УДК 004.7:629.735.072.8.08:681.3(0.45)

Черныш О.А.

РАЗРАБОТКА АЛГОРИТМА И ПРОГРАММ ВЫБОРА КЛАССА АРХИТЕКТУРЫ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

Институт компьютерных технологий

Рассмотрены разные методы для решения задачи на собственные значения. Дано описание модифицированного метода анализа иерархий, в котором собственные значения вычисляются с помощью QR-алгоритма со сдвигом. Представлены результаты исследований модифицированного метода анализа иерархий

Введение

Среди методов решения задач многокритериального выбора, имеющих, с одной стороны, признанную теоретическую обоснованность, а с другой стороны, удовлетворяющих требованию универсальности, наибольшее распространение получили методы анализа иерархий (МАИ), в частности, метод, предложенный Саати [1]. Он основан на парных сравнениях альтернативных вариантов по различным критериям с использованием девятибалльной шкалы отношений и последующим ранжированием набора альтернатив по всем критериям и целям. Взаимоотношения между критериями учитываются путем построения иерархии критериев и применением парных сравнений для выявления важности критериев и подкритериев. Метод отличается сравнительной простотой и дает хорошее соответствие интуитивным представлениям о физической природе решаемых задач.

В методе анализа иерархий в качестве оценки наибольшего собственного значения матрицы предпочтений используется среднее геометрическое по строкам матрицы.

С задачами на собственные значения инженер сталкивается в различных ситуациях. Знание собственных чисел позволяет анализировать многие процессы, исследовать и управлять ими. Собственные числа и собственные векторы являются важнейшими характеристиками, отражающими существенные стороны линейных моделей [2]. Поэтому, дальнейшее расширение процесса математического моделирования приведет к тому, что владение методами решения проблемы собственных значений станет неотъемлемым элементом инженерного образования.

Выбор наиболее эффективного метода определения собственных значений или собственных векторов для данной инженерной задачи зависит от ряда факторов, таких, как тип уравнений, число искомых собственных значений и их характер. Алгоритмы решения задач на собственные значения делятся на две группы. Итерационные методы очень удобны и хорошо приспособлены для определения наименьшего и наибольшего собственных значений. Методы преобразований подобия несколько сложней, зато позволяют определить все собственные значения и собственные векторы.

Выбор подходящего алгоритма для решения той или иной задачи на собственные значения определяется типом собственных значений, типом матрицы и числом искомых собственных значений. Чем сложнее задача, тем меньше число алгоритмов, из которых можно выбирать. Обычно пакеты математического обеспечения ЭВМ содержат подпрограммы, в которых используются все эти алгоритмы или некоторые из них. Одним из эффективных способов использования имеющегося математического обеспечения является одновременное применение двух подпрограмм, позволяющее совместить их лучшие качества. Например, имея матрицу общего вида, можно методом Хаусхолдера свести ее к виду Гессенберга, а затем с помощью алгоритма QR найти собственные значения. При этом будут использованы как быстрота, обеспечиваемая методом Хаусхолдера, так и универсальность алгоритма QR.

Разработка алгоритма выбора класса архитектуры программного обеспечения

Рассмотрим функции чувствительности решений по выбору класса архитектур программного обеспечения к ошибкам задания исходных данных. Причины ошибок могут быть как объективного, так и субъективного характера. Вследствие этого возникают погрешности вычисления собственных значений и собственных векторов, что приведет к неверному выбору наилучшего решения, получаемого методом анализа иерархий. Другими словами, из-за ошибочного задания (измерения, вычисления) исходных данных возникает риск выбора неверного или не самого эффективного класса программного обеспечения [3].

Вычислительная задача заключается в нахождении собственного значения матрицы приоритетов системы

$$Ax = \lambda x .$$

Функция чувствительности [4] собственных значений к вариациям различных параметров системы $\dot{y} = Ay$ имеет вид $\frac{\partial \lambda_i}{\partial p} = \frac{((\partial A/\partial p)x_i, \upsilon_i)}{(x_i, \upsilon_i)}$. Эту формулу удобно использовать для оценки чувствительности метода решения к вариациям исходных данных. Исследуем зависимость максимального собственного значения от погрешности точного значения одного из элементов матрицы приоритетов, выбираемых на основе парных сравнений.

Для нахождения собственного значения была использована программа MatLab. При линейном росте элемента матрицы сравнений получаем нарастание собственного значения, колебания, по-видимому, обусловлены накоплением ошибок выбранного метода вычислений. Поскольку метод решения, используемый в программе MatLab, неизвестен, для решения данной задачи был разработан модифицированный метод анализа иерархий, в котором для нахождения собственного числа используется QR-алгоритм со сдвигом с коррекцией ошибок на промежуточных этапах вычислений.

