

## ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ КАВЕРН

Інститут комп'ютерних технологій  
Національного авіаційного університету

*Досліджується вплив реальних властивостей рідини, зокрема капілярності, в'язкості та поля тяжіння, на тонку просторову вертикальну каверну за осесиметричними тілом при зануренні (впливанні) в рідині кавітаційної течії. За допомогою прикладного пакету MathCAD отримані графіки, що ілюструють залежність форми і основних параметрів каверни від чисел кавітації, Фруда, Вебера і Рейнольдса.*

### Вступ

Дослідження процесу входу тіла в воду було предметом багатьох наукових праць, досить повну бібліографію яких можна знайти, наприклад в [1]. Проте розрахунків просторових вертикальних каверн у полі сил тяжіння, поверхневого натягу та в'язкості не так багато. Можна назвати лише роботи [2,3,4], що базуються на енергетичному підході, та роботи [1,5], засновані на теорії гідродинаміки тонкого тіла. На міжнародному симпозиумі з кавітації цим питанням була присвячена лише доповідь [1].

Цитовані праці в результаті різняться, крім загального підходу, наявністю невизначеного коефіцієнта, для якого в [2-4] рекомендоване сталі значення, в той час, як в роботах [1,5] він визначається теоретично. Виконані нами розрахунки каверн в досить широкому діапазоні зміни чисел кавітації і Фруда показують, що не зважаючи на досить значне відхилення цього коефіцієнта від сталого значення, його вплив на форму поздовжнього перетину вертикальної каверни не значний.

### Постановка задачі

Введемо циліндричну систему координат  $x, r, \vartheta$ . Вісь  $Ox$  системи направимо вздовж вектора прискорення сили тяжіння, а початок розташуємо в площині спостережень, в якій в момент часу  $t=0$  знаходиться той перетин тіла, з якого зриваються струмені рідини. При достатньо великій швидкості  $V_0$  рідинне кільце, утворене перетином зриву у площині спо-

стереження, почне розширюватися практично незалежно від того, як поведуть себе інші кільця рідини. Диференціальне рівняння, яке визначає радіуси цих кілець, а, отже, і всієї просторової вертикальної каверни у віддаленому від вільної поверхні положенні, має вигляд [4]:

$$\mu(\sigma_0) \frac{\partial^2 R^2(x,t)}{\partial t^2} = \sigma_0 \pm \frac{2t}{Fr_L^2}, \quad (1)$$

де  $\sigma_0$  – число кавітації. Нижній знак "мінус" пов'язаний з процесом занурення каверни, а верхній знак "плюс" – з її впливанням, а  $x = \text{Const.}$  – це рівняння площини спостережень. Коефіцієнт

$$\mu = -\ln \left( \frac{L_k}{R_b} \varepsilon \right), \quad \left( \varepsilon = \frac{R_k}{L_k} \right),$$

де  $r = R_b$  – відстань до точок, в яких рідина вже не "відчуває" руху каверни. Як видно із структури цього коефіцієнта і як засвідчено в [5], він залежить лише від числа кавітації і цю залежність можна виразити наближеною формулою

$$\mu = -\sqrt{\frac{\sigma}{-4 \ln \sigma}}.$$

Тут треба зауважити, що рівняння типу (1) було значно раніше отримане в [6], тому його можна назвати рівнянням Біркова-Луміса-Серебрякова.

