

УДК 621.396.67.004

Ільницький Л. Я., д-р техн. наук

## ІМПЕДАНС СМУЖКОВОГО ДИПОЛЯ

Інститут електроніки та систем управління НАУ

Використовуючи відомі з електродинаміки співвідношення для визначення індуктивності і ємності провідника, що обтікається струмом та має зосереджені на торцевих поверхнях заряди, виведені аналітичні вирази, які описують активні та пасивні складові імпедансу смужкового диполя. Показано, що активна складова імпедансу обумовлена появою реактивних індуктивності та ємності та пов'язана із змінними у часі струмами і зарядами. Активна складова характеризує випромінювальну здатність смужки, а реактивна складова імпедансу визначає інтенсивність реактивного поля навколо смужки.

## Вступ

У сучасних пристроях надвисоких частот та пристроях випромінювання широко застосовують технології друкованого виготовлення конструктивних вузлів. При цьому відрізки ліній передач або елементи випромінювання представляють собою смужки із фольгованих провідників, розміщених на діелектричних матеріалах. Незначні за довжиною смужки можна розглядати як елементарні електричні диполі, які взаємодіють між собою через електромагнітне поле у ближній зоні, формуючи його відповідним чином.

Якщо для параметрів смужкових випромінювачів, що визначаються через поле у зоні Фраунгофера, знайдені аналітичні вирази, у яких враховуються і особливості конструкції, і вплив діелектричних підшарків, то для елементарних диполів, що мають вигляд смужки, поки що не приведені формули, за допомогою яких можна було б знайти власний вхідний опір або взаємні опори двох суміжних диполів. Оскільки при розв'язанні різних електродинамічних задач часто використовують принцип суперпозиції, то значення вхідних імпедансів смужкових електричних диполів забезпечуватимуть використання принципу суперпозиції і при розгляді випромінюючих систем у смужковому виконанні у будь-яких зонах поля випромінювання.

## Теоретичні засади

Розглянемо електричний диполь, виконаний у формі прямокутника (рис.1) із металевої фольги з дуже високою провідністю.

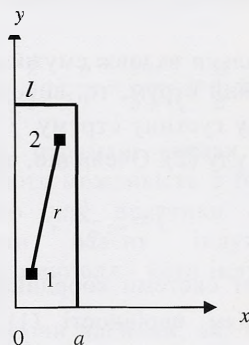


Рис.1

Систему координат вибираємо таким чином, щоб вісь  $oz$  була спрямована паралельно кромці смужки, що має довжину  $l$ , а вісь  $ox$  – вздовж ширини смужки. Отже змінні набирають значень у межах  $0 \leq z \leq l$ ,  $0 \leq x \leq a$ .

Товщина смужки незмінна і дорівнює  $\Delta$ . Співвідношення між розмірами смужки задовольняють нерівності:

$$\Delta \ll a \ll l. \quad (1)$$

Вздовж смужки протікає повний струм  $I$ . Оскільки розглядаємо електричний диполь, то  $l/\lambda \ll 1$  і можна вважати, що струм на поверхні смужки має одно-рідний амплітудно-фазовий розподіл. У зв'язку з цим заряди зосе-

реджені тільки на кінцях смужки, тобто знаходяться в перерізах з координатами  $z_1 = 0$  і  $z_2 = l$ .

Індуктивність смужки будемо обчислювати за відомою з електродинаміки [1] формулою

$$L = \frac{\mu_a}{4\pi^2} \iint_V \iint_V \frac{\vec{\delta} \vec{\delta}' e^{-ikr}}{r} dV dV', \quad (2)$$

де  $\mu_a$  - абсолютна магнітна проникність середовища, в якому знаходиться диполь;

$I$  - повний струм в диполі;

$\vec{\delta}, \vec{\delta}'$  - вектори густини струму у виокремлених елементах диполя;

$r$  - відстань між цими елементами;

$V = V'$  - об'єм диполя;

$dV, dV'$  - об'єми виокремлених елементів.

Оскільки вздовж смужки протікає поверхневий струм, то, використовуючи лінійну густину струму  $\vec{j}$ , спростуємо формулу (2). Очевидно, що

$$\vec{j} = \vec{z}_0 \frac{I}{2a}, \quad (3)$$

де  $\vec{z}_0$  - орт системи координат;  $2a$  - з урахуванням нерівності (1) є периметром поперечного перерізу смужки. У всіх точках смужки лінійна густина має однакову амплітуду і фазу. Елементами 1 та 2 (рис.1), що виокремлені на смужці, є малі прямокутники з площею  $dS = dx dz$  і  $dS' = dx' dz'$ . Інтеграл за об'ємом зводяться до інтегралів за площею. Виносячи за знаки інтегрування сталі величини і використовуючи формулу (3), вираз (2) приводимо до вигляду

$$L = \frac{\mu_a}{4\pi a^2} \int_{x=0}^a \int_{x'=0}^a \int_{z=0}^l \int_{z'=0}^l \frac{e^{-ikr}}{r} dx dx' dz dz', \quad (4)$$

У формулі (4) враховано, що інтеграл, які обчислюються за змінною  $x$ , подвоюються, оскільки повний струм  $I$  тече по двом сторонам смужки.

