipticK}(e)}{e^4 \pi} - \frac{32 \text{EllipticE}(e)}{e^4 \pi} \right) \end{aligned}$$

Знову маємо вираз через повні еліптичні інтеграли першого і другого роду.

Так само можна знайти і всі інші початкові значення деформацій. Так, наприклад, для  $f_4(0) = f_{4,0}(e)$  і  $f_6(0) = f_{6,0}(e)$  маємо вирази

$$f_{4,0}(e);$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{64} e^4 \left( \frac{1}{9} \frac{(768 e^4 - 4096 e^2 + 4096) \text{EllipticK}(e)}{e^8 \pi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \frac{(-4096 + 2048 e^2) \text{EllipticE}(e)}{e^8 \pi} \right) \end{aligned}$$

$$> f_{6,0}(e);$$

$$\begin{aligned} f_{6,0} &:= e \rightarrow -2 \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\text{doublefactoria}[2k-1]^2 (e^k)^2 k (k-1) (k-2)}{k!^2 (2^k)^2 (k+1) (k+2) (k+3)} \right) \\ &> f_{6,0}(e); \\ &-\frac{5}{512} e^6 \left( \frac{1}{75} \frac{1}{e^{12} \pi} \left( (-30720 e^6 + 323584 e^4 - 786432 e^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 524288) \text{EllipticK}(e) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{75} \frac{(-94208 e^4 + 524288 e^2 - 524288) \text{EllipticE}(e)}{e^{12} \pi} \right) \end{aligned}$$

Як бачимо, коефіцієнти у виразах з еліптичними інтегралами зростають при зростанні номера збурення.

І тут треба зробити таке застереження відносно обчислення початкових збурень. Якщо в даній задачі збурення  $f_{2,0}(e)$ ,  $f_{4,0}(e)$ ,  $f_{6,0}(e)$  – це неперервні і плавні криві, то крива  $f_{8,0}(e)$  для малих значень  $e < 0.3$  виявилася осцилюючою кривою, яка на цьому малому проміжку дуже багато разів змінює знак. На рис.2 видно, яка нестійка поведінка кривої біля нуля. Проте це пов'язано не з недоліками *Maple* [9], а з тим, що функція  $f_{8,0}(e)$  має у своєму складі різницю дуже малих складових і кількість знаків за замовчуванням виявляється недостатньою. В такому раз у *Maple* є функція *Digits*, за допомогою якої можна збільшити кількість значущих цифр. Так, якщо ввести команду *Digits := 40*, то отримаємо рис.3, на якому показані залежності початкових деформацій від ексцентриситету і всі криві є плавними, без осциляцій.

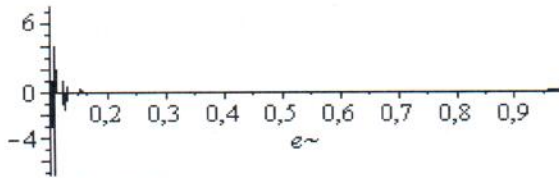


Рис.2. Осцилююча крива  $f_{8,0}(e)$

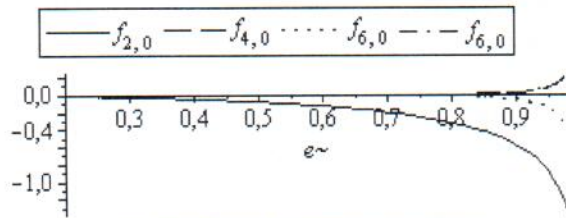


Рис.3. Чотири перші початкові деформації

Тепер можна перейти до інтегрування системи диференціальних рівнянь (2) при уже встановлених початкових умовах. Результати розрахунків за системою 8 диференціальних рівнянь другого порядку представлені на рис.4.

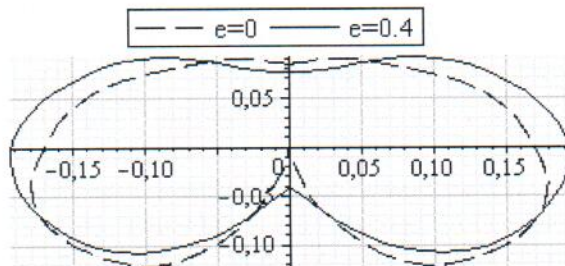


Рис.4. Вплив еліптичності на каверну  $t=1.75; \sigma=0.08; Fr=10$

На ньому показані форми поперечних перетинів при  $t=1,75$  каверни, яка утворюється за еліптичним ( $e=0,4$ ) і круговим ( $e=0$ ) кавітатором в течії з числом кавітації  $\sigma=0.08$  і числом Фруда  $Fr=10$ . Тут "радіуси" контуру перетину віднесені до малої осі еліпса, яка розташована вздовж вектора сили тяжіння, тобто цей еліпс з ексцентриситетом  $e=0,4$  горизонтально видовжений. Між іншим, на рис.5