Рівняння (1) має бути доповнене початковими умовами. Нехай тіло, з якого зірвалися струмені рідини і утворило каверну, має фіксовану лінію зрива струменів і площу перетину зриву  $S_n$ . Природно припустити, що в момент  $t=0$  її радіус

дорівнює  $R_H$ :  $R(x,t) \Big|_{t=0} = R_H$ . При досить великій швидкості  $V_0$  руху кавернотворючого тіла основна енергія руху зосереджена в рідинному кільці  $R < r < R_b$ , де  $r = R$  – внутрішній радіус каверни,  $r = R_b$  – зовнішній радіус кільця, рухом рідини на якому вже можна знехтувати. Оскільки каверна припускається достатньо тонкою, то можна вважати, що вся енергія кільця одиничної товщини зосереджена в його кінетичній енергії, яку обчислимо за формулою:

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{2\pi} \int_R^{R_b} v_r^2 r dr d\vartheta.$$

Радіальна швидкість в полярних координатах  $v_r = \frac{R\dot{R}}{r}$ , тому

$$T = \frac{\rho}{2} (R\dot{R})^2 \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_R^{R_b} \frac{dr}{r} = \pi\rho(R\dot{R})^2 \ln\left(\frac{R_b}{R}\right).$$

З використанням позначення  $\ln\frac{R_b}{R} = \mu(\sigma)$  (до речі, Біркгоф і Луміс позначили відношення  $\frac{R_b}{R} = n$  і рекомендували приймати число  $n \approx 10$ , що і привело до значення  $\mu \approx 2$ ) остання формула набуває вигляду

$$T = \pi\rho(R\dot{R})^2 \ln\left(\frac{R_b}{R}\right) \mu(\sigma) \quad (2)$$

Оскільки в початковий момент часу кінетична енергія дорівнювала нулю, то вираз (2) являє собою зміну кінетичної енергії, яка дорівнює роботі зовнішніх сил за цей же час. Зовнішньою силою тут виступає сила опору тіла, яка розраховується за формулою [2]

$$W = c_x \frac{\rho V_0^2}{2} S_H,$$

де  $c_x = c_x(\sigma)$  – коефіцієнт опору тіла,  $\rho$  – густина рідини. Отже, з рівняння  $T = W$  знаходимо вираз для похідної в початковий момент часу

$$\frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = \pi R_H \sqrt{\frac{2c_x}{\mu}}.$$

**Розв'язок задачі**

Будемо вважати, що каверна рухається в полі сил тяжіння і поверхневого натягу, а сама рідина може бути в'язкою. Рівняння Нав'є-Стокса [6]

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot } \vec{v} \times \vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v}$$

де  $\vec{v}$  – вектор швидкості,  $p$  – тиск,  $\nu$  – кінематична в'язкість, за умови, що зовнішні сили мають потенціал  $\vec{F} = -\nabla U$ , а течія безвихрова  $\vec{v} = \nabla \phi$  ( $\phi$  – потенціал цієї течії) не залежать від в'язкості. Це означає, що у симетричних течіях дія в'язких сил проявляється лише у примезових областях [7]. Компоненти тензора напружень  $p_{rr}$ ,  $p_{\vartheta\vartheta}$ , тиск  $p$ , який завжди діє перпендикулярно до відповідних площадок, і радіальна швидкість  $v_r$  пов'язані співвідношеннями

$$p_{rr} = -p + 2\rho\nu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad p_{\vartheta\vartheta} = p.$$

Оскільки радіальна складова швидкості в такій течії визначається формулою  $v_r = \frac{R\dot{R}}{r}$ , то радіальна компонента тензора напружень, яка пов'язана з дією в'язких сил, набуває вигляду  $p_v = -2\rho\nu \frac{\dot{R}}{R}$ . Це дозволяє дію в'язких сил звести до появи додаткового тиску на стінки каверни.