Для оберненої величини ємності електричного диполя, враховуючи, що заряди зосереджені лише на кінцях смужки, з відомих співвідношень між потенціалом, зарядом і ємністю, знаходимо:

$$C^{-1} = \frac{1}{2\pi\epsilon S} \left[ \iint_{S_1, S_2} \frac{e^{-ikr}}{r} dS dS' - \iint_{S_1, S_2} \frac{e^{-ikr_{12}}}{r_{12}} dS_1 dS_2 \right], \quad (5)$$

де  $\epsilon_1$  - діелектрична проникність середовища;

$S$  - площа торцевих поверхонь диполя;

$S_1$  - площа нижнього перерізу;

$S_2$  - площа верхнього перерізу;

$r$  - відстань між виокремленими елементами в одному перерізі;

$r_{12}$  - відстань між виокремленими елементами в різних перерізах;

$dS$  - елемент площі перерізу.

Вважатимемо, що переріз смужки не змінюється. Тоді для будь-якого перерізу справедливий добуток:

$$S = a\Delta. \quad (6)$$

Як було зазначено вище, товщина смужки  $\Delta$  дуже мала, тому елемент площі торцевої поверхні дорівнює:

$$dS = \Delta dx.$$

(7)

Рівняння (6) і (7) зводять чотири-кратні інтегралі (5) до двократного:

$$C^{-1} = \frac{1}{2\pi\epsilon_a a^2} \left[ \iint_0^a \iint_0^a \frac{e^{-ikr}}{r} dx dx' - \iint_0^a \iint_0^a \frac{e^{-ikr_{12}}}{r_{12}} dx dx' \right], \quad (8)$$

де  $r = |x - x'|$  і  $r_{12} = \sqrt{l^2 + (x - x')^2}$ .

Враховуючи, що омичних втрат у диполі немає, за результатами обчислення за формулами (4) та (8) знаходимо імпеданс смужки:

індуктивну складову

$$Z_L = i\omega L$$

і ємнісну складову

$$Z_C = (i\omega C)^{-1}.$$

Очевидно, що індуктивна і ємнісна складові матимуть дійсні і уявні компоненти. Уявні компоненти імпедансу пов'язані з випромінюванням електромагнітних хвиль.

**Індуктивна складова імпедансу**

Для обчислення чотирикратного інтегралу (4) представимо експоненціальну функцію через тригонометричні функції і розкладемо їх у степеневий ряд. Оскільки степеневий ряд складається із дійсних і уявних членів, то виокремимо дійсні члени ряду і знайдемо значення дійсної індуктивності  $L_a$ . Формула (4) для цього випадку набуде вигляду:

$$L_a = \frac{k\mu_a}{(2a)^2 \pi} \int_0^a \int_0^a \int_0^l \int_0^l \frac{\cos kr}{kr} dx dx' dz dz', \quad (9)$$

де для косинусонаїдальної функції обмежимося трьома членами ряду:

$$\frac{\cos kr}{kr} = \frac{1}{kr} - \frac{kr}{2!} + \frac{(kr)^3}{4!}. \quad (10)$$

Значення інтервалів від членів степеневого ряду позначимо як  $I_0, I_2, I_4$  і представимо індуктивність (9) таким чином

$$L_a = \frac{k\mu_a}{4\pi a^2} (I_0 - I_2 + I_4). \quad (11)$$

Інтеграл  $I_0$  визначається як

$$I_0 = \frac{1}{k} \int_0^a \int_0^a \int_0^l \int_0^l \frac{dx dx' dz dz'}{r}.$$

Обчислюючи його, вважаючи на те, що за будь-яких координат  $x, x', z$  і  $z'$  відстань  $r$  має завжди позитивне значення, отримуємо:

$$I_0 = \frac{2a^2 l}{k} \left( \ln \frac{2l}{a} - \frac{1}{4} + \frac{a}{3l} - \frac{a^2}{24l^2} \right). \quad (12)$$

