

УДК 532.529

Буйвол В.М., д-р ф.-м. наук
 Фоміна Н.Б.
 Наконечна В.В.

ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЗАДАЧАХ ГІДРОДИНАМІКИ

Інститут комп'ютерних технологій
 Національного авіаційного університету

Розглядається застосування прикладних пакетів MathCad і MatLab до розв'язку задач про течії з вільними поверхнями в рідині. Використовуючи метод малих збурень і основні рівняння гідродинаміки ідеальної рідини, досліджуються форми вільних поверхонь в рідині, яка наділена властивостями реальних рідин. Приведені програми задач в середовищах MathCad і MatLab, а також числові і графічні результати розрахунків

Вступ

В роботі [1] викладений метод розрахунку форми кавітаційних каверн, що виникають за тілами при їх руху в рідині, наділеній реальними властивостями. Там використано результат наближеного інтегрування системи диференціальних рівнянь, який потім реалізувався за допомогою прикладного пакету *MathCad*. Проте викладений там метод можна застосовувати тільки в обмеженому діапазоні зміни основних параметрів течії. Цей діапазон можна розширити, якщо інтегрування виконати чисельно за допомогою того ж таки пакету *MathCad*, або ще більш потужного пакету *MatLab*. Саме це і є предметом цієї статті.

Постановка задачі

Оскільки в цитованій роботі приведена система диференціальних рівнянь і коротко викладений метод її отримання, то тут ми почнемо саме з розгляду цієї системи. Будемо вважати, що швидкості руху значні і каверна досить тонка. Якщо ввести циліндричну систему координат x, r, ϑ , вісь Ox якої направлена вздовж осі каверни проти руху каверностворюючого тіла, то у площину спостереження $x = Const$ в кожний момент часу $t > 0$ будуть входити все нові і нові поперечні перетини каверни. При цьому мається на увазі, що у момент часу $t = 0$ у площину спостережень ввійшов перетин зриву струменів каверностворюючого тіла радіуса R_H , яке рухається вздовж від'ємної осі Ox з швидкістю V_0 . Оскільки ми будемо вважати, що каверна знаходиться у

полі дії сили тяжіння, поверхневого натягу, а форма перетину зриву не обов'язково є кругом, то "радіус" довільного перетину каверни в загальному випадку буде функцією як часу, так і кута ϑ , який будемо відраховувати від вертикальної осі Oy за годинниковою стрілкою. Отже, покладемо

$$R(t, \vartheta) = R(t) + f(t, \vartheta), \quad (1)$$

де $R(t)$ – радіус поперечних перетинів осесиметричної каверни, яка утворюється за симетричним тілом, що швидко рухається, в ідеальній рідині, а $f(t, \vartheta)$ – це та деформація радіуса каверни, яка викликана різного роду відхиленнями умов течії, що відрізняє умови досліджуваної течії від течії за симетричним тілом в ідеальній рідині. Це можуть бути як властивості самої рідини (наявність сили тяжіння, поверхневого натягу, в'язкості), так і різні умови організації течії (форма кавітуючого тіла, його орієнтація в потоці, наявність близько розташованих інших тіл тощо). Спосіб врахування всіх цих особливостей течії описаний в роботі [2].

Розв'язок задачі

Точних формул для $R_0(t)$ не існує, але є достатньо точні наближені формули, що добре узгоджуються з експериментальними даними. Це, наприклад, формула Г.В.Логвиновича [3]:

$$R(t) = R_k(y) \sqrt{1 - a(y)(1-t)^2}, \quad (2)$$

де

$$Rk(y) = \sqrt{\frac{c_x(\sigma)}{k(\sigma)y}}, a(y) = 1 - \frac{4,38y}{c_x}, k(y) = \frac{1+50y}{1+56,2y}.$$

Величина $c_x(\sigma)$ – це так званий коефіцієнт опору кавітуючого тіла, він залежить від числа кавітації σ . Так для кавітатора-диска вважають [3,4], що $c_x = c_{x0}(1+\sigma)$, для конусів $c_x = c_{x0} + \sigma$, а c_{x0} – коефіцієнт опору при нульовому числі кавітації, його визначають експериментально і приймають рівним $c_{x0} \approx 0,82$. Коефіцієнт $k(\sigma)$ був знайдений Гузевським Л.Г [4].