Сила поверхневого натягу, яка діє на стінках каверни, залежить від кривизни поверхні каверни і дія цієї сили зводиться до появи ще одного додаткового тиску на стінки каверни  $p_t = -2\tau H$ . Коефіцієнт поверхневого натягу  $\tau$  на поверхні розділу вода-повітря при атмосферному тиску 1020 Гпа дорівнює  $\tau = 0,07 \frac{H}{M}$  (тут  $H$  – одиниця сили нютон). символом  $H$  позначено середню кривизну поверхні. Якщо враховується також і поле сили тяжіння, то його дія виявляється еквівалентною появі тиску  $p_g = \rho g X$ . Таким чином, врахування дії сил в'язкості, поверхневого натягу і тяжіння приводить до того, що тиск на стінки каверни має обчислюватися за формулою

$$\bar{p} = p_i \mp \rho g X - 2\tau H - 2\rho\nu \frac{\dot{R}}{R},$$

а сам процес занурення каверни в рідину (у площині спостережень  $x = const$ ) замість рівняння (1) буде описуватися рівнянням

$$\mu \frac{d^2 S}{dt^2} + \pi V_0^2 \left( \sigma_0 - \frac{t}{Fr^2} + \frac{8}{WeR} + \frac{8}{ReR} \frac{dR}{dt} \right) = 0, \quad (3)$$

де

$$Fr = \frac{V_0}{\sqrt{gd_H}}, \quad We = \frac{\rho V_0^2 d_H}{\tau}, \quad Re = \frac{V_0 d_H}{\nu},$$

при початкових умовах

$$R(x, t) \Big|_{t=0} = R_H, \quad \frac{dS}{dt} \Big|_{t=0} = \pi V_0 R_H \sqrt{\frac{2c_x}{\mu}}. \quad (4)$$

Тут  $Fr, We, Re$  – числа Фруда, Вебера і Рейнольдса. Для числа Вебера можна зустріти позначення, обернене до нашого. Крім початкових умов (4), припустимо також, що кавітаційна течія розглядається за схемою Рябушинського, тоді  $R(x, t) = R_H$ .

Оскільки розглядається процес рівномірного руху каверни, то перетворенням  $x = V_0 t$  можна перейти до системи координат, яка пов'язана з центром тіла, яке утворило каверну. Якщо віднести всі величини до радіуса перетину зриву

$$\left( \bar{x} = \frac{x}{R_H} \right), \text{ то рівняння (3) набуває ви-$$

гляду

$$\mu \frac{d^2 \bar{S}}{d\bar{x}^2} + \pi \left( \sigma_0 - \frac{t}{Fr^2} + \frac{8}{We\bar{R}} + \frac{8}{Re\bar{R}} \frac{d\bar{R}}{d\bar{x}} \right) = 0$$

Надалі риску над символами будемо опускати.

Спершу врахуємо наявність поля сили тяжіння, тоді задача (3)-(4) для каверни Рябушинського:

$$\mu \frac{d^2 S}{dx^2} + \sigma_0 - \frac{2x}{Fr^2} = 0,$$

$$S(0) = S(x_l) = S_H, \quad \left. \frac{dS}{dx} \right|_{x=0} = cR_H, \text{ де } c = 2\sqrt{2\mu c_x}$$

має розв'язок у вигляді кубічної параболи

$$S(x) = 1 + t \sqrt{\frac{2c_x}{\mu}} - \frac{\sigma_0 x^2}{2\mu} + \frac{x^3}{6\mu Fr^2} \quad (5)$$

З умови  $S(x_l) = S(0)$  для рівняння (5) отримуємо вираз для довжини каверни

$$x_l = \frac{3}{2} \sigma_0 Fr^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2}} \right), \quad (6)$$

яка є дійсною величиною за умови  $\frac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2} \leq 1$ . Поклавши  $\frac{dS}{dx} = 0$ , знайдемо координату максимального радіуса каверни

$$x_k = \sigma_0 Fr^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}} \right), \quad (7)$$

де знову має виконуватися умова  $\frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2} \leq 1$ . Тобто каверна буде існувати, якщо

