

Боровик А.В.,
Подладчиков В.Н., д-р техн.наук

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ФИЛЬТРА КАЛМАНА С КОРРЕЛИРОВАННЫМ ШУМОМ ИЗМЕРЕНИЙ

Образовательно-научный комплекс «Институт прикладного системного анализа»

Проведен анализ чувствительности оптимального фильтра Калмана к не учету корреляции шума измерения. Получены аналитические выражения для фактических ошибок фильтрации и величина смещения оценок. Приведено новое выражение для вычисления формирующего фильтра

Введение

Для анализа и прогнозирования временных рядов разработано множество методов и алгоритмов, в большинстве своем, основанных на использовании нескольких наиболее распространенных и математически завершенных методах, таких как: методы адаптивного прогнозирования, нейронные сети, различные авторегрессионные модели, *GARCH* -методы [1-6]. Основное ограничение этих методов в том, что они способны учитывать лишь «белый шум» исследуемых моделей временного ряда.

На практике (для финансовых временных рядов) актуальной является задача разработки методов прогнозирования, учитывающих нестационарность модели процесса и наличие шумов, отличных от «белого шума». Всем выше перечисленным условиям удовлетворяет оптимальный фильтр Калмана, построенный для линейных динамических систем с коррелированными шумами измерений. Реализация оптимального фильтра Калмана для систем с коррелированными шумами существенно более сложная, по сравнению с алгоритмами, построенными для моделей с «белым шумом», поэтому данный фильтр не получил должного применения в задачах моделирования и прогнозирования нестационарных временных рядов, в том числе и финансовых.

В работе исследуется чувствительность фильтра Калмана к не учету коррелированного шума измерения, т.е. в слу-

чае, когда в расчетной модели шум измерения белый, а в фактической модели этот шум коррелированный. При реализации оптимального фильтра Калмана для коррелированных шумов приведено новое уравнение формирующего фильтра значительно более простое в использовании для программной реализации алгоритма.

Оптимальный фильтр Калмана для коррелированных шумов

Рассмотрим фильтр Калмана для двух типов моделей: с непрерывным и дискретным временем [1].

Запишем модели состояния в виде

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)w(t), \quad (1)$$

где $w(t)$ - «белый шум» с нулевым средним и дисперсией:

$$\text{cov}\{w(t), w(\tau)\} = \psi_w(t)\delta_D(t - \tau),$$

а модель измерения в таком виде

$$z(t) = H(t)x(t) + v(t). \quad (2)$$

В данном случае предполагаем, что шум измерения коррелирован и в свою очередь образуется на выходе линейной динамической системы вида $\dot{v}(t) = A(t)v(t) + \zeta(t)$, на которую воздействует $\zeta(t)$ - «белый шум» с нулевым средним и дисперсией

$$\text{cov}\{\zeta(t), \zeta(\tau)\} = \psi_\zeta(t)\delta_D(t - \tau)$$

Математические ожидания шумов $w(t)$, $\zeta(t)$ и начального состояния вектора равны

$$E\{w(t)\} = E\{\zeta(t)\} = E\{V(t_0)\} = 0,$$

где $v(t_0)$ является случайной величиной с известной дисперсией $V_v(t_0)$, а математическое ожидание вектора X равно:

$$E\{x(t_0)\} = \mu_x(t_0).$$

Запишем другие начальные условия для нашей системы

$$\text{cov}\{w(t), \zeta(\tau)\} = 0, \quad \text{var}\{x(t_0)\} = V_x(t_0), \\ \text{cov}\{x(t_0), v(t)\} = 0 \text{ при } t \geq t_0.$$

$$\text{var}\{x(t_0)\} = Vv(t_0), \text{cov}\{x(t_0), \zeta(t)\} = 0, \text{ при } t \geq t_0.$$

Ставится задача оценивания состояния $x(t)$ на основании наблюдения $Z(t) = \{z(\tau), t_0 \leq \tau \leq t\}$, которое содержит коррелированный шум. Данный подход строится на преобразовании исходной задачи в связанную с ней задачу оценивания, которую будем решать с помощью стандартного алгоритма фильтрации Калмана для случая с «белым шумом» измерения. Введем наблюдение $z^*(t)$, которое получается из исходного преобразованием

$$z^*(t) = z(t) - A(t)z(t).$$

После подстановок значений $z(t)$ из уравнения нашей модели и некоторых преобразований получим

$$z^*(t) = H^*(t)x(t) + v^*(t),$$

где

$$H^*(t) = H(t) + H(t)F(t) - A(t)H(t),$$

$$v^*(t) = H(t)G(t)w(t) + \zeta(t).$$

Очевидно, что шум в преобразованном уравнении является белым с соответствующей ковариационной функцией.