Якщо збурення радіуса представити рядом Фур'є

$$f(t, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \cos n\vartheta, \quad (3)$$

то для визначення функцій $f_n(t)$ можна отримати систему диференціальних рівнянь, яку запишемо у такій дещо спрощеній формі [5,6]:

$$\ddot{f}_1 = -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_1 + \frac{2\dot{f}_1 \dot{f}_2}{R} + \sigma_1^*,$$

$$\ddot{f}_2 = -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_2 - \frac{2\dot{f}_1(\dot{f}_1 - \dot{f}_3)}{R} + \frac{\ddot{R}}{R} f_2 + \sigma_2^*,$$

$$\ddot{f}_3 = -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_3 - \frac{3\dot{f}_1(\dot{f}_2 - \dot{f}_4)}{R} + \frac{2\ddot{R}}{R} f_3 + \sigma_3^*,$$

$$\ddot{f}_n = -\frac{2\dot{R}}{R} \dot{f}_n - \frac{n\dot{f}_1(\dot{f}_{n-1} - \dot{f}_{n+1})}{R} + \frac{(n-1)\ddot{R}}{R} f_n + \sigma_n^* \quad (4)$$

Всі величини, які входять у рівняння системи (4), віднесені до півдовжини L осесиметричної каверни і швидкості V_0 каверностворюючого тіла. Так $R = \frac{R^*}{L}, t = \frac{V_0^* t^*}{L}$, де зірочками відзначені розмірні величини.

Величини σ_k^* залежать від поля сили тяжіння, поверхневого натягу та в'язкості. Так, наприклад, $\sigma_1^* = \frac{L}{2Fr^2}, \sigma_2^* = \frac{12f_2}{R^3We}$, де L – півдовжина осесиметричної каверни, числа Фруда і

$$\text{Вебера } Fr = \sqrt{\frac{V_0}{gd}}, We = \frac{\rho V_0^2 d}{\tau}, \text{ а } d - \text{ діаметр перетину зриву, } \rho - \text{ густина рідини, } \tau - \text{ коефіцієнт поверхневого натягу. У}$$

решті рівнянь подібні "силові" члени відкинуті із-за їх незначної величини.

Рівняння (3) треба доповнити початковими умовами. Якщо кавітуюче тіло є диском з радіусом R_H , то в початковий момент часу відхилення від цього значення нема і тому $f_n(0) = 0$. Швидкість розширення цього перетину зриву теж дорівнює нулю: $\dot{f}_n(0) = 0$.

Систему рівнянь (4) можна розв'язувати, наприклад, методом Рунге-Кутти. Якщо це робиться в середовищі *MathCad*, то схема програми з процедурою *Given-Odesolve* виглядає так. Перед ключовим словом *Given* мають бути заданими:

1) параметри течії σ, Fr , коефіцієнти

$$c_x = 0,84(1+\sigma), a = 1 - \frac{1,92^2 \sigma}{c_x}, L = \frac{1,92 - 3\sigma}{\sigma};$$

2) функції, пов'язані з осесиметричною течією:

$$R = (R_k / L) \sqrt{1 - a(1-t)^2}, Rk = \sqrt{\frac{cx}{\sigma}},$$

$$p = \frac{2a(1-t)}{1 - a(1-t)^2}, q = \frac{a}{[1 - a(1-t)^2]^2}, r = \frac{1}{R}.$$

Після ключового слова *Given* записується система рівнянь першого порядку у нормальній формі

Given

$$y_1'(t) = y_2(t)$$

$$y_2'(t) = -p(t)y_2(t) + 2r(t)y_2(t)y_4(t) + \sigma_1^*$$

$$y_3'(t) = y_4(t)$$

$$y_4'(t) = -p(t)y_4(t) + q(t)y_3(t) -$$

$$-2r(t)y_2(t)(y_2(t) - y_6(t))$$

$$y_5'(t) = y_6(t)$$

$$y_6'(t) = -p(t)y_6(t) + 2q(t)y_5(t) -$$

$$-3r(t)y_2(t)(y_4(t) - y_8(t))$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots$$

$$y'_{2n-1}(t) = y_{2n}(t)$$

$$y'_{2n}(t) = -p(t)y_{2n}(t) + nq(t)y_{2n-1}(t) - (n+1)r(t)y_2(t)(y_{2n-2}(t) - y_{2n+2}(t))$$

Потім записуються початкові умови $y_1(0) = 0 \quad y_2(0) = 0 \quad \dots \quad y_{2n}(0) = 0$.

