

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕНЗОРНЫХ МОДЕЛЕЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИМВОЛОВ

**Институт компьютерных технологий  
Национального авиационного университета**

*На основе разработанного программного обеспечения исследованы особенности представления символов (литер) тензорами различных рангов – от 4-го (9×9) до 8-го (729×729). Для всех больших букв латиницы определены все возможные численные характеристики тензора (инварианты, магнитуда, сингулярные числа, коэффициенты полинома характеристического уравнения, собственные числа.), которые приведены к пикселю. Получены статистические данные, на основании которых, выбраны лучшие: сингулярные числа, коэффициенты полинома характеристического уравнения. Проведен анализ результатов для тензоров различных рангов.*

### **Введение**

В работе [1] показано, что применение тензорной методологии позволяет сформировать систему признаков, на основании которых возможно выполнить распознавание символов (литер). Основой таких признаков являются инварианты тензора, моделирующего символ [2]. Представление литеры тензором отвечает принципу целостности, кроме того, дает возможность *естественного* увеличения числа признаков за счет использования большей части SVD-разложения [3] или системы инвариантов. Отметим, что сформулированное в [4] предположение о достаточности использования только первых 3-х членов на самом деле является только необходимым, т.к. в целом ряде случаев необходимо использовать 4-е и более компонент.

### **Результаты численного моделирования**

Идея дискретизации как способа распознавания изображений существует достаточно давно [5]. На изображение накладывается двумерная сетка, элементы которой равняются 1, если в соответствующем квадрате имеется фрагмент изображения, и 0 – если нет. Частота дискретизации существенно влияет на результаты распознавания. Слишком высокая частота дискретизации (и, соответственно малый шаг дискретизации) приводят к большому объему информации. Это, в свою очередь приводит к большим затратам на хранение и обработку инфор-

мации. С другой стороны, уменьшение частоты дискретизации приводит, как правило, к уменьшению точности. Одним из способов преодоления этих проблем является использование тензорного анализа для распознавания образов [6].

Как показано в [4] процедура бинаризации распознаваемого символа в виде тензора позволяет унифицировать анализ объекта, независимо от размера сетки. Остановимся более подробно на этом вопросе [7].

Будем считать, что нам дан тензор валентности  $v$ , если в каждой из координатных систем нам заданы  $3^v$  чисел  $a_{i_1 i_2 \dots i_v}$ , занумерованных  $v$  индексами  $i_1, i_2, \dots, i_v$ , каждый из которых независимо друг от друга пробегает значения 1, 2, 3 (и которые в записи различаются друг от друга 1-м, 2-м, ...  $v$ -м местом записи при букве  $a$ ), причем при повороте координатных осей эти числа преобразуются по закону:

$$a'_{p_1 p_2 \dots p_v} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_v} A_{p_1 i_1} A_{p_2 i_2} \dots A_{p_v i_v} a_{i_1 i_2 \dots i_v}. \quad (1)$$

Здесь предполагается, что поворот осей задается формулами

$$e'_p = \sum_i A_{pi} e_i,$$

где  $e_i$  – старый ортогональный репер,  $e'_p$  – новый ортогональный репер.

Пусть нам дан какой-нибудь тензор не менее, чем 2-й валентности, например, трехвалентный,  $a_{ijk}$ . Отметим какие-либо два его индекса, например 2-й и 3-й, и сделаем с ними следующее. В каждой координатной системе отберем те коор-

динаты нашего тензора, для которых отмеченные индексы равны (это будут координаты вида  $a_{ill}$ ), и составим сумму всех таких координат при как-нибудь фиксированных остальных индексах (в нашем случае при как-нибудь фиксированном первом индексе  $i$ ).

Эта сумма имеет вид:  $\sum_l a_{ill}$ ,

и зависит только от фиксированных индексов (в нашем случае от индекса  $i$ ).

Обозначим ее  $a_i$ . Итак,

$$a_i = \sum_l a_{ill} \quad (2)$$

Числа  $a_i$ , составленные в каждой координатной системе согласно (2), образуют тензор 1-й валентности. Этот тензор получается из исходного тензора  $a_{ijk}$  свертыванием 2-го и 3-го индекса.

