УДК 519:512.972

Філімонова О.Ю., канд. техн. наук

ПОРІВНЯЛЬНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕНЗОРНИХ МОДЕЛЕЙ ІНТЕРВАЛІВ

Київський національний університет будівництва та архітектури

Розглядаються питання моделювання невизначеності на підставі представлення числового інтервалу у вигляді тензорів парних рангів. Показано, що тензорна модель інтервалу, створена на використанні кордонів інтервалу $a=[a^{max}, a^{min}]$, практично еквівалентна моделі, створеній на використанні проміжних значень інтервалу (середнього значення, довжини і т.ін.). Наведені числові приклади, що ілюструють ефективність моделей.

Прийняття рішень за умов невизначеності є головною характерною рисою проблеми управління у міському господарстві. Розповсюдженими формами моделювання невизначеності є інтервали та нечіткі множини. В роботі [1] розглянуті питання представлення числового інтервалу у вигляді тензора 2-ранга. Показано, що тензорна модель інтервалу дозволяє поліпшити конструктивність результатів. Наведені приклади, які ілюструють ефективність запропонованих алгоритмів. Існує думка, що отримання додаткової інформації $a^j \in [a^{max}, a^{min}]$, $j=1,2,\ldots$ дозволяє вплинути на якість прийняття рішення. В роботі наводяться результати експериментальних досліджень, які дозволяють оцінити вплив додаткової інформації.

Сучасний рівень досліджень. Як відомо, інтервал характеризують набором характеристик: *ширина* інтервалу A - величина $\omega(A)=\overline{a}-a$, *середина* $m(A)$ - напівсума кінців інтервалу A: $m(A)= =(a+\overline{a})/2$, *абсолютна величина* $|A|$ - $|A|=\max\{|a|,|\overline{a}|\}$, *мінімальна величина* $|A|$ - $\mu(A)=\min\{|\underline{a}|,|\overline{a}|\}$. Можна бачити, що $|A|\le|B|, \omega(A)\le\omega(B)$, коли $A\subset B$, причому $\omega(A)<\omega(B)$, якщо $A\subset B$, і $A\ne B$. *Відстань* $\rho(A,B)$ між елементами $A,B\in I(R)$ вводиться рівністю $\rho(A,B)=\max\{|a-b|,|\overline{a}-\overline{b}|\}$. Агрегувати всі або певну кількість характеристик інтервал у складі одного об'єкту дозволяє тензор, на що вперше звернув увагу Г.Крон [2]. В роботі [3] показано, що, на думку автора, тензорне числення є істинною мовою, в основі якої лежать інтуїтивні (візуальні) образи, які добре відомо навіть тим, хто ніколи не чув слів вектор чи тензор. „Природа разговаривает с нами языком тензоров" – ці рядки, що є епіграфом до роботи [3], на нашу думку, краще всього показують значення тензорного числення.

Показано [1], що тензор $T=[t_{ij}]$, $i,j=1,2$, що відповідає інтервалу A і агрегує харак-теристики інтервалу, може бути визначений як такий, що має компоненти: $t_{11}=\mu(A), t_{12}=\omega(A), t_{21}=m(A)$, $t_{22}=|A|$, тобто $T_a=\begin{pmatrix}\mu(A) & \varpi(A)\\ m(A) & |A|\end{pmatrix}$. Якщо $\underline{a}>0$, $\overline{a}>0$, $\underline{a}<\overline{a}$ то $t_{11}=\mu(A)=\underline{a}$, $t_{22}=|A|=\overline{a}$.

Приклад. Нехай інтервал заданий у вигляді A=[3, 8], елементи тензора, що моделює інтервал, такі $t_{11}=\mu(A)=3$, $t_{21}=m(A)=5.5$, $t_{12}=\omega(A)=5$, $t_{22}=|A|=8$, тензор-інтервал (TI) - $T_A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5.5 & 7\end{pmatrix}$. Можливо це більш спростити задачу, якщо замість тензора T_a використовувати діагональний тензор, тобто $A\to T_a=\begin{pmatrix}\mu(A) & 0\\ 0 & |A|\end{pmatrix}$. Це дозволяє не тільки суттєво спростити задачі інтервального аналізу, але й отримати додаткові властивості, наприклад обернений тензор.

