

MARLE В ГІДРОДИНАМІЦІ ЕЛІПСОЇДАЛЬНИХ ПОРОЖНИН

Національний авіаційний університет

nfomina@ukr.net

Розглянуто еволюцію порожнин еліпсоїдальної форми в рідині в полі гравітації. Використання технології Marle в реалізації математичної моделі значно спрощує розрахунки форм еліпсоїдальної порожнини від часу та наявності гравітації

Ключові слова: течія рідини, потенціал швидкості, поверхня порожнини, еліпсоїд, гравітація, в'язкі сили, поверхневий натяг, збурення, числа Фруда і Вебера

Вступ

Поведінка порожнини сферичної форми в рідині вивчена досить добре і є декілька математичних моделей [1-3], які в тій чи іншій мірі враховують вплив реальних властивостей рідини. Але якщо форма порожнини не сферична, то розрахунок динаміки такої порожнини є досить складним і тому тривають пошуки більш простих математичних моделей, придатних з задовільною точністю описати процес деформування таких порожнин.

Мета статті

Дослідження течій навколо порожнин виконуються, як правило, в рамках різних математичних моделей. Моделі, засновані на рівняннях Нав'є – Стокса, досить повно описують дію в'язких сил. Але ці рівняння складні, мають різні розв'язки в різних діапазонах чисел Рейнольдса і не завжди їх використання є доцільним. Як показано в [3, 5, 6], за певних умов можна побудувати хоча і менш точні, але простіші математичні моделі. Спираючись на результати цих досліджень, в статті викладено результати дослідження еволюції еліпсоїдальної

порожнини в рідині з урахуванням дії поля гравітації та поверхневого натягу.

Постановка задачі

Вдаючись до короткого висвітлення основних рис математичної моделі, зауважимо, що в основу метода покладена гідродинаміка сферичних порожнин в ідеальній рідині [3] і методи теорії збурень. При цьому збурення потенціалу Φ і радіуса f порожнини можуть бути породжені різними збуреннями фізичної або геометричної природи. До них можна віднести все, що відрізняє конкретну математичну модель від моделі незбуреної течії (Φ_0, R_0) . Це, наприклад, збурення, пов'язані з наявністю поля сили тяжіння і поверхневого натягу, стисливості рідини та її в'язкості, місцевого тиску, а також з різними геометричними особливостями течії (формою незбуреної порожнини, її орієнтацією, несиметричністю, обмеженістю течії та ін.).

Вважаючи потенціал швидкості незбуреної течії Φ_0 відомим, як і форму порожнини R_0 , збурення потенціалу Φ течії і збурення радіуса f розшукуються у вигляді

$$\Phi = \Phi_0(t, r) + \varphi(t, r, \vartheta), R(t, \vartheta) = R_0(t) + f(t, \vartheta), \quad (1)$$

де збурення радіуса і потенціалу представляються відповідними розкладами (за поліномами Лежандра

$$P_n(\mu), R(t, \vartheta) = R_0(t) + \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) P_n(\mu), \mu = \cos \theta, \quad (2)$$

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(t) r^{-n-1} P_n(\mu). \quad (3)$$

Відшукування коефіцієнтів $f_n(t)$ і $a_n(t)$ цих розкладів зводиться до інтегрування нескінченної системи диференціальних рівнянь відносно $f_n(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{f}_1 &= -3b_1 \dot{f}_1 + Fr^{-2}, \\ \ddot{f}_2 &= -3b_1 \dot{f}_2 + b_2 \ddot{f}_2 - b_3 \ddot{f}_1 f_1 - \frac{9}{2} b_3 \dot{f}_1^2 + \frac{9}{14} b_3 f_3 Fr^{-2} - 24b_5 f_2 We^{-1}, \\ \ddot{f}_n &= -3b_1 \dot{f}_n + (n-1)b_2 + nb_4 \dot{f}_1^2 \ddot{f}_n - \frac{n(n+1)}{2(2n-1)} b_3 \ddot{f}_1 f_{n-1} - \frac{3(n+1)}{2} b_3 \dot{f}_1 \dot{f}_{n-1} + \\ &+ \frac{n+1}{2} b_3 \left(\frac{n}{2n-1} f_{n-1} + \frac{n+1}{2n+3} f_{n+1} \right) Fr^{-2} - 2(n-1)(n+1)(n+2)b_5 f_n We^{-1}, \quad n \geq 3 \end{aligned} \quad (4)$$

Тут введені відносні змінні, наприклад $t = \frac{V_0^* t^*}{R_{n0}^*}$, $R_0 = \frac{R_0^*}{R_{n0}^*}$, $V_0^* = \sqrt{\frac{p_\infty - p_k}{\rho}}$,