І, нарешті, відповідній матриці розв'язків присвоюється значення *Odesolve*. Ця процедура видає всі значення функцій $y_k(t)$ і всіх похідних цих функцій в заданому проміжку зміни аргументу t . Зауважимо, що в разі дії тільки поля сили тяжіння $\sigma_1^* = \frac{1,92 - 3\sigma}{2\sigma Fr^2}$.

Збурення радіуса визначається формулою $f(t, \vartheta) = y_3(t)\cos 2\vartheta + y_5(t)\cos 3\vartheta + \dots + y_{2n-1}(t)\cos n\vartheta$.

В середовищі *MatLab* перш за все буде створено m -файл. В даному разі m -файл для 30 рівнянь першого порядку має вигляд:

```
function F=Sys_15eq_2ord_cav(t,y)
s=0.08;Fr=10;U=(1.92-3*s)/(2*s*Fr^2);
% член, що враховує силу тяжіння;
Lk=(1.92-3*s)/s;cx=0.84*(1+s); % півдовжина каверни і коефіцієнт опору;
a=1-(1.92^2)*s./cx);
% допоміжний коефіцієнт;
RkL=(1/Lk).*sqrt(cx./s));
% радіус міделя, віднесений до півдовжини каверни;
R0L=RkL.*sqrt(1-a*(1-t).^2);
% радіус осесиметричної каверни;
p=((2*a*(1-t))./(1-a*(1-t).^2));
q=-a./((1-a*(1-t).^2).^2);r=1/R0L;
% коефіцієнти рівняння;
F=[y(2);-p*y(2)+r*y(2)*y(4)+U;
y(4);-p*y(4)-2*r*y(2)*(y(2)-y(6))+q*y(3);
y(6);-p*y(6)-3*r*y(2)*(y(4)-y(8))+2*q*y(5);
y(8);-p*y(8)-4*r*y(2)*(y(6)-y(10))+3*q*y(7);
.....
y(28);-p*y(28)-14*r*y(2)*(y(26)-y(30))+13*q*y(27));
y(30);-p*y(30)-15*r*y(2)*(y(28)-y(30))+14*q*y(29)];
%права частина рівняння.
```

Для розв'язання цієї системи застосовується solver: `>>[t,y]=ode45('ім'я',[t], [п.ум.]. Тут 'ім'я' – це ім'я m -файла, [t] – матриця проміжку зміни часу, [п.ум.] – матриця початкових умов. Далі команди (зірочка – знак множення) >>s=0.08; Fr=10; cx=0.84*(1+s); Lk=(1.92-3*s)/s; RkL=(1/Lk).*sqrt(cx./s)); a=1-(1.92^2)*s./cx; знову задають умови течії. Команди >>x=0:pi/18:2*pi;t=1.5;f=y(6,1)*cos(2*x)+y(6,2)*cos(3*x)+y(6,3)*cos(4*x)+y(6,4)*cos(5*x)+y(6,5)*cos(6*x)+y(6,6)*cos(7*x)+y(6,7)*cos(8*x)+y(6,8)*cos(9*x)+y(6,9)*cos(10*x)+y(6,10)*cos(11*x)+y(6,11)*cos(12*x)+y(6,12)*cos(13*x)+y(6,13)*cos(14*x)+y(6,14)*cos(15*x) для заданих значень t і кроку по ϑ визначають збурення радіуса, команди >>R0=sqrt(cx./s).*sqrt(1-a*(1-t).^2); R=(R0+Lk.*f); z=R*cos(x); y=R*sin(x); обчислюють сам радіус, його декартові координати, а команда >>plot(y,z); виводить на екран рисунок форми поперечного перетину (в даному разі $t = 1,5$). У формулі для f символ $y(i, k)$ означає елемент матриці, де i означає рядок, який відноситься до перетину (наприклад, $t = 1,5$), а k означає номер стовпчика матриці y , в якому зберігаються значення функції $f_k(t)$.`

Аналіз результатів

В табл. 1 наведені значення перших 4-х збурень радіуса каверни при $\sigma = 0,08; Fr = 10$ в різних перетинах $t = const$ каверни. Збурення $f_1(t)$ визначає викривлення ("випливання") осі каверни.