В этом случае $z(t)$ можно полностью восстановить из $z^*(t)$ следующим уравнением

$$z(t) = \Phi_A(t, t_0)z(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi_A(t, \tau)z^*(\tau)d\tau.$$

Теперь можно ввести сам алгоритм фильтрации с помощью классической формулы фильтра Калмана

$$\hat{x}(t) = F(t)\hat{x}(t) + K(t)[z(t) -$$

$$A(t)z(t) - H^*(t)\hat{x}(t)], \quad (3)$$

где $K(t)$ - коэффициент усиления фильтра Калмана. Приведем алгоритм его вычисления

$$K(t) = [V_{xx}(t)H^{*T}(t) + G(t)\psi_w(t)G^T(t)H(t)] \times \\ [H(t)G(t)\psi_w(t)G^T(t)H^T(t) + \psi_\zeta(t)]^{-1},$$

где

$$H^*(t) = H(t) + H(t)F(t) - A(t)H(t).$$

Дисперсии ошибки вычисляются по формуле

$$P(t) = F(t)P(t) + P(t)F^T(t) + G(t)\psi_w(t)G^T(t) - \\ K(t)[H(t)G(t)\psi_w(t)G^T(t)H^T(t) + \psi_\zeta(t)]K^T(t).$$

В случае дискретной системы определим уравнение для модели состояния следующим образом

$$x(i+1) = \Phi(i+1, i)x(i) + \Gamma(i)w(i),$$

а модель измерения: $z(i) = H(i)x(i) + v(i)$, где $v(i)$ - коррелированный шум. Формирующий фильтр запишем в виде

$$v(i+1) = \Phi_A(i+1, i)v(i) + \zeta(i).$$

По аналогии с непрерывным случаем, зададим ряд начальных условий.

Математические ожидания шумов модели состояния $\zeta(i)$ и начального значения шума модели измерения равны нулю

$$E\{w(i)\} = E\{\zeta(i)\} = E\{v(i_0)\} = 0.$$

Кроме того,

$$E\{x(i_0)\} = \mu(i_0),$$

$$\text{cov}\{w(i), w(j)\} = V_w(i)\delta_K(i-j),$$

$$\text{cov}\{\zeta(i), \zeta(j)\} = V_\zeta(i)\delta_K(i-j),$$

$$\text{cov}\{w(i), \zeta(j)\} = 0$$

при

$$\text{var}\{x(i_0)\} = V_x(i_0),$$

$$\text{cov}\{x(i_0), v(j)\} = 0,$$

при $j \geq i_0$ и $\text{var}\{v(i_0)\} = V_v(i_0)$,

$\text{cov}\{x(i_0), \zeta(j)\} = 0$ при $j \geq i_0$.

Запишем уравнение алгоритма фильтрации в дискретном случае

$$\hat{x}(t) = \Phi(i, i-1)\hat{x}(i-1) + K_C(i)[z(i) - \Phi_A(i, i-1)z(i-1) - H^*(i-1)\hat{x}(i-1)],$$

где

$$H^*(i-1) = H(i)\Phi(i, i-1) + \Phi_A(i, i-1)H(i-1).$$

В отличие от непрерывного случая, нам необходимо определить алгоритм для одношагового сглаживания. По сути, этот алгоритм является оценкой вектора состояния $x(i)$ на основе $z^*(i)$, так как $z^*(i)$ зависит от $z^*(i+1)$.