Для доказательства выпишем закон преобразования (1) в применении к исходному тензору

$$a'_{pqr} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{qi} A_{rk} a_{ijk}. \quad (3)$$

Составим теперь числа  $a'_i$  в новой (штрихованной) координатной системе. Обозначая эти числа  $a'_p$ , получим согласно (2)

$$a'_p = \sum_s a'_{pss} \quad (4)$$

Заменяя в преобразовании (3) индексы  $q$  и  $r$  через  $s$  и вставляя результат в (4), получим:

$$a'_p = \sum_s \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} A_{sj} A_{sk} a_{ijk} \quad (5)$$

Выполним, прежде всего, суммирование по  $s$ . Согласно формуле

$$\sum_s A_{sj} A_{sk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \quad (6)$$

тогда (5) принимает вид

$$a'_p = \sum_i \sum_j \sum_k A_{pi} \delta_{jk} a_{ijk}. \quad (7)$$

В процессе суммирования по  $j$  и  $k$  можно сохранить лишь члены, для которых  $j = k$  остальные члены согласно (6) обратятся в нуль.

Следует отметить, в литературе компаунд-тензоры иногда называются сверткой [7], что согласуется с описанной выше процедурой.

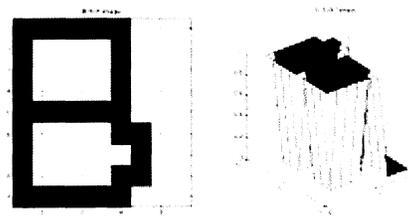
При распознавании букв латиницы на каждую букву были наложены сетки 9 x 9, 81 x 81 и 729 x 729. Использование свертки позволило свести сетки разных размерностей к матрице 9 x 9, что дало возможность сравнивать результаты для разных сеток.

Для компаунд-тензоров определены инварианты, магнитуда, сингулярные числа, коэффициенты полинома характеристического уравнения, собственные числа. Полученные величины приведены к пикселю. Для одноименных литер различного размера вычислены: математическое ожидание

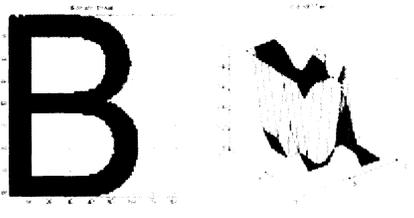
$$M(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^n x_k,$$

дисперсия  $D=M(x-M(x))^2$  и среднеквадратическое отклонение  $\sigma$ . Получены численные характеристики и статистические данные для всех букв латиницы. В качестве примера представлены результаты для литер **B**, **O**, **X**, **Z** (шрифт Arial 216, обычный), т.к. они в наибольшей степени характеризуют особенности латиницы.

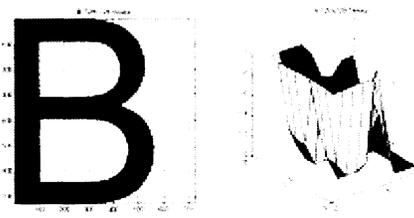
На рис. 1 показаны матричное и тензорное представление литеры **B** (рис.1,а, рис.1,б, рис.1,в) при различных сетках, а также графики коэффициентов характеристического полинома (рис. 1,г) и сингулярных чисел (рис.1,д). Здесь и далее на рисунках сплошной линией представлены результаты для сетки 9 x 9, штриховой — для сетки 81 x 81 и штрихпунктирной — для сетки 729 x 729.