Таблиця 1.

Таблиця 4-х збурень радіуса				
t	$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_3(t)$	$f_4(t)$
0,25	0.0203	-0.0005	0.0000	0.0000
0,50	0.0100	-0.0005	0.0003	-0.0000
0,75	0.0218	-0.0019	0.0002	-0.0000
1,00	0.0386	-0.0057	0.0010	-0.0002
1,25	0.0605	-0.0136	0.0037	-0.0011
1,50	0.0878	-0.0282	0.0109	-0.0045
1,75	0.1198	-0.0527	0.0271	-0.0148

Добре видно, що в домідельній частині каверни збурення дуже малі: сила

Архімеда на такій швидкості не встигає подіяти суттєвим чином на зміну форми початково кругового перетину.

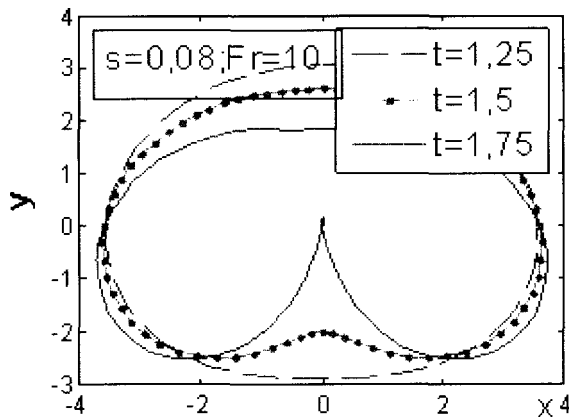


Рис. 1. Перетини каверн

На рис.1 в такий спосіб в середовищі *Matlab* побудовано три поперечні перетини каверни, що розташовані за міделевим перетином. Добре видно, як при наближенні до кінця каверни в результаті дії сили Архімеда знизу каверни росте впадина, яка при $t=1,75$ досягає осі каверни і каверн уже має тенденцію до поділу на два вихрових утворення. Треба тільки мати на увазі, що кожний перетин піднімається вгору на величину $f_1(t)$.

Якщо порівняти з такими ж рисунками поперечних перетинів, отриманих в роботі [1], деяку розбіжність можна помітити лише в перетині $t=1,75$. Це цілком природно, оскільки метод роботи [1] не дає можливості уточнювати розрахунки. В той час, як інтегрування системи (4) можна виконати з заданою точністю, включаючи в систему все більшу кількість рівнянь. Рис.1 побудований за системою 30 рівнянь, хоча, як виявилось, досить уже 20 рівнянь. Не зайве тут зауважити, що числові результати тільки підтверджують те припущення, яке було покладене в основу роботи [1]. Воно полягало в тому, що в середній частині каверни відношення попереднього (за номером) збурення до наступного приблизно дорівнює 0,5. Наприклад,

$$\frac{f_8(1,5)}{f_7(1,5)} = -0,465; \quad \frac{f_8(1,75)}{f_7(1,75)} = -0,601.$$

Це дозволило знайти наближені суми рядів Фур'є, що привело до аналітичного виразу для форми поперечних перетинів каверни.

Розрахунки показують, що і *MatLab* і *MathCad* дають практично один і той же результат для збурень $f_2(t) \div f_8$ при кількості рівнянь 24, але далі починаються розбіжності, які, проте, не впливають суттєво на сумарний результат. Потрібно зауважити, що велика кількість рівнянь для *MathCad* не дуже прийнятна. З 26 рівняннями він справляється важко, а при більшій їх кількості програма часто "зависає". Та і реалізація матриці високого порядку для процедури *Odesolve* теж незручна. А для середовища *MatLab* 30 і більша кількість рівнянь не є проблемою. Проте було показано, що використання системи 15 рівнянь 2-го порядку забезпечує похибку у збуренні $f_{14}(t)$ навіть при $t=1,75$ не більшу, ніж 10^{-5} . Треба тільки зазначити, що solver *ode45* дає дещо точніші результати, ніж solver *ode23*.