де зірочки означають розмірні величини (для зручності зірочки потім відкинуті). Також використані позначення:

$$b_1(t) = \frac{\dot{R}_0(t)}{R_0(t)}, \quad b_2(t) = -\frac{\ddot{R}_0}{R_0}, \quad b_3(t) = \frac{1}{R_0},$$

$$R_0 \ddot{R}_0 + \frac{3}{2} \dot{R}_0^2 = -1 + \frac{Z}{2Fr^2} - \frac{4}{R_0 We}, \quad We = \frac{\rho V_0^{*2} d_0^*}{\tau}, \quad Fr = \frac{V_0^*}{\sqrt{gd_0^*}},$$

Рівняння задачі

Система рівнянь (4) є спрощеною нелінійною системою, оскільки в неї входять добутки невідомої швидкості \dot{f}_1 "впливання" порожнини (ця швидкість зумовлена дією сили Архімеда) і мод деформацій f_k . Ще однією особливістю системи (4) є те, що поведінка моди $f_n(t)$ залежить від сусідніх за номером мод f_{n+1} і f_{n-1} . Взагалі то моди $f_n(t)$ залежать також і від більш віддалених мод f_{n+2} і f_{n-2} , але члени з цими модами мало впливають на еволюцію порожнини і в рівняннях (4) вони відсутні.

Рішення задачі

Розв'язавши систему (4) (при відповідних початкових умовах) і отримавши значення мод деформацій, можна побудувати потенціал швидкостей Φ , викликаний збуреннями потоку, за формулою (3). Коефіцієнти $a_n(t)$ цієї формули пов'язані з модами деформацій співвідношеннями:

$$\frac{(n+1)a_n}{R_0^{n+2}} = -\dot{f}_n - 2\dot{R}_0 \frac{f_n}{R_0}, \quad n = 0, 2, \dots$$

$$b_4(t) = \frac{1}{R_0^2}, \quad b_5(t) = \frac{4}{R_0^3}, \quad \text{де функція}$$

$R_0(t)$ є розв'язком рівняння Релея [4] з урахуванням сили поверхневого натягу і гравітації за Кнепом [4], а We , Fr – числа Вебера і Фруда по діаметру початкового перетину порожнини.

Це дозволяє знайти потенціал швидкостей течії навколо порожнини. Знаючи потенціал $\Phi(t, r, \vartheta)$, вже не важко визначити тиск як на поверхню порожнини, так і побудувати поле тисків навколо порожнини. А використавши формулу (2), можна побудувати і форму деформованої порожнини, яка, звичайно, буде змінюватися з часом.

Проте для інтегрування системи (4) потрібні початкові умови, яким мають бути підпорядковані моди деформацій і швидкості їх зміни в початковий момент часу. Початкові умови можна визначити, якщо розглядати еліпсоїдальну порожнину як результат збурення сферичної порожнини. Тоді "радіус" такої порожнини буде залежати в загальному випадку від двох кутів або від одного, якщо порожнина є поверхнею обертання, що ми і будемо припускати: $R_{\Pi} = R_{\Pi}(t, \vartheta)$. Тут індекс "п" означає "початковий", тобто це радіус порожнини в початковий момент часу, він визначається рівнянням поверхні еліпсоїда. Розкладемо цю функцію за поліномами Лежандра:

$$R_{\Pi}(t, \vartheta) = R_{\Pi 0} + \sum_{n=0}^{\infty} f_{n0}(t) P_n(\mu). \quad (5)$$

Величину радіуса $R_{\text{по}}$ можна наближено розрахувати як радіус кулі, рівновеликої заданому еліпсоїду. Це і є умова для визначення величини початкового радіуса сферичної порожнини. Для отримання функцій $f_{n0}(t)$ потрібно виконати розклад функції $R_{\text{п}}(t, \vartheta)$ в ряд Фур'є за поліномами Лежандра. Тоді функції $f_{n0}(t)$ можна розглядати як початкові збурення сферичної порожнини з радіусом $R_{\text{по}}$. Систему диференціальних рівнянь (4) в

$$x = r \cos \varphi \cos \vartheta, \quad y = r \sin \varphi \cos \vartheta, \quad z = r \sin \vartheta,$$

у яких це рівняння набуває вигляду

$$r(\vartheta) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta}} = \frac{c}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \vartheta}},$$

де $e^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2}$ – ексцентриситет горизонтально видовженого еліпсоїда ($c < a$). Оскільки $e < 1$, розкладемо $r(\vartheta)$ в ряд Тейлора і за поліномами Лежандра

$$r_n(e) = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 r(\mu) P_n(\mu) d\mu = \frac{(2n+1)c}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_n(\mu) d\mu}{\sqrt{1 - e^2 \mu^2}}$$