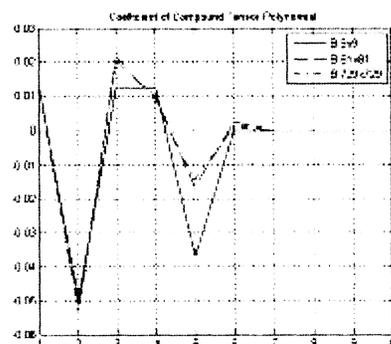
а) Сетка 9x9



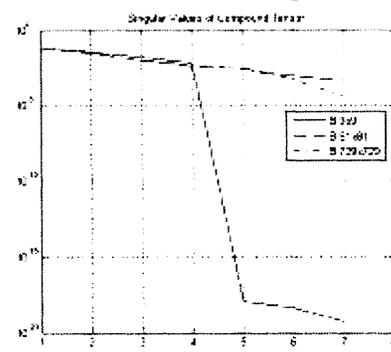
б) Сетка 81x81



в) Сетка 729x729

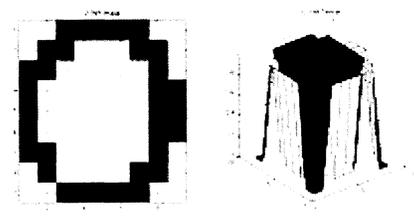


г) Коэффициенты характеристического полинома литеры В

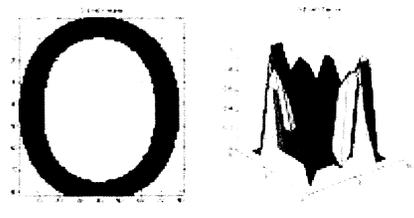


д) Сингулярные числа литеры В

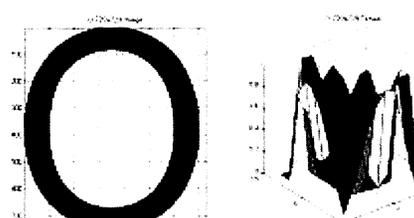
Рис.1. Матричное и тензорное представление, численные характеристики литеры В



