

УДК 004.92

Романюк О. Н., канд. техн. наук

ЕФЕКТИВНА МОДЕЛЬ ДЛЯ ВІДТВОРЕННЯ СПЕКУЛЯРНОЇ СКЛАДОВОЇ КОЛЬОРУ

Вінницький національний технічний університет

Запропоновано нову модель дистрибутивної функції відбивної здатності поверхні, використання якої для зафарбовування тривимірних зображень дозволяє реалістично відтворити відблиск. Модель характеризується простотою апаратної реалізації.

Вступ

Вимоги до продуктивності графічних систем неухильно зростають у зв'язку з необхідністю вирішувати все більш складні й обчислювальноємкі задачі формування реалістичних зображень у реальному часі.

Найбільш складні та трудомісткі обчислення на етапі рендерингу мають місце при зафарбовуванні тривимірних графічних об'єктів, у яких ефект об'ємності створюється за рахунок градації кольору складових точок сцени.

При зафарбовуванні для всіх точок поверхонь визначають координати, а також їх інтенсивності кольору, що потребує при зафарбовуванні великих витрат часу. Особливо це має місце при використанні складних моделей освітлення, зокрема тих, які відтворюють не тільки дифузну, але й спекулярну складову кольору.

У зв'язку із цим питання підвищення продуктивності зафарбовування в системах комп'ютерної графіки є надзвичайно актуальними. Вирішення цих питань дає можливість організувати ефективний інтерактивний канал та забезпечити необхідний реалізм і динаміку тривимірних графічних зображень.

Аналіз методів і постановка задачі

При зафарбовуванні тривимірних сцен за методом Фонга [1-3] інтенсивність спекулярної складової кольору точок визначають за формулою:

$$I = I_s k_s \cos^n \gamma,$$

де I_s - інтенсивність направленої джерел світла, k_s - коефіцієнт дзеркального світла, n - коефіцієнт яскравості поверхні, $\cos^n \gamma$ - дистрибутивна функція (*BRDF* – *Bidirectional Reflectance Distribution Function*), яка відповідає за оптичні характеристики поверхні.

При зафарбовуванні поверхонь за методом Фонга найбільш трудомістким є обчислення функції $\cos^n \gamma$, яка використовується в моделях освітлення Бліна та Фонга [1, 2]. Слід відмітити, що n змінюється в діапазоні від 0 до 1000.

При розробці *BRDF* слід урахувати, що найбільш жорсткі вимоги до точності пред'являються при відображенні епіцентру відблиску [4, 5, 8]. Для периферійних ділянок, які характеризують затухання інтенсивності світла до мінімального значення, необхідно забезпечити монотонність зміни інтенсивності кольору, яка виключає появу артефактів [6, 7].

При цьому, вимог до точності визначення інтенсивності кольору, як правило, не пред'являють [4,8].

У методі [9], якій запропонував Р.Ф. Ліон, функцію $\cos^n \gamma$ розкладають у ряд Тейлора та замість кута γ між відбитим напрямком світла та спостерігачем використовують довжину хорди між значеними векторами.

Заміна кута на довжину хорди не сильно позначається на точності розрахунків тільки для невеликих значень кутів, а використання обмеженої кількості членів ряду Тейлора не дозволяє з доста-

тною точністю апроксимувати функцію $\cos^n \gamma$.

Достатньо високу точність апроксимації досягнуто за рахунок апроксимації функції $\cos^n \lambda$ функцією $\cos^k(\sqrt{n/k} \cdot \gamma)$ [10], де $k = 2, 4, 8, \dots$ і вибирається залежно від діапазону n ($k \ll n$). На жаль, для такого підходу необхідно визначити кут λ , що передбачає використання трудомісткої функції \arccos .

К. Шлік [8] запропонував апроксимувати функцію $\cos^n \gamma$ функцією $\cos \gamma / (n - n \cos \gamma + \cos \gamma)$. Аналіз показав, що такий підхід забезпечує задовільну якість відображення тільки для епіцентру відблиску та малопритатний для апаратної реалізації.