якщо  $\frac{4c}{3\sigma_0^2 Fr^2} \leq 1$ , оскільки друга умова

тоді виконується автоматично. Маючи формулу для координати міделя, можна знайти і радіус самого міделевого перетину

$$R_k = \sqrt{1 + \frac{c\sigma_0 Fr^2}{2\mu} \left[ 1 - \frac{2}{3} \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}} - m(\sigma, Fr) \right]},$$

$$m(\sigma, Fr) = \frac{2\sigma_0^2 Fr^2}{3c} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{c}{\sigma_0^2 Fr^2}} \right). \quad (8)$$

### Аналіз результатів

Чисельну реалізацію задачі про занурення каверни зручно виконати за допомогою прикладного пакету MathCAD. Програму такої реалізації можна записати у вигляді таких п'яти блоків:

$$1) x=0, 10..160 \quad \sigma = 0.06 \quad Fr=50;$$

$$2) \mu(\sigma) = -\ln \sqrt{\frac{\sigma}{-\ln \sigma}},$$

$$c_x(\sigma) = c_{x0}(1 + \sigma), \quad c(\sigma) = 2\sqrt{2c_x(\sigma)\mu(\sigma)};$$

$$3) S(\sigma, Fr, x) = 1 + \frac{c(\sigma)x}{2\mu(\sigma)} - \frac{\sigma^2 x^2}{2\mu(\sigma)} + \frac{x^3}{6\mu(\sigma)Fr^2},$$

$$R(\sigma, Fr, x) = \sqrt{S(\sigma, Fr, x)};$$

$$4) x_l(\sigma, Fr) = \frac{3\sigma Fr^2}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{4c(\sigma)}{3\sigma^2 Fr^2}} \right),$$

$$x_k(\sigma, Fr) = \sigma Fr^2 \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{c(\sigma)}{\sigma^2 Fr^2}} \right),$$

$$R_k = R(\sigma, Fr, x_k(\sigma, Fr));$$

$$5) \text{root}(S(\sigma, Fr, x), x) = 125,161.$$

У першому блоці задаються значення координати  $x$ , чисел кавітації і Фруда.

У другому блоці зосереджені параметри течії у вигляді функцій, що залежать лише від числа кавітації. При цьому формула  $c_x(\sigma) = c_{x0}(1 + \sigma)$  справедлива

для дисків. Якщо тіло, що створює каверну, є, наприклад, конус, то  $c_x = c_{x0}(1 + 1,05\sigma)$  для кутів розхилу конуса  $2\gamma < 90^\circ$  і  $c_x = c_{x0} + \frac{2}{3}\sigma$  для конусів з кутом  $2\gamma > 90^\circ$ . Величина  $c_{x0} \approx 0,82$  – коефіцієнт опору тіла при нульовому числі кавітації.

Третій блок обчислює площі поперечних перетинів каверни і їх радіуси.

У четвертому блоці обчислюються довжина каверни (6), координата її міделевого перетину (7) та радіус цього перетину (8).

П'ятий блок до певної міри контрольний, в ньому обчислюється координата нуля функції  $S(\sigma, Fr, x)$ . Ця координата завжди більша за довжину каверни, оскільки остання визначає відстань від кавітатора до замикача каверни Рябушинського.

Якщо розглядається задача про впливання каверни, то блоки 3 і 4 треба замінити такими:

$$3) S(\sigma, Fr, x) = 1 + \frac{c(\sigma)x}{2\mu(\sigma)} - \frac{\sigma x^2}{2\mu(\sigma)} - \frac{x^3}{6\mu(\sigma)Fr^2};$$

$$4) xl(\sigma, Fr) = \frac{3\sigma Fr^2}{2} \left( \sqrt{1 + \frac{4c(\sigma)}{3\sigma^2 Fr^2}} - 1 \right),$$

$$xk(\sigma, Fr) = \sigma Fr^2 \left( \sqrt{1 + \frac{c(\sigma)}{\sigma^2 Fr^2}} - 1 \right),$$

$$Rk = R(\sigma, Fr, xk(\sigma, Fr)).$$

Маючи таку програму обчислення в MathCAD, порівняємо результати розрахунків каверни при впливанні, застосовуючи у рівняннях значення  $\mu = 2$  (теорія

Біркгофа-Луміса-Серебрякова) і  $\mu(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{-4 \ln \sigma}}$ .