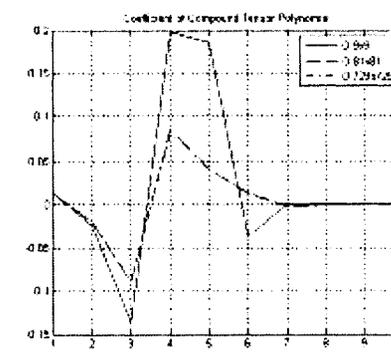
а) Сетка 9x9



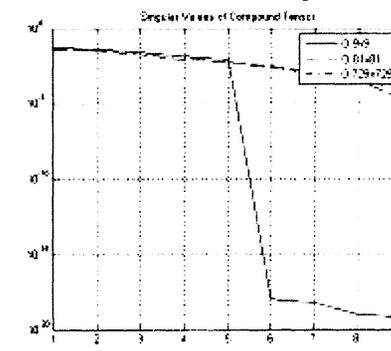
б) Сетка 81x81



в) Сетка 729x729



г) Коэффициенты характеристического полинома литеры О



д) Сингулярные числа литеры О

Рис.2. Матричное и тензорное представление, численные характеристики литеры О

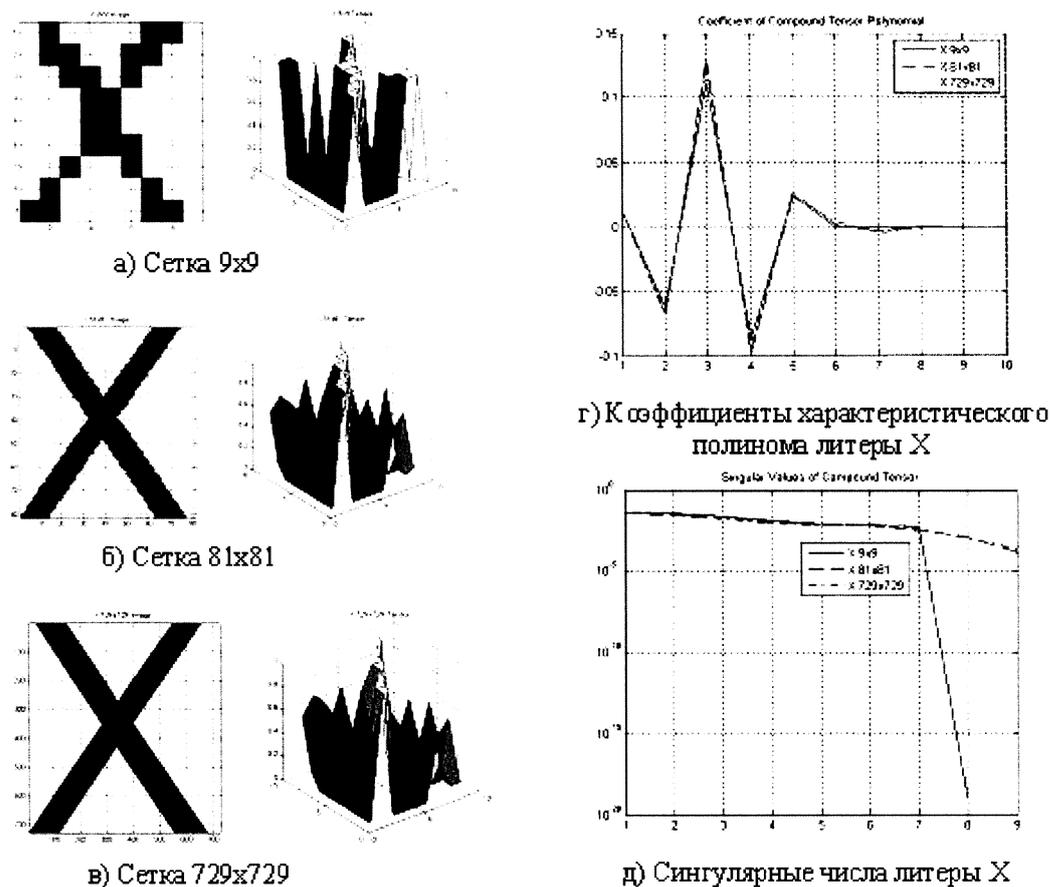


Рис.3. Матричное и тензорное представление, численные характеристики литеры X

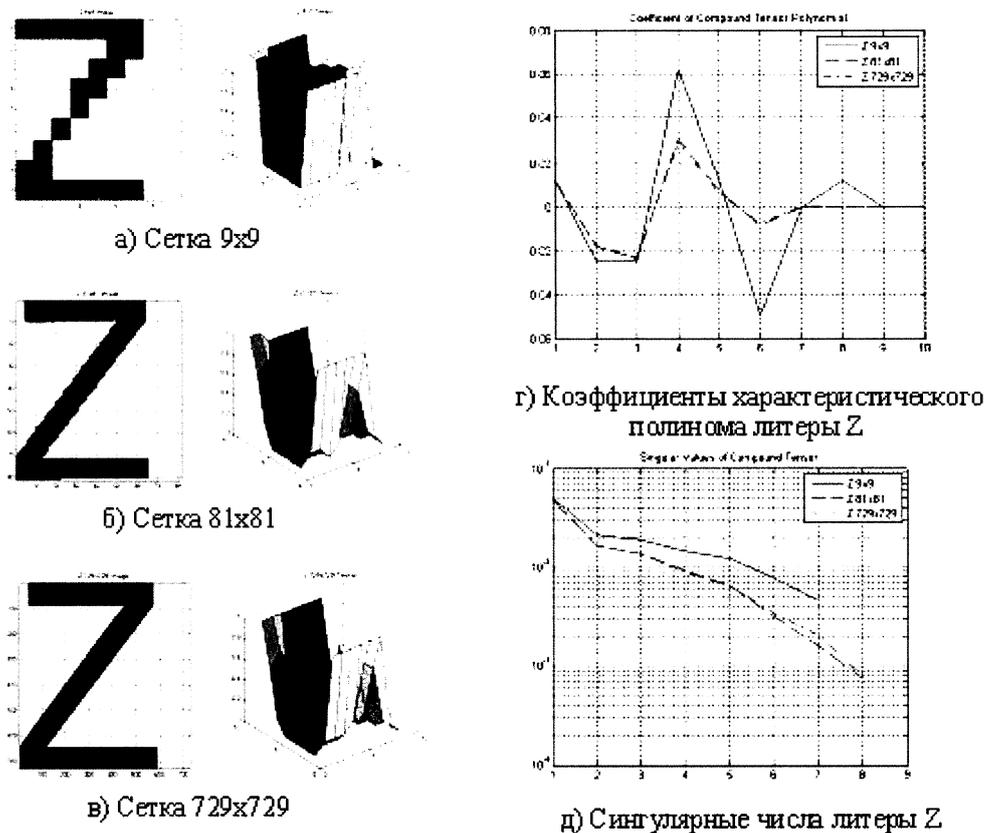


Рис.4. Матричное и тензорное представление, численные характеристики литеры Z

Структуры рисунков для букв O, X, Z аналогичны рисунку 1 для литеры B.

В таблицах 1 - 8 представлены среднеквадратические отклонения для коэффициентов характеристического полинома и сингулярных чисел рассматриваемых литер.