У роботі [11] запропоновано апроксимувати функцію $\cos^n \gamma$ поліномом другої степені

$$\cos^n \gamma = a \cdot \cos^2 \gamma + b \cdot \cos \gamma + c.$$

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a, b, c використовують значення $\cos^n \gamma$ в початковій і кінцевій точках, а також у точці перегину. Показано, що $b = 1 - a, c = 0$.

При апаратній реалізації старший коефіцієнт a зберігається в пам'яті для кожного значення n , а решта два знаходяться за простими формулами. Запропонований підхід дозволяє достатньо точно (із відносною похибкою не більше 4,5 %) апроксимувати епіцентр відблиску. На жаль, із-за різкого спадання функції при $\gamma \rightarrow 0$ блюмінг відблиску має різко виражені межі, що характерно тільки для деяких матеріалів.

Більш високу точність апроксимації BRDF було досягнуто при використанні поліному третьої степені [12]. Для знаходження невідомих коефіцієнтів використано значення функцій у точках мінімуму та максимуму, а також $\cos^n \gamma = 0,5$.

При апроксимації BRDF поліномом третьої степені для епіцентру відблиску досягнуто відносну похибку 0,67 % [12]. На жаль, при використанні поліному

третьої степені для формування блюмінгу не забезпечується прийнятна реалістичність. Тому для формування спекулярної складової в зоні затухання відблиску використано другу функцію $g(\gamma) = \frac{\cos(\gamma)}{a - b \cos(\gamma)}$, де невідомі коефіцієнти знайдено, порівнявши значення функції $g(\gamma)$ і $\cos^n(\gamma)$ у точці $\gamma = \arccos(\sqrt[3]{0.5})$, а також їх похідних у цій точці. Такий підхід, хоча й забезпечив прийнятну точність, але малопритатний для апаратної реалізації.

У роботі [13] розглянуто питання апаратної реалізації BRDF для її еквівалентної форми $\cos^n \gamma = 2^{n \cdot \log_2(\cos \gamma)}$.

Недолік підходу полягає в незадовільній якості формування зони затухання відблиску та використання при апаратній реалізації кількох блоків постійної пам'яті відносно великого обсягу.

За останні роки прийнятною альтернативною моделі дистрибутивної функції відбивної здатності поверхні, яка забезпечувала б реалістичне відтворення епіцентру відблиску та блюмінга, і мала просту апаратну реалізацію, знайдено не було.

Мета статті – розробка та дослідження простої в обчисленні та апаратній реалізації дистрибутивної функції відбивної здатності поверхні.

Розробка альтернативної моделі дистрибутивної функції відбивної здатності поверхні

Розглянемо апроксимацію дистрибутивної функції $\cos^n \gamma$ функцією

$$W(\gamma, n) = \left(\frac{A}{B} (\cos \gamma - 1) + 1 \right)^2,$$

за умови, що $0 \leq \gamma \leq \pi/2$.

Вибір такої функції обумовлено наступним:

- а) для обох функцій у якості твірної використовується функція косинуса;
- б) при $\gamma = 0$

$$\cos^n \gamma = \left(\frac{A}{B} (\cos \gamma - 1) + 1 \right)^2 = 1,$$

що відповідає граничній умові;

в) обидві функції при $0 \leq \gamma \leq \pi/2$ є додатніми;

г) функція $\left(\frac{A}{B}(\cos \gamma - 1) + 1\right)^2$ досягає нульового значення, що є передумовою формування бльюмінга;

д) коефіцієнти A і B дають можливість зміни розміру відблиску.