На первом этапе работы алгоритма исходная матрица элементарными преобразованиями приводится к верхней форме Гессенберга. Верхняя форма Гессенберга представляет треугольную матрицу, у которой сохранена одна диагональ ниже главной, а элементы ниже этой диагонали равны нулю.

Далее для вычисления собственных значений используется QR-алгоритм со сдвигом [5]. *QR-алгоритм со сдвигами* определяется следующими соотношениями

$$A_1 = A ,$$
$$A_k - \nu_k I = Q_k R_k , \; A_{k+1} = R_k Q_k + \nu_k I ,$$
$$k = 1, 2, \ldots .$$

Числа $\nu_1, \ldots, \nu_k$ называются сдвигами. Пусть матрица A является правой почти треугольной. Тогда по-прежнему все матрицы A_k имеют такой же вид, и все матрицы A_k унитарно подобны исходной матрице A. Пусть выполнены k шагов QR-алгоритма со сдвигом.

Предположим, что собственные значения $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_n^{(k)}$ занумерованы таким образом, что выполняются неравенства

$$\prod_{m=1}^{k} \left| \lambda_1^{(k)} - \nu_m \right| \geq \prod_{m=1}^{k} \left| \lambda_2^{(k)} - \nu_m \right| \geq$$
$$\geq \ldots \geq \prod_{m=1}^{k} \left| \lambda_n^{(k)} - \nu_m \right| ,$$

(верхний индекс k указывает на то, что нумерация, вообще говоря, зависит от k). Тогда можно показать, что поддиагональные элементы $a_{i+1,i}^{(k)}$ матрицы A_k есть величины такого порядка:

$$a_{i+1,i}^{(k)} = O\left(k^{2(s-1)} \prod_{m=1}^{k} \left[(\lambda_{i+1}^{(k)} - \nu_m)/(\lambda_i^{(k)} - \nu_m) \right] \right),$$

где s – максимальный порядок канонического ящика Жордана для матрицы A. Выбирая сдвиги подходящим образом, можно получить ускорение сходимости QR-алгоритма. Наиболее часто используются две стратегии сдвигов: сдвиг 1-го порядка, определяемый по последнему диагональному элементу матрицы выполняемого шага, и сдвиг 2-го порядка, определяемый по собственному значению подматрицы 2-го порядка, расположенной в правом нижнем углу матрицы выполняемого шага. При этом скорость сходимости QR-алгоритма становится асимптотически квадратичной, а в отдельных случаях и кубической.

Результаты модифицированного метода анализа иерархий

Задача многокритериального выбора состоит в отыскании класса архитектуры программного обеспечения для диспетчерского тренажера.

Предложены следующие классы архитектуры программного обеспечения:

– цельная программа (ЦП);

– комплекс автономно выполняемых программ (КАВП);

– многослойная программная система (МПС);

– совокупность параллельно выполняемых программ (СПВП).

Выбор производится по следующим критериям: быстродействие, помехоустойчивость, надежность, точность, стоимость.

В работе рассмотрены две матрицы парных сравнений. Первая матрица (обратно-симметричная) строится с использованием формулы $a_{ji} = 1/a_{ij}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/5 & 1/5 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1/3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1/3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вторая матрица строится на основе элементов первой строки с использованием формулы $a_{ij} = a_{i1}a_{1j} = a_{1j}/a_{1i}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 1/2 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/9 & 1/6 & 2/3 \\ 3 & 9 & 1 & 3/2 & 6 \\ 2 & 6 & 2/3 & 1 & 4 \\ 1/2 & 3/2 & 1/6 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Исследована зависимость максимального собственного значения от погрешности точного значения одного из элементов матрицы приоритетов, выбираемых на основе парных сравнений.

Вычисления собственных значений проводились в программе MatLab и разработанном программном обеспечении.

Для большей информативности были построены функции чувствительности решения – отношение отклонения Δ собственного значения к отклонению ε от точного значения x_i.

Для обратно симметричной матрицы парных сравнений получены следующие графики (рис. 1):