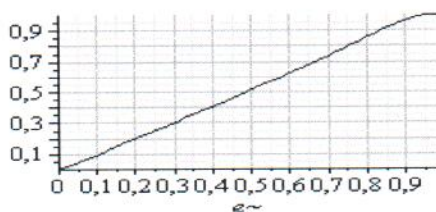


Рис.5. Заданий і розрахунковий ексцентриситет за 5 наближеннями

показана відповідність заданого ексцентриситету до обчисленого в результаті розрахунку за формулою

$$\varepsilon(e, \vartheta) := \text{sqrt} \left( 1 - \left( \frac{R(e, 0)}{R\left(e, \frac{\text{Pi}}{2}\right)} \right)^2 \right)$$

Видно, що формула розрахунку еліпса як збуреного (деформованого кола на основі п'яти членів ряду Фур'є

$$R(e, \vartheta) := RH(e) + f_{2,0}(e) \cdot \cos(2 \cdot \vartheta) + f_{4,0}(e) \cdot \cos(4 \cdot \vartheta) + f_{6,0}(e) \cdot \cos(6 \cdot \vartheta) + f_{8,0}(e) \cdot \cos(8 \cdot \vartheta) + f_{10,0}(e) \cdot \cos(10 \cdot \vartheta);$$

$$R := (e, \vartheta) \rightarrow RH(e) + f_{2,0}(e) \cos(2 \vartheta) + f_{4,0}(e) \cos(4 \vartheta) + f_{6,0}(e) \cos(6 \vartheta) + f_{8,0}(e) \cos(8 \vartheta) + f_{10,0}(e) \cos(10 \vartheta)$$

є досить точною навіть до значних ексцентриситетів. Проте це не означає, що такі ж будуть і результати при розрахунках каверни, оскільки, по-перше, рівняння системи (7) отримані в рамках теорії малих збурень і, отже, їх можна застосовувати лише при малих ексцентриситетах. По-друге, дію збурення від еліптичності кавітатора і від наявності сили тяжіння не можна просто складати, оскільки їх характер зовсім різний, про що свідчить, зокрема, рис.4.

### Висновки

Розрахунки показують, що характер деформації форми поперечних перетинів каверни у полі сили тяжіння за еліптичним кавітатором є різним на різних ділянках каверни. Так на початковій стадії форма перетинів залишається еліптичною, але ексцентриситет новоутвореного еліпса зменшується. При цьому спостерігається тенденція до наближення форми еліпса до дещо деформованого кола. І тут швидкість прямування окремих частин еліпса до кола є теж різною: елементи, що прилягають до великої осі швидше прямують до кола, ніж ті, що прилегли до малої осі. Але на ці дві тенденції накладається деформація, спричинена полем сили тяжіння і тому характер деформації в цілому значно ускладнюється.

Ще на одному важливому висновку з цього дослідження хотілося б наголоси-

ти. Виходячи з загальних уявлень про роль кавітатора у формуванні каверни можна сподіватися, що найважливіше значення має його площа. Тому доцільно більш уважно подивитися на формулу, за якою визначається радіус гіпотетичного кола. Як відомо, площа еліпса визначається величиною його півосей  $S = \pi bc$ . Якщо скористатися формулою для ексцентриситету  $e^2 = 1 - \frac{b^2}{c^2}$  і виразом для  $R_{H0}(e)$  з рівності (12), то відношення площі гіпотетичного круга до площі еліпса виразиться формулою

$$\lambda(e) = \sqrt{1 - e^2} \left( \frac{2 \operatorname{EllipticK}\left(\frac{e}{2}\right)}{\pi} \right)^2.$$

Для невеликих значень ексцентриситету маємо такі значення цього відношення  $\lambda(0,2) = 0,98$ ,  $\lambda(0,4) = 0,93$ ,  $\lambda(0,6) = 0,84$ ,  $\lambda(0,8) = 0,65$ . Звідси робимо висновок, що для значень ексцентриситету  $e < 0,6$  з великою достовірністю можна як радіус гіпотетичного кола використовувати радіус кола, рівновеликого даному еліпсу, тобто прийняти

$$R_{H0} \approx \sqrt{\pi bc}.$$

### Список літератури

1. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.
2. Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф., Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.
3. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. – К.: Наук. думка, 1980. – 296 с.
4. Гузевский Л.Г., Расчет осесимметричных течений со свободными поверхностями. – Докл. АН СССР, 1975. №2. – С. 269 – 271.
5. Гузевский Л.Г., Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979. – 36 с., (препринт), Ин-т Теплофизики СО АН СССР.
6. Буйвол В.М., Логвинович Г.В., Про деформацію поперечних перетинів каверни у важкій рідині. Доповіді АН УРСР, серія А, 1971. №2. – С.157 – 159.
7. Brennen С.Е. Fission of collapsing cavitation bubbles. J. Fluid Mech. 2002, v. 472. – P. 153 – 166.
8. Буйвол В.М., Фоміна Н.Б., Наконечна В.В. Технологія Matlab в задачах про стискання несферичних каверн в рідині. // Проблеми інформатизації та управління, 2009. №2 (26). – С. 11 – 15.
9. Дьяконов В.П. Maple 9 в математике, физике и образовании. СПб.: Питер. – 2004.
10. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964. – 344 с.
11. Градштейн И.С. и Рыжик И.М., Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. – Физ.- М.: 1962. – 1096 с.