Розкладемо функцію $\cos^n \gamma$ у ряд Тейлора і обмежимося двома членами

$$\cos^n \gamma \approx 1 - \frac{1}{2} n \cdot \gamma^2.$$

Розклад $\left(\frac{A}{B}(\cos \gamma - 1) + 1\right)^2$ у ряд

Тейлора з двома членами має такий вигляд:

$$\left(\frac{A}{B}(\cos \gamma - 1) + 1\right)^2 \approx 1 - \frac{A}{B} n \cdot \gamma^2.$$

Знайдемо невідомі A і B . Для цього прирівняємо праві частини отриманих виразів. Знаходимо, що $A = 1$, $B = 2$.

Таким чином,

$$\cos^n \gamma \approx \left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right)^2.$$

Графіки функцій

$\cos^n \gamma$, $\left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right)^2$ і функції Шліка

для $n = 100$ наведено на рис. 1.

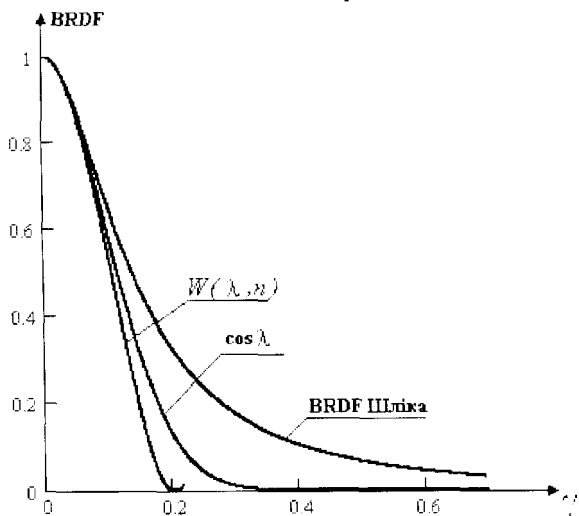


Рис. 1. Графіки $BRDF$

Із графіка видно, що запропонована $BRDF$ достатньо точно відтворює епіцентр відблиску (від максимального

значення до точки перегіну), після точки перегіну монотонно падає до нульового рівня. Це відповідає стратегії формування спекулярної складової кольору.

Функція $W(x, n)$ прийматиме нульове значення при $\cos(x) = \frac{n-2}{n}$. Покажемо, що в цьому випадку $BRDF$ досягає свого мінімального значення.

Знайдемо похідну від функції $W(x, n)$ і прирівняємо її до нуля.

$$W'_x(x, n) = -\left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right) \cdot n \cdot \sin x = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо вирази для визначення екстремумів $BRDF$

$$n \cdot \sin x = 0, \quad -\left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right) = 0.$$

З останнього виразу знаходимо, що $\cos \gamma = \frac{n-2}{n}$. Аналіз знаків $W(x, n)$ зліва та справа від цієї точки показує, що $BRDF$ досягає мінімального значення. Аналогічно можна показати, що при $x = 0$ дистрибутивна функція має максимальне значення.

Покажемо, що функція $W(x, n)$ на проміжку $0, \arccos \frac{n-2}{n}$ монотонно спадає. Похідна від функції $W(x, n)$ по x дорівнює

$$-\left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right) \cdot n \cdot \sin \gamma.$$

На проміжку від 0 до π добуток $n \cdot \sin \gamma$ додатний, а тому не впливає на знак наведеного виразу.

Нерівність $-\left(\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right) \leq 0$ має

місце для всіх $0 \leq \gamma \leq \arccos \frac{n-2}{n}$. Це відповідає проміжку зміни $BRDF$ від 1 до мінімального (нульового значення).

Достатньою умовою спадання функції є від'ємність її похідної всередині інтервалу, що й було доведено.

Проведемо порівняння отриманої функції з $BRDF$ Шліка [8], яка широко

поширена в програмних засобах тривимірної графіки.

На рис. 2 наведено графік зміни відносної похибки апроксимації функції $\cos^n \gamma$ функцією $W(\gamma, n)$ для епіцентру відблиску. Із графіка видно, що порівняно з $BRDF$ Шліка досягнуто суттєве підвищення точності відтворення епіцентру відблиску.