Запишем

$$\hat{x}(i-1|i) = \hat{x}(i-1) + K_s(i-1)[z(i) - \Phi_A(i, i-1)z(i-1) - H^*(i-1)\hat{x}(i-1)].$$

Коэффициент усиления при сглаживании

$$K_s(i-1) = V_{x^-}(i-1)H^{*T}(i-1)[H^*(i-1)$$

$$V_{x^-}(i-1)H^{*T}(i-1) + V_\zeta(i-1) +$$

$$H(i)\Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1)H^T(i)]^{-1}.$$

Коэффициент усиления при фильтрации

$$K_C(i) = \Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1)H^T(i)$$

$$[H^*(i-1)V_{x^-}(i-1)H^{*T}(i-1) + V_\zeta(i-1) + (4)$$

$$H(i)\Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1)H^T(i)]^{-1}.$$

Алгоритм вычисления дисперсии ошибки

$$P(i) = \Phi(i, i-1)P(i-1|i)\Phi^T(i, i-1) +$$

$$\Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1) - K_C(i)$$

$$[H^*(i-1)P(i-1)H^{*T}(i-1) + V_\zeta(i-1) +$$

$$H(i)\Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1)H^T(i)]K_C^T(i) -$$

$$\Phi(i, i-1)K_C(i-1)H(i)\Gamma(i-1)V_w(i-1)$$

$$\Gamma^T(i-1) - \Gamma(i-1)V_w(i-1)\Gamma^T(i-1)$$

$$H^T(i)K_C^T(i-1)\Phi^T(i, i-1).$$

Дисперсии ошибки сглаживания

$$P(i-1|i) = [I - K_\zeta(i-1)H^*(i-1)]$$

$$P(i-1)[I - K_\zeta(i-1)H^*(i-1)]^T +$$

$$K_\zeta(i-1)[V_\zeta(i-1) + H(i)\Gamma(i-1)V_w(i-1)$$

$$\Gamma^T(i-1)H^T(i)]K_\zeta^T(i-1).$$

Теория формирующего фильтра. Новые результаты

Для получения коррелированного шума измерения используется теория формирующего фильтра, т.е. помеха $V(t)$ генерируется как сигнал на выходе линейной динамической системы с матрицей динамики $A(t)$, на вход которой подается «белый шум» $\xi(t)$.

В литературе по теории динамических систем приводятся следующие выражения для параметров формирующего фильтра [2]

$$\frac{dV}{dt} = A(t)V(t) + \xi(t),$$

$$L(t, \tau) = M[V(t)V^T(\tau)] = \varphi(t)\psi(\tau),$$

если

$$A(t) = \frac{d\varphi}{dt}\varphi^{-1}(t).$$

Ковариационная матрица «белого шума» $\xi(t)$ равна

$$Q = \varphi(t)\frac{d}{dt}[\psi(t)\varphi^{-T}(t)]\varphi^T(t). \quad (5)$$

Покажем, что формула (5) может быть существенно упрощена. Обозначим $P(t) = \varphi(t)\psi(t)$ для случая когда $t = \tau$.

Перепишем (5) в виде

$$Q = \varphi(t) \left(\frac{d\psi}{dt} \varphi^{-T}(t) + \psi(t) \frac{d\varphi^{-T}}{dt} \right) \varphi^T = \varphi(t) \left(\frac{d\psi}{dt} + \psi(t) \frac{d\varphi^{-T}}{dt} \varphi^T \right).$$

Используя преобразование

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dt} = -\varphi^{-1} \frac{d\varphi}{dt} \varphi^{-1},$$

получим

$$\frac{d\varphi^{-T}}{dt} = -\varphi^{-T} \frac{d\varphi^T}{dt} \varphi^{-T}.$$

Формула (5) приводится к виду

$$Q = \varphi(t) \frac{d\psi}{dt} - \varphi(t) \psi(t) \varphi^T(t) \frac{d\varphi^T}{dt}.$$

P - симметричная матрица ($P^T = P$), тогда

$$\varphi(t) \psi(t) = \psi^T(t) \varphi^T(t).$$

Получим упрощенную формулу (5)

$$Q = \varphi(t) \frac{d\psi}{dt} - \psi^T(t) \frac{d\varphi^T}{dt}. \quad (6)$$

Формула (5) является более трудоемкой при практическом применении нежели формула (6), так как в (5) необходимо проводить такие сложные вычисления как обращение матриц и дифференцирование произведений двух матриц.