Отже, самоіндукція смужки в статичному режимі дорівнює:

$$L_a^0 = \frac{\mu_a l}{2\pi} \left( \ln \frac{2l}{a} - \frac{1}{4} + \frac{a}{3l} - \frac{a^2}{24l^2} \right). \quad (13)$$

Інтеграл  $I_2$  визначається як:

$$I_2 = \frac{k}{2} \int_0^a \int_0^a \int_0^l \int_0^l r dx dx' dz dz'.$$

Оскільки відношення  $a/l$  значно менше одиниці, то нехтуючи відношеннями ( $a/l$ ) у третій і більш високих степенях, знаходимо, що:

$$I_2 = \frac{ka^2 l^3}{6} \left[ 1 + \frac{a^2}{2l^2} \left( \ln \frac{2l}{a} + \frac{1}{12} \right) \right]. \quad (14)$$

Інтеграл  $I_4$ , як впливає з виразів (9) та (10), дорівнює

$$I_4 = \frac{k^3}{24} \int_0^a \int_0^a \int_0^l \int_0^l (\sqrt{(x-x')^2 + (z-z')^2})^3 dx dx' dz dz'$$

Обчислюючи цей інтеграл, знаходимо:

$$I_4 = \frac{k^3 a^3 l^5}{96} \left[ \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \frac{a^2}{l^2} + \frac{1}{5} \frac{a^4}{l^4} \left( \ln \frac{2l}{a} + \frac{9}{10} \right) \right]. \quad (15)$$

Отже, отримані вирази (12), (14) та (15) дають можливість з більш ніж достатньою для практики точністю розрахувати власну індуктивність смужкового диполя і його індуктивний імпеданс.

Нехтуючи членами, які містить у собі відношення  $a/l$  у другій і більш високій степенях, знаходимо наближене значення індуктивного реактансу:

$$X_L = 120 \frac{\pi l}{\lambda} \left( \ln \frac{2l}{a} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{a}{l} - \frac{2}{3} \frac{\pi^2 l^2}{\lambda^2} + \frac{1}{15} \frac{\pi^4 l^4}{\lambda^4} \right).$$

Уявна складова індуктивності диполя з виразу (4) визначається як:

$$L_s = -i \frac{k\mu_a}{4\pi a^2} \int_0^a \int_0^a \int_0^l \int_0^l \frac{\sin kr}{kr} dx dx' dz dz'. \quad (16)$$

Підінтегральну функцію представимо у вигляді суми трьох членів степеневого ряду

$$\frac{\sin kr}{kr} = 1 - \frac{k^2 r^2}{3!} + \frac{k^4 r^4}{4!}. \quad (17)$$

Інтеграл з правої частини рівняння (16) в цьому випадку є сумою трьох

інтегралів, тому вираз для уявної складової індуктивності  $L_y$  набуває вигляду:

$$L_y = -i \frac{\mu_0}{2a^2 \lambda} (I_1 - I_3 + I_5). \quad (18)$$

Найбільш простим є інтеграл  $I_1$ , значенням якого є величина

$$I_1 = \int_0^a \int_0^a \int_0^l dx dx' dz dz' = a^2 l^2 \quad (19)$$

Інтеграл  $I_3$  також є досить простим

$$I_3 = \frac{k^2}{6} \int_0^a \int_0^a \int_0^l [(x-x')^2 + (z-z')^2] dx dx' dz dz'$$

Обчислюючи цей інтеграл, знаходимо:

$$I_3 = \frac{k^2 a^2 l^2}{36} (l^2 + a^2) = \frac{1}{9} \pi^2 a^2 \frac{l^4}{\lambda^2} \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right). \quad (20)$$

Інтеграл  $I_5$  ненабагато складніший:

$$I_5 = \frac{k^4}{5!} \int_0^a \int_0^a \int_0^l [(x-x')^2 + (z-z')^2]^4 dx dx' dz dz'$$

Вираз для значення інтегралу складається з трьох доданків:

$$I_5 = \frac{k^4 a^2 l^6}{360} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \frac{a^2}{l^2} + \frac{1}{7200} \frac{a^4}{l^4} \right).$$

Оскільки задовольняється умова (1), то вираз можна спростити:

$$I_5 \cong \frac{\pi^4 a^2 l^6}{225 \lambda^4} \left(1 + \frac{5}{6} \frac{a^2}{l^2}\right). \quad (21)$$

Індуктивний опір випромінювання можна отримати за формулою:

$$R_{12}^L = i \omega L_y.$$

Використовуючи формулу (18), (19), (20) і (21), знаходимо:

$$R_{\Sigma}^L = 120 \pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \left[ 1 - \frac{1}{9} \pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{a^2}{l^2}\right) + \frac{1}{225} \pi^4 \frac{l^4}{\lambda^4} \left(1 + \frac{5}{6} \frac{a^2}{l^2}\right) \right]. \quad (22)$$

Як випливає з виразу (22), індуктивний опір випромінювання практично мало залежить від ширини смужки  $a$ . Крім того, можна стверджувати, що для смужок, довжина яких в частках довжини хвилі мала ( $kl < 1$ ), для обчислення індуктивного опору досить використати лише перший член ряду у квадратних дужках правої частини рівняння (22).