Табл. 1 показує, що значення параметра  $\mu > 2$ .

Таблиця 1

$\sigma$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1
$\mu$	3,331	2,887	2,617	2,419	2,261

Але як впливає значення цього параметру на форму каверни можна сказати лише на основі результатів чисельних розрахунків. На рис.1 показані радіуси двох впливаючих каверн при  $Fr = 10$  і числах кавітації  $\sigma = 0.04$  і  $\sigma = 0.1$ , розрахованих при значенні  $\mu = 2$  і при значенні

$$\mu = \mu(\sigma) = \frac{\sigma}{\sqrt{-4 \ln \sigma}}.$$

Добре видно, що чим більше число кавітації, тим різниця менша. Вона особливо мала в домідельній частині каверни. Різниця стає більш істотною в післямідельній частині каверни. Але для наближених розрахунків значення  $\mu = 2$  цілком допустиме, хоча, маючи

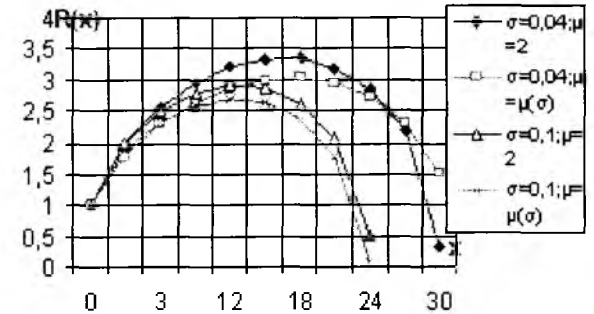
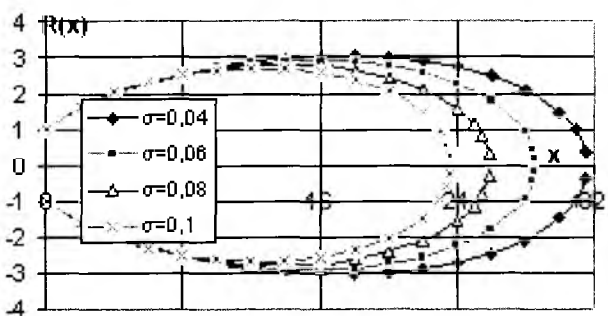


Рис.1. Вплив параметра  $\mu$  при  $Fr=10$

MathCAD, це зовсім не обов'язково.

Як видно з формул для параметрів каверни при впливанні, вона існує для всіх тих чисел  $\sigma, Fr$ , за яких  $S(\sigma, Fr, x) > 0$ . На рис.2 показані форми поздовжніх перетинів впливаючої каверни при різних значеннях чисел кавітації і  $Fr = 10$ . Добре видно, що у впливаючих каверн кормова частина завжди округла і мідель таких каверн зміщений до корми. Як і у осесиметричних каверн довжина впливаючих каверн тим більша, чим менше число кавітації. Не так стоїть справа



при зануренні. В цьому процесі може існувати гранична каверна за умови

Рис.2. Каверни при впливанні ( $Fr=10$ )

$\frac{c(\sigma)}{\sigma^2 Fr^2} = \frac{3}{4}$ , проте вона дуже не стійка: незначне зменшення числа Фруда може привести до зникнення каверни. На рис.3 показана гранична каверна в течії з чис-

лом кавітації  $\sigma = 0,06$  (при  $Fr = 39,918$ ). Вона замикається на таке ж тіло, як сам кавітатор (схема Рябушинського), але уже при  $Fr > 39,918$  вона не існує, перетворившись на незамкнену порожнину, якій нема фізичного тлумачення. Зате при  $Fr \geq 40$  вона існує. І хоча вона замикається теж як і каверна Рябушинського, але у неї існує також точка, в якій  $R(x) = 0$ . Тобто при всіх значеннях параметрів течії  $\sigma, Fr$  за умови, що  $\frac{c(\sigma)}{\sigma^2 Fr^2} < \frac{3}{4}$ , каверна при зануренні існує для всіх тих значень  $x$ , для яких  $S(\sigma, Fr, x) > 0$ .