Рассмотрим пример для экспоненциальной временной функции

$$L(t, \tau) = \text{Re}^{-\lambda(t-\tau)}$$

Посчитаем ее ковариационную матрицу по формуле (6).

Для этого выделим две функции, зависящие от t и τ соответственно:

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t} \text{ и } \psi(\tau) = \text{Re}^{\lambda \tau}, \text{ тогда}$$

$$A(t) = \frac{d\varphi}{dt} \varphi^{-1}(t) = \frac{d\varphi}{dt} (e^{-\lambda t}) e^{\lambda t} = -\lambda,$$

$$Q = \varphi(t) \frac{d\psi}{dt} - \psi^T(t) \frac{d\varphi^T}{dt} = e^{-\lambda t} \frac{d(\text{Re}^{\lambda t})}{dt} - \text{Re}^{\lambda t} \frac{d(e^{-\lambda t})}{dt} = e^{-\lambda t} \lambda \text{Re}^{\lambda t} - \text{Re}^{\lambda t} (-\lambda) e^{-\lambda t} = 2R\lambda.$$

Получаем

$$A(t) = -\lambda, \quad Q = 2R\lambda.$$

Соответственно формирующий фильтр

$$w_k = -\lambda w_{k-1} + \xi_k,$$

при

$$E^2(\xi_k) = 2R\lambda,$$

что полностью совпадает с данными, полученными по формуле (5). Чувствительность оптимального фильтра к модели измерения

Аналитические трудности при проектировании алгоритмов фильтрации в случае с коррелированным шумом измерения связаны с трудностью представления корреляционной функции ошибки и вычислительными трудностями при реализации модифицированного фильтра. Это приводит к необходимости анализа возможного снижения точности фильтра при упрощающих предположениях об отсутствии корреляции измерительного шума.

В настоящей работе изучается поведение фактической ошибки в случае для оптимального фильтра Калмана для модели свободной динамической системы

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t). \quad (7)$$

Основная идея предполагаемого подхода связана с возможностью функционального представления оптимальной оценки фильтра в виде оператора над измерениями, позволяющей построить аналитические зависимости статистических характеристик ошибок фильтрации от параметров модели[2].

Пусть расчетная модель измерителя, на которую настраивается оптимальный фильтр, характеризуется предположением

об отсутствии корреляции и систематического смещения последовательности ошибок измерений

$$M[V(t)] = 0, M[V(t)V^T(\tau)] = \tilde{R}\delta(t-\tau). \quad (8)$$

Если входной сигнал $z(t)$ не удовлетворяет расчетной модели

$$M[V(t)] = r(t), M[(V(t) - r(t))(V(\tau) - r(\tau))^2] = L(t, \tau),$$

то предсказываемая точность не будет достоверной. В таких условиях необходимо оценить фактические ошибки фильтрации, характеризующиеся средним значением ошибки фильтрации $E_1(t)$ и ее ковариационной матрицей $P_\phi(t)$.

Оптимальная оценка вектора состояния для системы (7), (2) при условии (8) может быть представлена в виде

$$\tilde{X}(t) = P(t) \left[\int_0^t \theta^T(\tau, t) \tilde{R}^{-1}(\tau) z(\tau) d\tau + \Phi^T(0, t) P_0^{-1} \tilde{X}(0) \right], \quad (9)$$

где $P(t)$ – расчетная ковариационная матрица ошибки оценки, определяемая выражением

$$P(t) = \left[\int_0^t \theta^T(\tau, t) \tilde{R}^{-1}(\tau) \theta(\tau, t) d\tau + \Phi^T(0, t) P_0^{-1} \Phi(0, t) \right], \quad (10)$$

где $\theta(\tau, t) = H(\tau)\Phi(\tau, t)$, а $\Phi(\tau, t)$ – переходная матрица системы, удовлетворяющая уравнению $\frac{d\Phi(\tau, t)}{dt} = F(t)\Phi(t, \tau)$.