### Ємнісна складова імпедансу

Для визначення ємнісної складової імпедансу смужки експоненціальні функції у правій частині рівняння (8) представимо через косинусоїдну і синусоїдну функції. Дійсна частина оберненої ємності обчислюється при розкладанні косинусоїдної функції у ряд і використанні перших трьох членів розкладання (10). При цьому вона набуває такого вигляду:

$$C_a^{-1} = \frac{1}{a^2 \epsilon_a \lambda} (I'_0 - I'_2 + I'_4). \quad (23)$$

Інтеграл  $I'_0$  з урахування формул (8) і (10) визначається як:

$$I'_0 = \frac{1}{k} \int_0^a \int_0^a \frac{dx dx'}{|x-x'|} - \frac{1}{k} \int_0^a \int_0^a \frac{dx dx'}{\sqrt{l^2 + (x-x')^2}}. \quad (24)$$

У результаті обчислення інтегралів, отримуємо:

$$I'_0 = \frac{a^2}{k} \left( \frac{2}{a} - \frac{1}{l} \right). \quad (25)$$

Підставляючи значення інтегралу  $I'_0$  у формулу (23), знаходимо перше наближення оберненої ємності смужки у статичному режимі:

$$C_a^{-1} = \frac{1}{2\pi \epsilon_a} \left( \frac{2}{a} - \frac{1}{l} \right). \quad (26)$$

Для другого наближення обчислюємо інтеграл:

$$I'_2 = \frac{k}{2} \left[ \int_0^a \int_0^a |x - x'| dx dx' - \int_0^a \int_0^a \sqrt{l^2 + (x - x')^2} dx dx' \right]. \quad (27)$$

Його значення знаходимо з урахуванням того, що  $a/l < 1$ . Нехтуючи малими величинами, отримуємо:

$$I'_2 \approx -\frac{3}{4} ka^2 l \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right). \quad (28)$$

Третій інтеграл  $I'_4$  визначається як

$$I'_4 = \frac{k^3}{4!} \left[ \int_0^a \int_0^a |x - x'|^3 dx dx' - \int_0^a \int_0^a \left( \sqrt{l^2 + (x - x')^2} \right)^3 dx dx' \right]. \quad (29)$$

За умови, що  $a/l \ll 1$ , інтеграл дорівнює:

$$I'_4 = -\frac{k^3 a^2 l^3}{4!} \left( 1 - \frac{1}{10} \frac{a^3}{l^3} \right) \approx -\frac{k^3 a^2 l^3}{24}. \quad (30)$$

Отже, обернену ємність можна записати в вигляді:

$$C_a^{-1} = \frac{1}{2\pi \epsilon_a l} \left( \frac{2l}{a} - 1 + 3\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} - \frac{1}{3} \pi^4 \frac{l^4}{\lambda^4} \right). \quad (31)$$

Ємнісний реактанс смужкового диполя дорівнює:

$$X_c = -30 \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right)^{-1} \left( \frac{2l}{a} - 1 + 3\pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} - \frac{1}{3} \pi^4 \frac{l^4}{\lambda^4} \right). \quad (32)$$

Уявна обернена ємність диполя визначається з формули (8) при використанні степеневого ряду (17):

$$C_y^{-1} = -i \frac{1}{a^2 \epsilon_0 \lambda} (I'_1 - I'_3 + I'_5). \quad (33)$$

де  $I'_1 = \int_0^a \int_0^a dx dx' - \int_0^a \int_0^a dx dx' = 0$ ;

$$I'_3 = \frac{k^6}{6} \left\{ \int_0^a \int_0^a (x - x')^2 dx dx' - \int_0^a \int_0^a [l^2 + (x - x')^2] dx dx' \right\};$$

$$I'_5 = \frac{k^4}{5!} \left\{ \int_0^a \int_0^a (x - x')^4 dx dx' - \int_0^a \int_0^a [l^2 + (x - x')^2]^2 dx dx' \right\}.$$