Для запропонованої функції в точці перегіну функції $\cos^n \gamma$ відносна похибка апроксимації не перевищує 7,2 % у той час, як для $BRDF$ Шліка це значення складатиме майже 10 %. Для об'єктів із $n \leq 8$ відносна похибка апроксимації значно менша порівняно з використанням функції Шліка.

Для розрахунку $BRDF$ Шліка необхідно виконати операцію множення, ділення, віднімання та додавання.

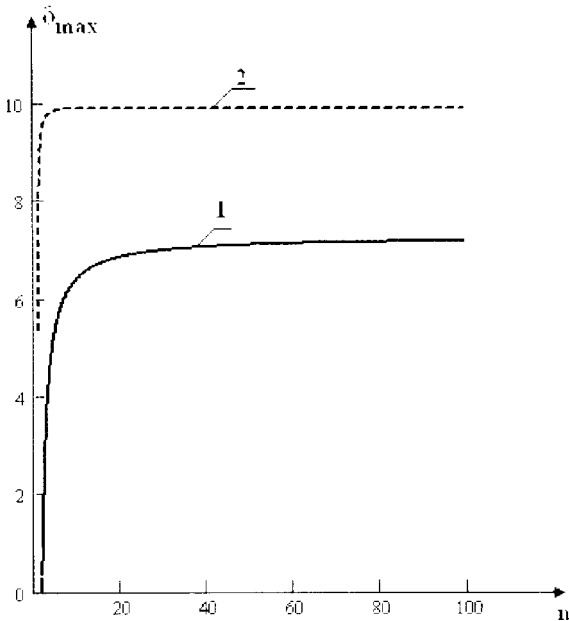


Рис. 2. Графіки максимальних відносних похибок для епіцентру відблиску при апроксимації $BRDF$: 1 - функцією $W(\gamma, n)$;

2 - функцією Шліка

При використанні запропонованої дистрибутивної функції трудомістку операцію ділення взагалі виключено з обчислювального процесу. Необхідно виконати тільки дві операції множення, операцію зсуву, інкрементування та декрементування. Три останні мікрооперації легко виконати апаратно, причому зсув можна реалізувати монтажним шляхом.

Звідси можна зробити висновок про зменшення обчислювальної складності при розрахунку функції $W(x, n)$ порівняно з $BRDF$ Шліка.

Склад і кількість операцій для обчислення функції $W(x, n)$ дозволяє її легко реалізувати апаратно, у той час, як наявність операції ділення для обчислення функції Шліка обмежує її апаратну реалізацію.

Розглянемо особливості формування зони затухання відблиску - блюмінга. Прийmemo за порогове значення нуля величину 2^{-q} , де q вибирають залежно від необхідної точності визначення спекулярної складової.

Тоді $\cos^n \gamma$ доцільно обчислювати на такому проміжку: $12^{-q} \leq \cos^n \gamma \leq 1$.

$$\text{Звідси } 0 \leq \gamma \leq \arccos \left(2^{\left(\frac{-q}{n} \right)} \right).$$

Для функції Шліка

$$0 \leq \frac{\cos^n \gamma}{n - n \cdot \cos^n \gamma + \cos^n \gamma} \leq 2^{-q}.$$

Звідси знаходимо, що розрахунок $BRDF$ Шліка доцільно на проміжку

$$0 \leq \gamma \leq \arccos \frac{n}{2^q + n - 1}.$$

Визначимо інтервал зміни аргументи для запропонованої $BRDF$

$$0 \leq \left(\frac{n}{2} (\cos \gamma - 1) + 1 \right)^2 \leq 2^{-q}.$$

Знаходимо, що

$$0 \leq \gamma \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n \cdot 2^{\frac{q}{2}}}.$$

$$\text{Оскільки } 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n \cdot 2^{\frac{q}{2}}} \leq 2^{\left(\frac{-q}{n} \right)} \leq \frac{n}{2^q + n - 1},$$

то крива Шліка лежить вище кривої $\cos^n \gamma$, а крива $\left(\frac{n}{2} (\cos \gamma - 1) + 1 \right)^2$ - нижче (див. рис. 1).