Постановка задачі. Можливість адекватного представлення тензора своїми інваріантами дає можливість оцінки властивостей тензора. Можна вважати, що якщо два тензори мають однакові або близькі інваріанти, то вони мають аналогічні властивості. Наприклад, співпадіння характеристичних поліномів в загальному випадку є необхідною умовою подібності тензорів, для тензорів 2-го рангу ця умова є також і достатньою. Найбільш розповсюдженими інваріантами є т.зв. сліди: $I = trT$, $II = tr(T^2)$, $III = tr(T^3)$. Через компоненти тензора вони можуть бути представлені як

$$I_1 = trT = \sum_{i=1}^{3} t_{ii},\ I_2 = \sum_{j=1}^{3} Co_j,\ I_3 = \det(T),$$

де $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$,

$$Co_1 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}, Co_2 = \begin{pmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}, Co_3 = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Якщо власні значення тензора відомі, то

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$
$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$$
$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

Зазначимо, що над тензорами виконуються алгебраїчні операції, над інваріантами – арифметичні.

Задача дослідження може бути сформульована як послідовність реалізації етапів:

1. Для заданого інтервалу $a=[a^{max}, a^{min}]$ формуються діагональні тензори:

$$T_a^{(1)} = \begin{pmatrix} a^{min} & 0 \\ 0 & a^{max} \end{pmatrix},\ T_a^{(2)} = \begin{pmatrix} a^{min} & 0 & 0 \\ 0 & a^{rand} & 0 \\ 0 & 0 & a^{max} \end{pmatrix},$$

де a^{rand} довільне обране число, $a^{rand} \in a$.

2. Обчислюють інваріанти для тензорів, створених в п.1^0.

3. Визначають близькість інваріантів тензорів з п.1^0.

На підставі принципів правдоподібних висновків визначається вплив обраних параметрів на близькість результатів.

Результати експериментальних досліджень. (1) Для інтервалу $a=[a1\ a2]$ були створені тензори – діагональний плоский тензор $a \to ta = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ та діагональний плоский тензор, утворений з тензора, компоненти котрого випадкові числа в інтервалі $a - \begin{pmatrix} 6.76 & 5.17 \\ 6.10 & 6.89 \end{pmatrix}$,

$a \to ta = \begin{pmatrix} 6.76 & 0 \\ 0 & 6.89 \end{pmatrix}$ (рис.1 та рис. 2).

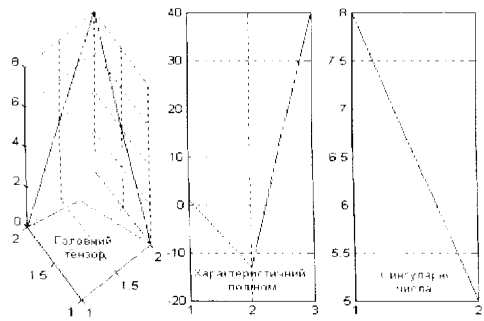

Рис. 1. Представлення інтервалу $a=[a1\ a2]$, $a1=5$, $a2=8$ діагональним плоским тензором $a \to ta = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

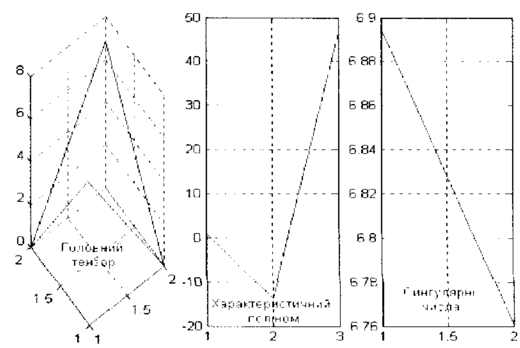

Рис. 2. Представлення інтервалу $a=[a1\ a2]$, $a1=5$, $a2=8$ діагональним плоским тензором, утвореним з тензора, компоненти котрого випадкові числа в інтервалі а; $a \to ta = \begin{pmatrix} 6.76 & 5.17 \\ 6.10 & 6.89 \end{pmatrix}$

(2) Представлення інтервалу $a=[a1\ asr\ a2]$, $a1=5$, $a2=8$, asr – середнє значення діагона-льним тензором 2-го рангу

$a \to ta = \begin{pmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0 \end{pmatrix}$, представлення інтервалу а діагональним тензором 2-го рангу, утвореним з тензора, компоненти котрого випадкові числа в інтервалі

$$a - \begin{pmatrix} 5.8193 & 6.8787 & 6.6106 \\ 5.1785 & 5.2669 & 5.8139 \\ 6.2272 & 6.4221 & 7.7270 \end{pmatrix},$$

$$a \to ta = \begin{pmatrix} 5.8193 & 0 & 0 \\ 0 & 5.2669 & 0 \\ 0 & 0 & 7.7270 \end{pmatrix} \text{- рис. 3 та рис. 4.}$$