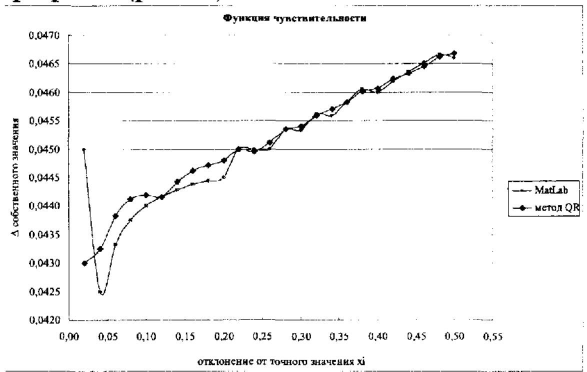

Рис. 1. Функция чувствительности

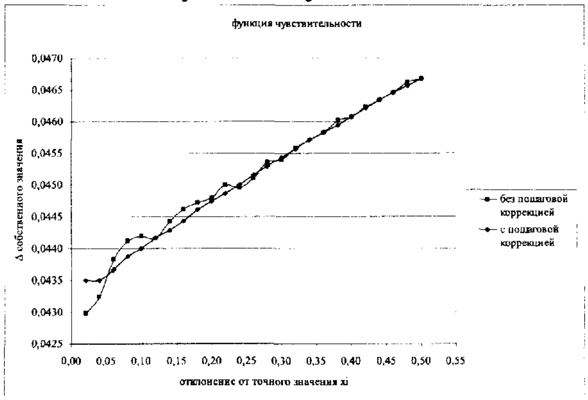

Рис. 2. QR-алгоритм со сдвигом с пошаговой коррекцией

Для матрицы парных сравнений, удовлетворяющей свойству совместности, построенной на основе элементов первой строки, получены следующие графики (рис. 3).

На рис. 2 и 4 изображены графики функций чувствительности (соответственно для обратно симметрической матрицы и матрицы на основе первой строки), вычисленных методом Хаусхолдера приведения матрицы парных сравнений к почти треугольной форме Гессенберга с дальнейшим вычислением собственных значений методом QR-итераций со сдвигом. Отметим, что колебания решения носят слабо выраженный характер. Это объясняется возможностью дополнительной настройки программ вычислений и регулировки шага итераций.

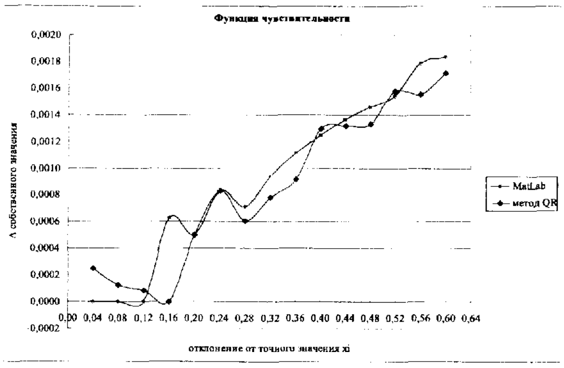

Рис. 3. Функция чувствительности

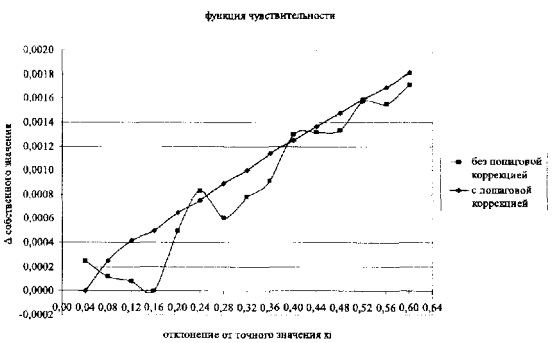

Рис. 4. QR-алгоритм со сдвигом с пошаговой коррекцией

Кроме того, при изменениях величины элементов матрицы приоритетов до 50% отклонение даже наибольшего собственного значения от точной величины не превышает 5%-10% величины спектрального радиуса матрицы. Следовательно, средний риск перескока на неверное решение является величиной второго порядка малости, а само такое событие может быть отнесено к классу редких событий или грубых промахов.

Вычисления собственных значений с помощью QR-алгоритма со сдвигом более эффективны, поскольку дают меньшие методические погрешности. *С использованием пошаговой коррекции, как видно с рис. 3 и 4, вычисления являются* более точными. Чувствительность решения к ошибкам задания исходных данных оказывается достаточно низкой.

Выводы

Метод анализа иерархий может применяться для решения широкого круга прикладных задач. При использовании эффективных численных методов для точной оценки собственных значений матриц приоритетов чувствительность решения к ошибкам задания исходных данных оказывается достаточно низкой. Можно утверждать, что сбои процедуры выбора наилучшего решения будут весьма редкими событиями, а вероятность таких событий – величина второго порядка малости.

Список литературы

1. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.

2. *Уилкинсон Дж. Х.* Алгебраическая проблема собственных значений: Пер. с англ. – М.: Наука, 1970. – 564 с.

3. *Лисовая И. В., Мишарин И. В., Черныш О. А.* Системный анализ прикладных задач многокритериальной оптимизации методом анализа иерархий // Проблеми інформатизації та управління. – К.: НАУ, 2007. – № 3(21). – С. 99-103.

4. *Томович Р., Вукобратович М.* Общая теория чувствительности. – М.: «Советское радио», 1972. – 240 с.

5. *Амосов А. Л., Дубинский Ю. Л., Копченова Н. В.* Вычислительные методы для инженеров: Учеб. пособие. – М.: Высш. шк., 1994. – 544 с.