Суттєвим недоліком $BRDF$ Шліка є те, що дистрибутивна функція в зоні формування блюмінга падає до нульового

рівня надзвичайно повільно (див. рис. 1), що обумовлює неприродне освітлення графічного об'єкта та додаткові обчислення за рахунок збільшення інтервалу зміни аргументу.

Знайдемо відношення \mathfrak{R} , яке визначає, у скільки разів відрізняються аргументи у функції $\cos^n \gamma$ і запропонованої $BRDF$, при яких вони досягають рівня 2^{-q} . Порівняємо його й для випадку використання функції Шліка.

Зрозуміло, що відношення \mathfrak{R} визначає співвідношення розмірів світлового плями для різних дистрибутивних функцій.

Для функцій $\cos^n \gamma$ і $W(x, n)$

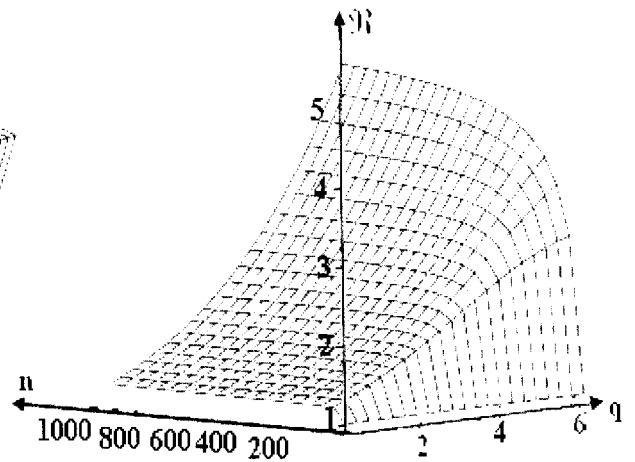
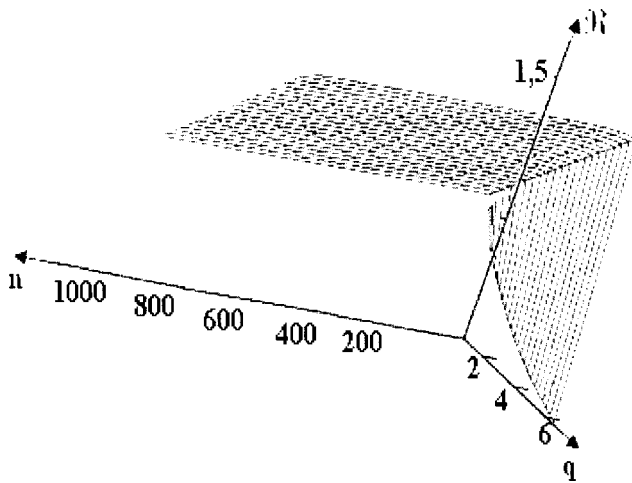


Рис.3. Графіки зміни \mathfrak{R} для: а) $\cos^n \gamma$ і $W(x, n)$; б) $\cos^n \gamma$ і $BRDF$ Шліка

Важливим питанням при використанні отриманої $BRDF$ є обнулення її значень за точкою, яка відповідає нульовому рівню. Це достатньо легко виконати апаратно.

Шляхом скалярного добутку двох нормалізованих векторів легко отримати $\cos \gamma$. Для кожного значення n у блоці постійної пам'яті достатньо зберігати граничне значення косинуса, зі значення якого розрахунок спекулярної складової припиняють (обнуляють спекулярну складову).