Воспользовавшись соотношением

$$\tilde{X}(t) = P(t) \left[\int_0^t \theta^T(\tau, t) \tilde{R}^{-1}(\tau) z(\tau) d\tau + \Phi^T(0, t) P_0^{-1} \Phi(0, t) X(t) \right]$$

и переходным свойством матрицы $\Phi(\tau, t) = \Phi(\tau, \delta)\Phi(\delta, t)$, фактическую ошибку оценки состояния запишем в виде

$$\tilde{X}(t) = \Delta X(t) - X(t) = P(t) \left[\int_0^t \theta^T(\tau, t) * \tilde{R}^{-1}(\tau) V(\tau) d\tau + \Phi^T(0, t) P_0^{-1} \tilde{X}(0) \right].$$

Очевидно, что оценка вектора состояния смещенная

$$E_1(t) = M[\tilde{X}(t)] = P(t) \int_0^t \theta^T(\tau, t) \tilde{R}^{-1}(\tau) r(\tau) d\tau. \quad (11)$$

Ковариационная матрица фактической ошибки фильтрации описывается выражением

$$P_\phi(t) = M[(\tilde{X}(t) - E_1(t))(\tilde{X}(t) - E_1(t))^T] = P(t) \left[\int_0^t \theta^T(\tau, t) \tilde{R}^{-1}(\tau) L(\tau, \delta) * \int_0^t \theta^T(\delta, t) \tilde{R}^{-1}(\delta) \theta(\tau, \delta) d\tau d\theta + \Phi^T(0, t) P_0^{-1} \Phi(0, t) \right] P(t). \quad (12)$$

Получим выражение для дисперсии фактической ошибки оценки параметра объекта, измеряемой в присутствии шума с экспоненциальной корреляционной функцией.

Математическая модель системы

$$\frac{dX(t)}{dt} = 0, \quad M[X(0)] = 0,$$

$$z(t) = X(t) + V(t),$$

$$M[V(t)] = \tau, M[(V(t) - \tau)(V(\tau) - \tau)] = \text{Re}^{-\lambda(t-\tau)}.$$

В нашем случае $\theta(\tau, t) = 1$, а

$$P(t) = \frac{R}{t}.$$

Если исходить из предположения о том, что априорная информация о начальном состоянии объекта отсутствует, т.е. $P^{-1}(0) = 0$, и что $M[V(t)] = 0$ $M[V(t)V(\tau)] = R\delta(t-\tau)$, тогда в соответствии с выражением (12) получим

$$P_\phi(t) = \frac{2R}{\lambda^2 t^2} [\lambda t - 1 + e^{-\lambda t}].$$

Из уравнения (10) дисперсия оптимальной оценки модели определяется выражением

$$P^*(t) = \frac{2R}{\lambda t + 2}$$

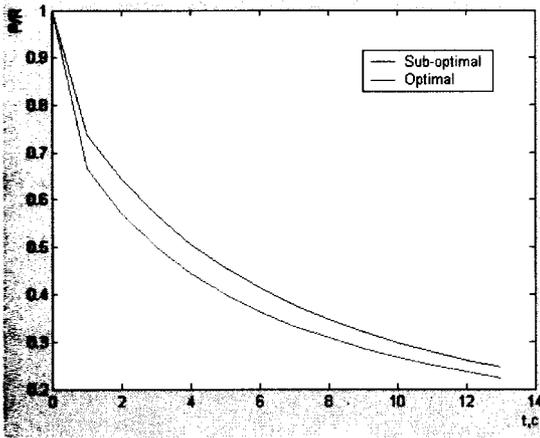


Рис. 1. Графики зависимости $P_\phi(t)$ и $P^*(t)$ от времени

Видно, что фактическая ошибка субоптимальной фильтрации не отличается от оптимальной и уменьшается с увеличением времени наблюдения. Предположение о некоррелированности шума не приводит к потере устойчивости фильтра Калмана. С уменьшением времени корреляции скорость сходимости ошибки фильтрации увеличивается и при стремлении λ к нулю значения дисперсии измерительного шума $R(t)$.

Систематическая составляющая фактической ошибки фильтрации рассчитывается по формуле (12) и имеет вид

$$E_1(t) = r.$$

Таким образом, фактическая оценка смещается на величину, равную смещению измерительной ошибки.

Определим влияние упрощающих предположений о статистических характеристиках измерительного шума на ошибки оценивания координаты и скорости равномерно и прямолинейно движущегося объекта.