Складову числа кавітації від сили в'язкості

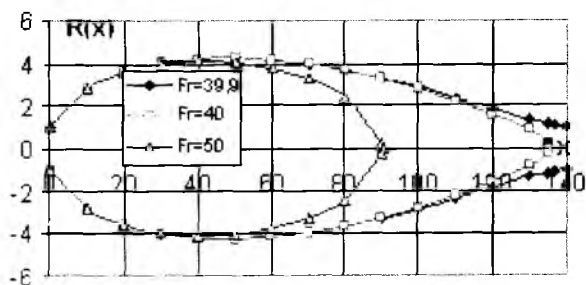


Рис.3. Каверни при зануренні ( $\sigma=0,06$ )

$$f(\sigma_0, Fr, x) = \frac{8}{Re} \cdot \frac{1}{R} \frac{dR}{dx} \quad (9)$$

наближено можна обчислити, прийнявши в якості радіуса вертикальної каверни радіус осесиметричної каверни:

$$f(\sigma_0, x) = \frac{8}{Re} \cdot \left( \frac{1 - \sigma_0 x / 2}{2 \left( 1 + x - \frac{\sigma_0 x^2}{4} \right)} \right) \quad (10)$$

Функцію (10) можна усереднити. Для цього можна поділити  $xk$  каверни, наприклад, на 4 частини і визначити середнє для каверни значення цієї функції  $\bar{f}(\sigma_0)$ . Проте можна також врахувати і дію поля сили тяжіння. Розрахунки функції (9) відображені на рис.4. На ньому показані графіки залежності функції  $10f(\sigma, Fr, x)$  від координати  $x$  в течії при  $\sigma = 0,06$  ( $Fr = 39,918, Fr = 50$  і  $Fr = 100$ ), а також в течії при  $\sigma = 0,04$ ,  $Fr = 60,815$  і  $Fr = 100$ . Як з рисунка, так і з формули (9), впливає важливий висновок. Оскільки до мі-

деля каверна розширюється, а величина  $f(\sigma, Fr) > 0$ , то врахування в'язкості веде до збільшення фактичного числа кавітації і, отже, до зменшення радіуса міделя, а це означає, що наявність в'язких сил гальмує швидкості розширення каверни. В замідельній частині каверни  $f(\sigma, Fr) < 0$ , це веде

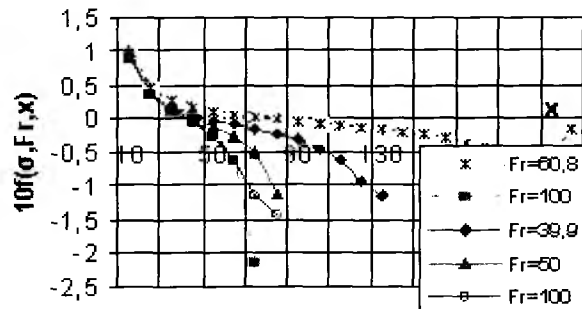


Рис.4. «В'язкий» член числа кавітації

до зменшення фактичного числа кавітації, а відтак до збільшення внутрішнього тиску і, отже, знову ж таки до гальмування процесу стиску каверни в її замідельній частині. Інакше кажучи, в'язкість стримує як розширення каверни, так і її стискання. Рис.4 показує, що обчислення "в'язкої" частини числа кавітації за формулою (10) не враховує суттєвий перерозподіл цього числа вздовж каверни. Якщо в домідельній частині його поведінка слабо залежить від параметрів течії, то в її замідельній частині ця залежність суттєва.