Таблица 1. Среднеквадратические отклонения для коэффициентов характеристического полинома литеры B

Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$	Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$
1	0.000	6	0.001
2	0.002	7	0.000
3	0.005	8	0.000
4	0.002	9	0.000
5	0.012	10	0.000

Таблица 2. Среднеквадратические отклонения для сингулярных чисел литеры B

Номер синг. числа	$\sigma$	Номер синг. числа	$\sigma$
1	0.000	6	0.000
2	0.002	7	0.000
3	0.004	8	0.000
4	0.002	9	0.000
5	0.002		

Таблица 3. Среднеквадратические отклонения для коэффициентов характеристического полинома литеры O

Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$	Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$
I	II	III	IV
1	0.000	6	0.029
2	0.003	7	0.002
3	0.027	8	0.000
4	0.065	9	0.000
5	0.084	10	0.000

Таблица 4. Среднеквадратические отклонения для сингулярных чисел литеры O

Номер синг. числа	$\sigma$	Номер синг. числа	$\sigma$
1	2	3	4
1	0.004	6	0.002

1		3	4
2	0.005	7	0.000
3	0.005	8	0.000
4	0.003	9	0.000
5	0.001		

Таблица 5. Среднеквадратические отклонения для коэффициентов характеристического полинома литеры X

Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$	Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$
1	0.000	6	0.021
2	0.035	7	0.021
3	0.094	8	0.003
4	0.061	9	0.000
5	0.016	10	0.000

Таблица 6. Среднеквадратические отклонения для сингулярных чисел литеры X

Номер синг. числа	$\sigma$	Номер синг. числа	$\sigma$
1	0.040	6	0.080
2	0.034	7	0.011
3	0.044	8	0.070
4	0.018	9	0.010
5	0.090		

Таблица 7. Среднеквадратические отклонения для коэффициентов характеристического полинома литеры Z

Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$	Номер коэф. характерис. полинома	$\sigma$
I	II	III	IV
1	0.000	6	0.024
2	0.041	7	0.010
3	0.090	8	0.071
4	0.018	9	0.000
5	0.033	10	0.000

Таблица 8. Среднеквадратические отклонения для сингулярных чисел литеры Z

Номер синг. числа	$\sigma$	Номер синг. числа	$\sigma$
1	0.015	6	0.026
2	0.026	7	0.016
3	0.030	8	0.040
4	0.032	9	0.000
5	0.034		

Для всех букв латиницы были подсчитаны все возможные тензорные характеристики. Установлено, что лучшие результаты дают сингулярные числа и коэффициенты полинома характеристического уравнения. Ниже приведены наибольшие значения среднеквадратического отклонения для коэффициентов полинома характеристического уравнения.

Литера	Номер коэф. характерист. уравнения	Средне-квадрат. отклонение
B	5	0,0126
O	5	0,0835
X	3	0,0094
Z	6	0,0240

### Выводы

Полученные результаты свидетельствуют о том, что наибольшую погрешность в оцифрованном изображении содержат литеры представленные сеткой наименьшего размера (в нашем случае – сетка 9 x 9). В случае использования композит-тензора эти погрешности нивелируются, причем тем больше, чем больше исходная сетка. Так, например, для сетки 729 x 729 оцифрованное изображение ближе к аналоговому, чем для сетки 81 x 81 и уж тем более чем для сетки 9 x 9. Именно потеря информации в оцифрованном изображении приводит к некоторым всплескам среднеквадратического отклонения.

### Список литературы

1. Минаев Ю. Н., Филимонова О. Ю., Винник Д. Н. Тензорные модели изображений // Матеріали УІІ міжнародної науково-технічної конференції «АВІА-2007». Том 1. – С. 17- 20
2. Крон Г. Тензорный анализ. Москва, «Сов. радио», 1978. –719 с.
3. Brannon R. M. Functional and Structured Tensor Analysis for Engineers. — New Mexico, 2003. –300 p.

4. Винник Д. Н. Системы оптического распознавания символов на основе тензорных моделей // Наук.- техн. зб. «Проблеми інформатизації та управління», № 2(20), 2007. – С. 51 – 56.

5. Глибовець М. М., Отецький О. В. Штучний інтелект. Київ, видавничий дім «КМ Академія», 2002. – 365 с.

6. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. Москва, «Наука», 1969. - 351 с.

7. Ращевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. – Москва, Гос. Изд. Техн. - теор. Лит., 1953. – 635 с.