В этом случае измерение вектора состояний описывается уравнением:

$$\frac{dX(t)}{dt} = FX(t),$$

где

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}; X(t) = \begin{vmatrix} x(t) \\ v(t) \end{vmatrix},$$

где $x(t)$ – координата объекта; $V(t)$ – скорость движения объекта.

Предположим, что измеряется только координата объекта в присутствии аддитивного коррелированного шума

$$z(t) = Hx(t) + V(t),$$

где $H = |1 \ 0|$.

Измерительный шум $V(t)$ обладает следующими статистическими свойствами

$$M[V(t)] = \tau,$$

$$M[(V(t) - \tau)(V(\tau) - \tau)] = Re^{-\lambda(t-\tau)}.$$

С учетом выражения (7) – (9), измерительный шум может быть связан с вектором «белого шума» $\eta(t)$ уравнением формирующего фильтра

$$\frac{d[V(t) - \tau]}{dt} = -\lambda[V(t) - \tau] + \eta(t),$$

при

$$R^*(t) = M[\eta^2(t)] = 2R\lambda.$$

Матрица наблюдений оптимального фильтра равна

$$H^* = |1 \ 0| \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \lambda |1 \ 0| = 1 - \lambda + 1.$$

В предположении об отсутствии априорной информации о начальном значении вектора состояния ($P^{-1}(0) = 0$) начальное условие для модифицированного фильтра получим в виде

$$(P^*(0))^{-1} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переходная матрица системы $\Phi(\tau, t)$ равна

$$\Phi(\tau, t) = e^{F(t-\tau)} = \begin{vmatrix} 1 & \tau - t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Используя полученные выражения и интегральное представление для ковариационной матрицы ошибки оценки (10), можно определить дисперсии ошибок оптимальных оценок координаты и скорости объекта

$$P^*(t) = \frac{24\lambda t R}{\lambda^4 t^4 + 8\lambda^3 t^3 + 24\lambda^2 t^2 + 24\lambda t} * \begin{vmatrix} \lambda^2 t^2 + 3\lambda t + 3 & \lambda^2 t^2 + 2\lambda t \\ \frac{3}{\lambda^2 t^2 + 2\lambda t} & \frac{2t}{\lambda^2 t^2 + 2\lambda t} \\ \frac{\lambda^2 t^2 + 2\lambda t}{2t} & \frac{\lambda^2 t^2 + 2\lambda t}{t^2} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Если алгоритм фильтрации соответствует упрощенным предположениям о характеристиках измерительного шума:

$$M[V(t)] = 0 \quad M[V(t)V(\tau)] = R\delta(t - \tau),$$

то появляется дополнительная ошибка фильтрации, имеющая как систематическую, так и случайную составляющие. Систематическая составляющая дополнительной ошибки фильтрации определяется следующим выражением

$$P^*(t) = \frac{R}{\lambda^4 t^4} \begin{vmatrix} 4(18 - 5\lambda^2 t^2 - 2e^{-\lambda t}(9 + 9\lambda t + 2\lambda^2 t^2) + 2\lambda^3 t^3) & \frac{12}{t}(12 - 3\lambda^2 t^2 - 3e^{-\lambda t}(2 + \lambda t)^2 + \lambda^3 t^3) \\ \frac{12}{t}(12 - 3\lambda^2 t^2 - 3e^{-\lambda t}(2 + \lambda t)^2 + \lambda^3 t^3) & \frac{24}{t^2}(12 - 3\lambda^2 t^2 - 3e^{-\lambda t}(2 + \lambda t)^2 + \lambda^3 t^3) \end{vmatrix}. \quad (14)$$