Поверхневий натяг дає сталу за знаком складову числа кавітації  $\frac{8}{WeR}$ , вона завжди додатна і тому сили поверхневого натягу *перешкоджають розширенню* каверни (в домідельній частині) і *пришвидчують її стискання* (в замідельній частині). Оскільки в знаменнику стоїть радіус каверни, то зрозуміло, що на початку і в кінці каверни вплив поверхневого натягу значно більший, ніж в її середній частині. Тому при обчисленні глобального впливу поверхневого натягу на каверну доцільно усереднити значення радіусу, наприклад, величиною  $R_c = \frac{2R(0,25) + R_k}{3}$ . Так для ка-

верни при  $\sigma = 0,06$ ;  $Fr = 40$  значення  $R_k = 4,659$ , а "середнє" значення

$$R_c = \frac{R\left(2\frac{x_l}{10}\right) + R_k + R\left(8\frac{x_l}{10}\right)}{3} = 3,953. \text{ Так що}$$

"капілярним" членом числа кавітації при самому оптимістичному прогнозі може

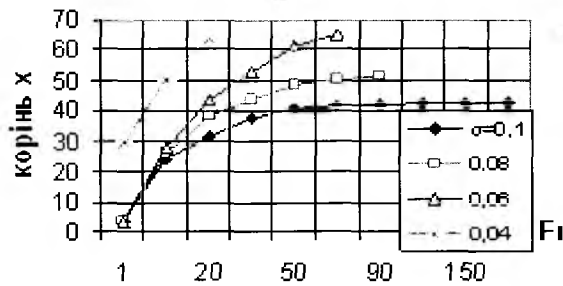


Рис.5. Корені рівняння  $R(\sigma, Fr, x) = 0$

бути величина  $\frac{8}{WeR} = \frac{8}{We \cdot 3,953} = \frac{2,024}{We}$ .

Але враховуючи, що для води при каверностворюючих швидкостях  $We > 100$ , можна твердити, що вплив капілярних сил на суперкаверни зовсім незначний.

На останок відмітимо, що довжини каверни, як правило, не збігається з коренем рівняння  $R(\sigma, Fr, x) = 0$ , корінь цього рівняння завжди більший за довжину. Це пояснюється тим, що даний розв'язок підпорядкований схемі обтікання Рябушинського. Тому можна вважати, що за замикачем каверни є ще деякий каверноподібний простір. На рис.5 показані залежності коренів рівняння  $R(\sigma, Fr, x) = 0$  для випадку впливання каверни в течіях при числах кавітації  $\sigma = 0,04 \div 0,1$  і різних числах Фруда. Праві кінці кривих обриваються на тих значеннях числа Фруда, при яких площа перетину каверни стає від'ємною, а, отже, рівняння  $R(\sigma, Fr, x) = 0$  дійсних коренів не має.

### Список літератури

1. Логвинович Г.В. Гидродинамика течений со свободными границами. – К.: Наук. думка, 1969. - 208 с.
2. Буйвол В.Н. Тонкие каверны в течениях с возмущениями. – К.: Наукова думка, 1980. - 296 с.
3. Серебряков В.В. К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке. В сб. "Математические методы исследования гидродинами-

ческих течений". – К.: Наук. думка, 1978. - С. 58 - 62.

4. Нестерук И.Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, № 6, 1979. - С. 133 - 136.

5. Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. - 946 с.

6. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы, каверны. – М.: Мир, 1964. - 466 с.

7. Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф., Кавитация. – М.: Мир, 1976. – 688 с.

8. Nesteruk I. Influence the Flow Unsteadiness compressibility and Capillarity on Long Axi symmetric Cavities, Fifth Internat. Symposium on Cavitation, CAV 03-GS-6-004, Osaka, Japan, Nov. 1-4, 2003.