Обчислюючи інтеграл  $I'_3$ , отримуємо точне значення:

$$I'_3 = -\frac{2}{3} \pi^2 a^2 \frac{l^2}{\lambda^2}. \quad (34)$$

Також точне значення знаходимо і для інтегралу  $I'_5$ :

$$I'_5 = -\frac{1}{15} \pi^4 a^2 \frac{l^4}{\lambda^4} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{a^2}{l^2} \right). \quad (35)$$

Уявна обернена ємність дорівнює:

$$C_y^{-1} \equiv -i \frac{2}{3} \frac{\pi^2}{\epsilon_a \lambda} \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{10} \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (36)$$

Пов'язаний з цією ємністю опір випромінювання набуває значення:

$$R_{\Sigma}^c = (i\omega C_y)^{-1} = -40\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \left[ 1 - \frac{1}{10} \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (37)$$

### Повний опір диполя

З наведеного аналізу випливає, що імпеданс безвратного смужкового диполя складається з двох величин: активної та уявної. Активна складова імпедансу утворюється внаслідок випромінювання диполя і появи уявних індуктивності та ємності. З виразів (22) та (37) значення активної складової імпедансу, тобто опору випроміню-

вання за умови, що  $a/l \approx 0$ , дорівнює такій величині:

$$R_{\Sigma} = R_{\Sigma}^L - R_{\Sigma}^C \approx 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2 \left( 1 - \frac{7}{60} \pi^2 \frac{l^2}{\lambda^2} + \frac{1}{150} \pi^4 \frac{l^4}{\lambda^4} \right) \quad (38)$$

Залежність опору випромінювання від довжини хвилі наведена на рис.2.а. Крива, що позначена числом 1., побудована за формулою

$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^2$ , а крива, що позначена числом 2, побудована за формулою (38).

Цікаво, що формула (38) досить точно визначає опір випромінювання півхвильового вібратора. Підставляючи замість  $l$  діючу довжину півхвильового вібратора  $\lambda/\pi$ , отримуємо, що  $R_{\Sigma} = 71,2$  Ом. Отже, похибка становить лише 2,6%.

Уявна складова імпедансу складається з індуктивного та ємнісного реактансів:

$$X_a = X_L - X_C \approx 120 \frac{\pi l}{\lambda} \left( \ln \frac{2l}{a} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \frac{a}{l} \right) - 30 \left( \frac{\pi l}{\lambda} \right)^{-1} \left( \frac{2l}{a} - 1 \right) \quad (39)$$

З виразу (39) видно, що за певної довжини хвилі (резонансної) реактивна складова повного опору диполя може приймати нульове значення.

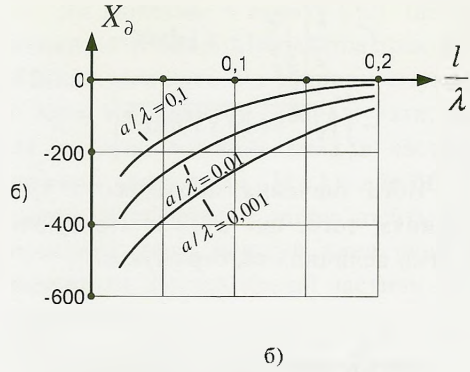
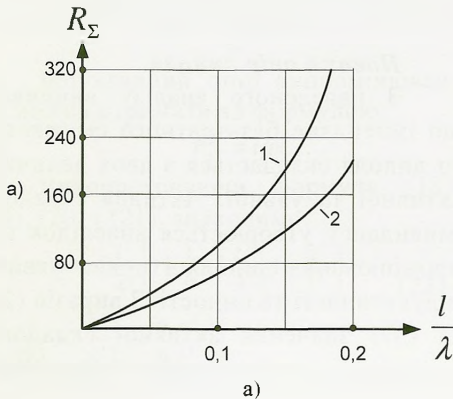


Рис.2. Графіки залежності: а)  $R_{\Sigma}$ ; б)  $X_a$

При більших довжинах хвилі опір носить ємнісний характер, при менших — індуктивний. Характер зміни  $X_a$  від  $\frac{l}{\lambda}$  зображений для трьох значень  $\frac{a}{\lambda}$  на рис.2.б.

### Висновки

У результаті аналізу імпедансу безвтратного смужкового диполя встановлено, що:

1. Активна складова імпедансу смужкового диполя не є простою параболічною функцією від відносної довжини смужки (рис.2.а).

2. Ширина смужки мало впливає на інтенсивність випромінювання.

3. Реактивна складова імпедансу досить сильно залежить від відношення довжини смужки до її ширини.

4. При збільшенні ширини смужки реактивна складова зменшується (рис.2.б).

### Список літератури

1. Фальковский О. И. Техническая электродинамика. М.: Связь, 1978.— 432 с.