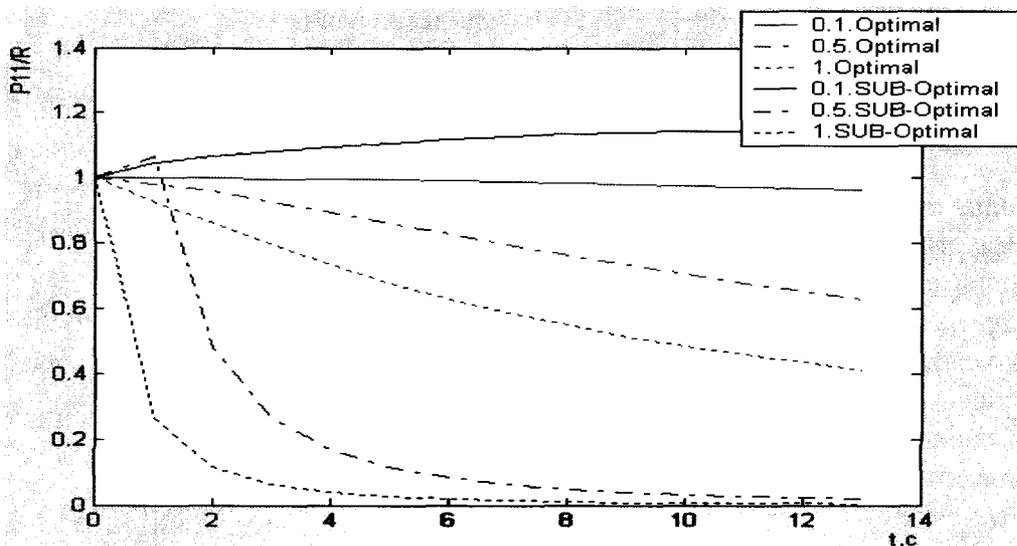


Рис. 2. Зависимость от времени дисперсии ошибки фильтрации координаты для оптимального фильтра и субоптимального фильтра

$$E_1(t) = \frac{\tau}{R} P(t) \int_0^t \theta^T(\tau, t) d\tau,$$

где $P(t)$ – расчетная ковариационная матрица ошибки фильтрации.

В соответствии с формулой (10)

$$P(t) = R \begin{vmatrix} \frac{4}{t} & \frac{6}{t^2} \\ \frac{6}{t^2} & \frac{12}{t^3} \end{vmatrix},$$

тогда среднее значение ошибки фильтрации равно

$$E_1(t) = \begin{vmatrix} E_x \\ E_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В этом случае оценка координаты смещается на такую величину, как и ошибка измерений, а ошибка оценки скорости движения имеет нулевое среднее.

Случайные составляющие фактической ошибки субоптимальной фильтрации [2] имеют следующую ковариационную матрицу:

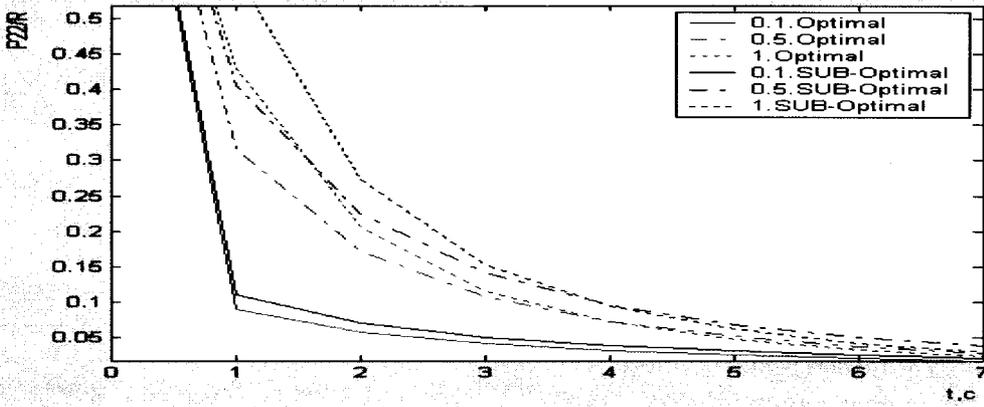


Рис. 3. Зависимость от времени дисперсии ошибки фильтрации скорости для оптимального фильтра и субоптимального фильтра

На рис.(2) и (3) показана зависимость дисперсии ошибок субоптимальной и оптимальной фильтрации координаты скорости объекта для различных значений параметра λ .

Не учет корреляции измерительного шума незначительно снижает точностные характеристики фильтра Калмана. Ошибки в параметрах модели становятся исчезающе малы в обоих случаях, когда $\lambda > 0$. Предельное значение $\lambda = 0$ соответствует постоянному смещению в измерениях и отсутствию случайной составляющей.