На рис. 5 та 6 наведені результати обчислень похибки у визначенні 1-го та 3-го інваріантів та норм матриць тензорів, що моделюють інтервал, розрахункові формули:

$$\begin{cases} \text{delta} = \text{abs}(\text{tr}_1 - \text{tr}_2)/\max(\text{tr}), \\ \text{delta}_1 = \text{abs}(\text{d}_1 - \text{d}_2)/\max(\text{d}), \\ \text{delta}_2 = \text{abs}(\text{n}_1 - \text{n}_2)/\max(\text{n}), \end{cases}$$

де (tr_1, tr_2), $(d_1\text{-}d_2)$, $(n_1\text{-}n_2)$ – перший, третій інваріанти та норми тензорів, що моделюють інтервал; $max(tr)$, $max(d)$, $max(n)$ – максимальні значення відповідних величин.

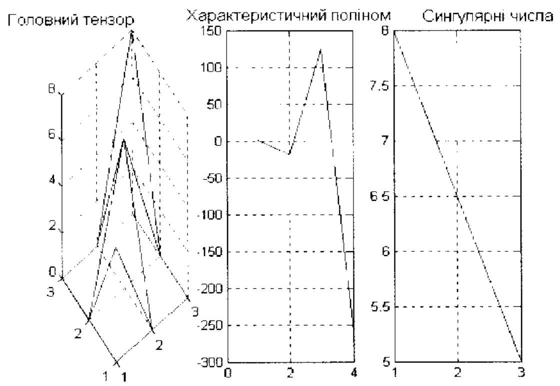

Рис. 3. Представлення інтервалу a=*[a1 asr a2]*, *a1=5*, *a2=8*, *asr* – середнє значення; діаго-нальним тензором 2-го рангу,

$$a \to ta = \begin{pmatrix} 5.0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.5 & 0 \\ 0 & 0 & 8.0 \end{pmatrix}$$

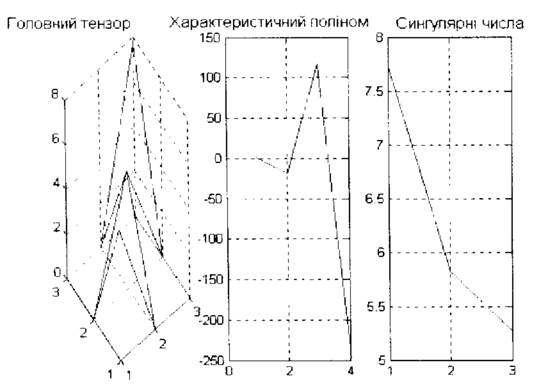

Рис. 4. Представлення інтервалу $a=[a1\ a2]$, $a1=5$, $a2=8$ діагональним тензором 2-го рангу, утвореним з тензора, компоненти котрого випадкові числа в інтервалі a;

$$a \to ta = \begin{pmatrix} 5.8193 & 6.8787 & 6.6106 \\ 5.1785 & 5.2669 & 5.8139 \\ 6.2272 & 6.4221 & 7.7270 \end{pmatrix}.$$

Висновки, які випливають з наведених результатів, полягають в такому: перші інваріанти (сліди) альтернативних моделей різняться на величину, що менше 10 %, норми – менше 15, треті інваріанти (детермінанти) – менше 25 %. Враховуючи, що основний результат інтервальної арифметики полягає у визначенні включення розрахункового інтервалу у заданий [4, 5], отримані результати можна вважати такими, що підтверджують прийняту парадигму відносно доцільності і раціональності моделювання числових інтервалі тензорами 2-го рангу.

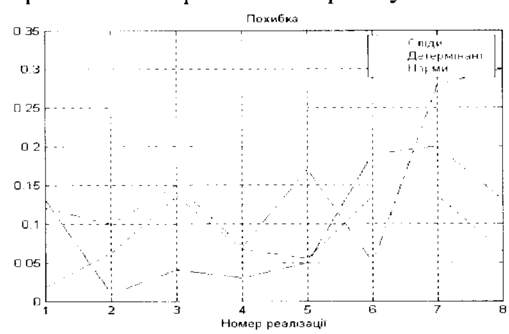

Рис. 5. Залежність інваріантів плоских тензорів типу а) та b) від номера реалізації (плоский тензор)

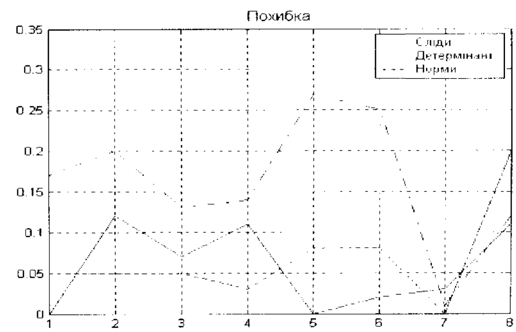

Рис. 6. Залежність інваріантів тензорів 2-го типу а) та b) від номера реалізації (тензор 2-го рангу)