З багатьох розрахунків можна зробити висновок, що для невеликої кількості рівнянь більш зручним є *MathCad*, а при кількості рівнянь, що перевищує 15 краще використовувати *MatLab*.

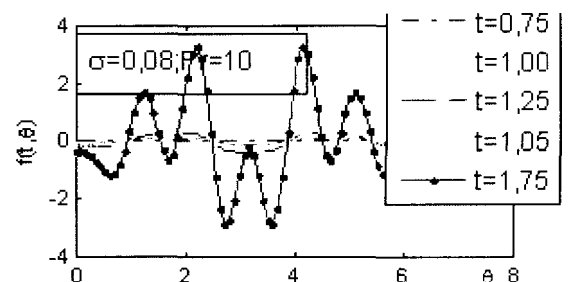


Рис. 2. Збурення радіуса каверни

На рис.2 показані графіки збурень $f(t, \vartheta)$ радіусів каверни у різних перетинах в течії при $\sigma = 0,08; Fr = 10$. У перетині $t = 0,75$ збурення зовсім не значні, зате при $t = 1,75$ стають сумірними з радіусом осесиметричної каверни. Такий результат не може бути сприйнятий, оскільки він отриманий в рамках моделі, побудованої на теорії малих збурень, тобто таких, для яких $\frac{f}{R} \ll 1$. Тому не дивно,

що в цьому перетині каверна в її звичайному розумінні уже не існує.

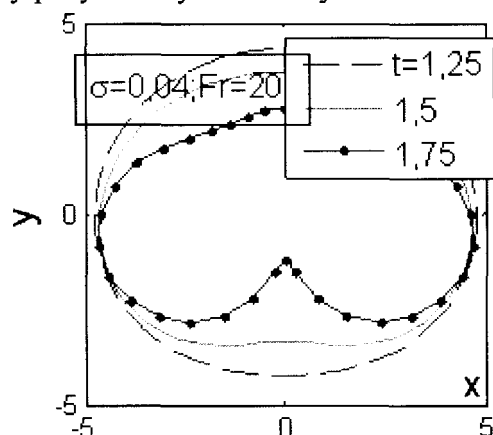


Рис.3. Перетини каверни

На рис.3 показані ці ж самі три перетини, але вже в течії навколо каверни з параметрами $\sigma = 0,04$; $Fr = 20$. В такій течії в частині каверни біля міделевого перетину збурення зовсім малі і перетини близькі до колової форми, і тільки при $t = 1,5$ збурення стають помітними. Як показано в [5], розвинена тут теорія справедлива для тих перетинів, для яких $t < Fr\sqrt{1,5 \cdot \sigma\sqrt{\sigma}}$. В течії $\sigma = 0,08$; $Fr = 10$ маємо $t < 1,8$; в течії $\sigma = 0,04$; $Fr = 20$ маємо $t < 2,2$. Отже, в першій течії $t = 1,75$ уже є граничним значенням і тому результати розрахунків у цьому перетині виходять за межі допустимих. Зате в течії $\sigma = 0,04$; $Fr = 20$ форма цього перетину може вважатися достовірною.

Список літератури

1. Буйвол В.М., Фоміна Н.Б. Наближений метод розрахунку суперкаверн // Вісник НАУ, №3-4, 2007. – С. 166–169.
2. Буйвол В.М. Концепція гіпотетичних течій // Вісник НАУ, №1, 2004. – С.176–179.
3. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. – 208 с.
4. Гузевский Л.Г., Численный анализ кавитационных течений. Новосибирск, 1979, 36 с., (препринт), Ин-т Теплофизики СО АН СССР.

5. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. – К.: Наук. думка, 1980. – 296 с.

6. Буйвол В.М., Логвинович Г.В., Шевчук Ю.Р., Система уравнений возмущенного движения тонких каверн. Докладі АН УРСР, серія А, 1985, №10. – С. 103–106.