Таким образом, используя простую модель, не учитывающую корреляцию измерительного шума, можно получить оценки модели, близкие по точности к оптимальным.

Рассмотрим влияние упрощенной модели измерителя на точность фильтрации для случайного дискретного времени. Для дискретной системы

$$x_{k+1} = \Phi_{k+1,k} x_k,$$

$$z_k = Hx_k + V_k,$$

где

$$M[V_k] = \tau_k, \quad M[(V_i - \tau_i)(V_k - \tau_k)^T] = L_{i,k}.$$

Фактические характеристики оценки состояния могут быть получены аналогично непрерывному случаю. Если обработка осуществляется в соответствии с предположением об отсутствии корреля-

ции и систематического смещения ошибок измерений

$$M[V_k] = 0 \quad M[V_k V_i] = R_i \delta(i - k),$$

то фактическая ошибка фильтрации имеет вид

$$\tilde{x}_k = x_{k,k} - x_k = P_{k,k} \left[\sum_{i=1}^k \theta_{i,k}^T R_i^{-1} V_i + \Phi_{0,k}^T P_0^{-1} \tilde{x}_0 \right].$$

Здесь $P_{k,k}$ расчетная ковариационная матрица ошибки фильтрации, определенная выражением [2]

$$P_{k,k} = \left[\sum_{i=1}^k \theta_{i,k}^T R_i^{-1} \theta_{i,k} + \Phi_{0,k}^T P_0^{-1} \Phi_{0,k} \right]^{-1}, \quad (15)$$

где $\theta_{i,k} = H_i \Phi_{i,k}$.

Среднее значение ошибки оценки вектора состояния имеет вид

$$E_1(t) = P_{k,k} \sum_{i=1}^k \theta_{i,k}^T \tilde{R}_i^{-1} \tau_i.$$

Ковариационная матрица случайной составляющей фактической ошибки фильтрации равна

$$P_{\Phi,k,k} = P_{k,k} \left[\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \theta_{i,k}^T \tilde{R}_i^{-1} L_{i,j} \tilde{R}_j^{-1} \theta_{j,k} + \Phi_{0,k}^T P_0^{-1} \Phi_{0,k} \right] P_{k,k}. \quad (16)$$

Представим выражение (16) в более компактной форме. Введем субвектор $\Lambda_{k,1}$, элементами которого являются матрицы

R_i $\theta_{i,k}$ $P_{k,k}$, ($i=1, \dots, k$) в субматрице $\Theta_{k,k}$ с элементами $L_{i,j}$ ($i=1, \dots, k, j=1, \dots, k$).

Ковариационную матрицу фактической ошибки фильтрации можно описать соотношением

$$P_{\phi,k,k} = \Lambda_{k,1}^T \Theta_{k,k} \Lambda_{k,1} + P_{k,k} \Phi_{0,k}^T P_0^{-1} \Phi_{0,k} P_{k,k} \quad (17)$$

Выводы

По результатам проведенной работы были получены аналитические выражения для дисперсии фактических ошибок фильтрации, возникающих при неучете корреляционного шума.

Неучет корреляции шума измерения не приводит к значительному изменению дисперсии ошибки и к смещению оценок на величину, пропорциональную математическому ожиданию шума измерений.

Существенно уменьшаются затраты на реализацию практических задач прогнозирования и фильтрации нестационарных временных рядов с использованием фильтра Калмана.

Наблюдается незначительное увеличение фактических ошибок по сравнению с оптимальным фильтром.

Список литературы

1. Сэйдж Э., Мэлс Дж. Теория оценивания и ее применение в связи и управлении. Вып. 6. – М.: Связь, 1976. – 496 с.

2. Згуровский М.З., Подладчиков В.Н. Аналитические методы калмановской фильтрации для систем с априорной неопределенностью. – К.: Наук. думка, 1995. – 289 с.

3. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.

4. Меньшиков И.С., Шелагин Д.А. Рыночные риски: модели и методы. – М.: Вычислительный центр РАН, 2000. – 55 с.

5. Risk Metrics TM Technical Document. Fourth Edition. – New York: Risk Metrics Group, 1995. – 86 p.

6. Control System Toolbox Reference.

УДК 004.932.75'1 (045)