При формуванні блюмінгу важливим параметром є радіус кривизни $BRDF$ у зоні затухання. Цей параметр визначає, наскільки різким є контур відблиску.

Знайдемо другу похідну W по x

$$\mathfrak{R} = \frac{\arccos\left(2\left(\frac{q}{n}\right)\right)}{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n \cdot 2^q}}$$

Для функцій Шліка і $\cos^n \gamma$

$$\mathfrak{R} = \frac{\arccos\left(\frac{n}{2^q + n - 1}\right)}{\arccos\left(2\left(\frac{q}{n}\right)\right)}$$

Зі наведених на рис. 3 графіків видно, що при використанні запропонованої $BRDF$ блюмінг розраховується на значно меншому проміжку порівняно з функцією Шліка.

$$W_x'' = \frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sin^2 \gamma - n \cdot \cos \gamma \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (\cos \gamma - 1) + 1\right)$$

Радіус кривизни дорівнює

$$r = \frac{\left(1 + (W_x')^2\right)^{\frac{3}{2}}}{|W_x''|} = \frac{\left(1 + \left(-\frac{n}{2}(\cos \gamma - 1) + 1\right) \cdot n \cdot \sin \gamma\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{1}{2} \cdot n^2 \cdot \sin^2 \gamma - n \cdot \cos \gamma \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot n \cdot (\cos \gamma - 1) + 1\right)\right|}$$

Підставляючи в отриману формулу замість γ значення $\arccos\left(\frac{n-2}{n}\right)$ і викона-

вши тотожні перетворення, отримуємо, що

$$r = \frac{1}{2 \cdot n - 2}.$$

З останнього виразу видно, що r зменшується зі збільшенням n , що характерно і для класичної дистрибутивної функції.

На рис. 4 наведено графічний об'єкт, сформований із використанням запропонованої *BRDF*.



Рис.4. Приклад формування тривимірного графічного об'єкта з використанням розробленої *BRDF*

У комп'ютерній графіці візуальна відмінність між двома зображеннями найбільш часто оцінюється за нормованою середньоквадратичною похибкою (*NMSE*) [14], яка розраховується за формулою:

$$NMSE = \frac{\sum_i (R_1(i) - R_2(i))^2 + (G_1(i) - G_2(i))^2 + (B_1(i) - B_2(i))^2}{\sum_i R_1(i)^2 + G_1(i)^2 + B_1(i)^2},$$

де i - кількість пікселів, з яких складається об'єкт; $R_1(i)$, $G_1(i)$, $B_1(i)$ - інтенсивності кольору червоної, зеленої та синьої складової кольору i -го піксела об'єкта, для зафарбовування якого використано базовий метод;

$R_2(i)$, $G_2(i)$, $B_2(i)$ - інтенсивності кольору червоної, зеленої та синьої складової кольору i -го піксела об'єкта, для зафарбовування якого використано метод, який тестується в даний момент часу.

Тестування з використанням фігур із різною щільністю полігональної мережі показало, що порівняно із класичною *BRDF* використання запропонованої дистрибутивної функції відбивної здатності поверхні не приводить до значень *NMSE*, які перевищують 0,0001. Це означає, що візуально зображення не відрізняються один від одного [15].

Висновки

Запропонована модель є простою в обчисленні та апаратній реалізації і може бути використана у високопродуктивних засобах комп'ютерної графіки.

Подальші дослідження стосуються розробки підходів до підвищення точності відтворення зон затухання відблиску.

Список літератури

1. Херн Д., Павлін Б. М. Комп'ютерна графіка и стандарт *OpenGL*. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 1168 с.
2. Роджерс Д. "Математические основы машинной графики". – М.: Мир, 2001. – 512 с.
3. Хилл Ф. *OpenGL*. Программирование компьютерной графики. Для профессионалов. Питер, 2002. – 1088 с.
4. Hast A., Barrera T., Bengtsson E. Fast Specular Highlights by modifying the Phong-Blinn Model // International Confer.