Зазначимо, що при виконанні експериментів інтервали з випадковими компонентами $a^{rand} = [a^{rand}_{\min}, a^{rand}_{\max}]$ і початковий розрахунковий інтервал $a = [a^{\min}, a^{\max}]$ пов′язані умовою включення ${}^{(j)}a^{rand} \subseteq a(\forall j)$, j – номер реалізації; кількість реалізацій сягала 10÷100, на рис. 5 та 6 наведені лише 8 реалізацій, що викликано потребою наочності графіків.

Подальший розвиток досліджень. В роботе [6] запропоновано новий підхід до розв′язку задач аналізу та обробки нечіткої (неточної) інформації за допомогою т.зв. *м'яких* множин (ММ), під якими розуміється таке. Як відомо, наближені описи можуть застосо-вуватися не тільки для визначення наближених розв'язків у деякій задачі, але їх можна використовувать для будь-яких елементів моделі, головним тут є примат зручності і корисності. Тому для назви наближених описів приближенных описів було введено термін "м'яка множина" (*soft set*). Формальне визначення (ММ) таке.

Хай A – деяка множина параметрів, котра може мати довільну природу (числа, функції, набори слів і т.ін.), X - деяка універсальна множина, над якою визначається м'яка множина. Пару (S, A) звуть м'якою множиною над X, якщо S є відображенням з множини A у множину підмножин множини X, тобто S: A $A \to 2^X$. Фактично ММ пред-ставляє собою параметризовану родину підмножин. Оскільки ММ розуміється як наближений опис об'єкту, то вона неминуче є залежною від того, хто формулює розуміння наближеності, тобто вибір того чи іншого способу наближеного опису залежить від того, хто цей опис робить, а вибір параметризації явно характеризує суб'єктивізм ММ.

Побудова і розвиток математичних теорій, які працюють з подібними об'єктами, є достатньо актуальною задачею. Визначається [6], що на даний час у математиці подібних теорій не так багато, це, зокрема, різні варіанти теорії імовірностей, теорія нечітких множин, інтервальний аналіз, теорія хаосу. Відмітимо, що пропонується поняття м'якої імовірності визначати не аксиоматично, а без посередньо через вимір, базою для вимірів слугує кінцева база даних.

Слід зробити певні зауваження відносно запропонованої теорії ММ. По-перше, не-можливо не визнати її прямий зв'язок з теорією нечітких множин, яка практично є основою ММ. По-друге, виміри є тим первинним елементом, на якому повинні базуватися теорії. Отже, трактування вимірів (бажано з мінімальним або контрольованим (параметризованим суб'єктивізмом) повинно бути покладене у основу теорії. У теорії ММ недостатньо враховується той факт, що результатом вимірів є деяка множина, яка представляється у вигляді таблиці. Але, як відомо, природа, в т.ч. і природа вимірів, спілкується з дослідником мовою тензорів. Саме ця обставина - тензорний характер природи вимірів - повинен бути покладений в основу нових теорій.

Висновки

1. Розглянуті питання представлення числового інтервалу у вигляді тензора 2-ранга. Показано, що тензорна модель інтервалу дозволяє поліпшити конструктивність результатів. Наведені приклади, які ілюструють ефективність запропонованих алгоритмів.

2. Показано, що тензорна модель інтервалу, створена шляхом використання кордонів інтервалу $a = [a^{\max}, a^{\min}]$, і модель, створена на використанні проміжних значень інтервалу (середнього значення, довжини, випадкової величини і т.ін.) є практично еквівалентними. Наведені числові приклади, що ілюструють ефективність моделей.

Список літератури

1. *Філімонова О.Ю., Мінаєв Ю.М.* Тензорні характеристики числових інтервалів (структуровані інтервали). – Містобудування та теориторіальне планування. – Наук.-техн. зб. // КНУБА, Вип. 26, 2007. – С. 317 – 333.

2. *Крон Г.* Тензорный анализ сетей. – М.: Сов. радио. – 1978. – 720 с.

3. *Жилин П.А.* Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. С.-Петербург: изд-во СПбГТУ, 2002. – 275 с.

4. *Алефельд Г. Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. – М.: Мир, 1987. – 360 с.

5. *Добронец Б.С.* Интервальная математика. Учеб. пособие // Краснояр. гос. ун-т: Красноярск, 2004. – 216 с.

6. *Молодцов Д.А.* Теория мягких множеств. – М.: Изд-во УРСС, 2004. – 360 с.