Проте обчислити цей інтеграл в загальному вигляді не вдається, тому будемо обчислювати коефіцієнти для кожного значення номера n . Марше це робить досить просто і отримує

$$\begin{aligned} r_2(e) &= \frac{c}{3} e^2 + \frac{c}{14} e^4 + \frac{25c}{168} e^6 + \frac{175c}{1584} e^8 + \dots; \\ r_4(e) &= \frac{3c}{35} e^4 + \frac{15c}{154} e^6 + \frac{105c}{1144} e^8 + \frac{189c}{2288} e^{10} + \frac{2079c}{28288} e^{12} + \dots; \\ r_6(e) &= \frac{5c}{231} e^6 + \frac{7c}{198} e^8 + \frac{63c}{1496} e^{10} + \frac{231c}{5168} e^{12} + \frac{1859c}{41344} e^{14} + \dots \end{aligned}$$

Тоді можна обчислити всі початкові збурення

$$R_{\text{по}} = r_0(e), \quad f_{2n,0} = r_{2n}(e), \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Таким чином, система рівнянь (4) і початкові умови (7) повністю визначають задачу Коші для цієї системи. Далі задача

цьому випадку слід доповнити такими початковими умовами:

$$f_n(0) = f_{n0}, \quad \dot{f}_n(0) = 0. \quad (6)$$

Друга рівність означає, що початкові швидкості зміни деформацій дорівнюють нулю, хоча, звичайно, можна було б розглядати задачу і з ненульовими швидкостями деформацій.

Для визначення початкових умов розглянемо еліпсоїд обертання

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

у сферичних координатах

$$r(\vartheta) = r_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r_{2n} P_{2n}(\mu), \quad \mu = \cos \vartheta.$$

Для визначення коефіцієнтів цього розкладу помножимо рівність на $P_m(\mu)$ і проінтегруємо її за проміжком $[-1, 1]$, скориставшись ортогональністю поліномів

$$r_0(e) = \frac{c \cdot \arcsin e}{e}.$$

Всі непарного номера коефіцієнти дорівнюють нулю, а для парних Марше швидко визначає відповідні розклади у вигляді степеневих рядів:

Коші розв'язувалась, як правило, методом Рунге-Кутта.

Висновки

На рис.1 показані форми меридіональних перетинів порожнини, яка утво-

рюється при стисканні порожнини у формі еліпсоїда обертання з ексцентриситетом $e = 0,2$ в моменти часу $t = 0,89; 0,9; 0,902$. Велика вісь еліпсоїда перпендикулярна до напрямку сили тяжіння, а течія відбувається за умови, що $Fr = 4, We = 4$.

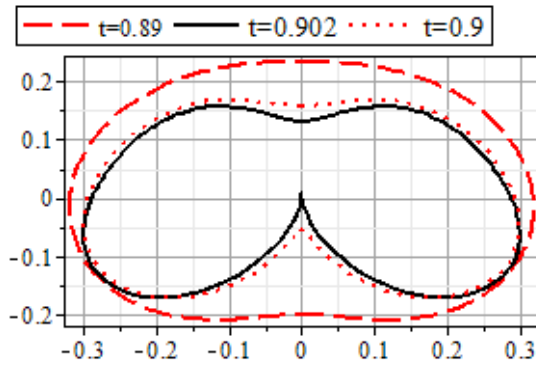


Рис. 1. Перетини при: $e=0.2$; $Fr=4$; $We=4$

Добре видно, що в моменти часу приблизно до $t = 0,6$ форма меридіонального перетину майже копіює форму еліпса.

Це пов'язане з тим, що в цьому часовому діапазоні процесу стискання дуже незначним виявляється впливання порожнини, яке є фактичним джерелом збурення від гравітації. Тим не менш уже в момент часу $t > 0,8$ форма перетину зовсім інша. Видно, що порожнина сплющується, зверху і знизу виникають впадини. При подальшому стисканні порожнини ($t > 0,89$) струмені знизу, які зумовлені гравітацією, ще більше проникають всередину порожнини. Проте це відбувається вже при досить великих збуреннях, за яких результати викладеної тут теорії можуть бути сумнівними і не відбивати реальної еволюції порожнини в цих діапазонах деформації. Треба також відзначити, що і вплив гравітації і вплив сили поверхневого натягу проявляються лише на останній стадії процесу стискання порожнини.

Список літератури

1. Brennen C.E. Fission of collapsing cavitation bubbles. J. Fluid Mech. 2002, v.472, pp.153-166.
2. Herman W.A.H.J. On the instability of the translating gas bubble under the influence of a pressure step. Philips Res. Repts Suppl.-1973.-N.3.-p.2-26.
3. Буйвол В.Н. Движение и деформация газонаполненных полостей в жидкости.// Сб. Прикл. гидромеханика.- Киев : Наук. думка, 1989. с.5-27.
4. Кнепп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф., Кавитация. – М.—: Мир, 1976. –688 с.
5. Буйвол В.М. Методи теорії збурень в течіях навколо порожнин. Вісник НАУ, №1, 1999, с. 233-237
6. Буйвол В.М. Сферичні порожнини в рідині. "Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики". Збірник матеріалів XVI Всеукр. наук. конф. Львів: вид. Львівського у-ту 2009, - с.39-40.

Статтю подано до редакції 28.05.2015