

АПРОКСИМАТИВНО-СПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ

Національний авіаційний університет

ian@nau.edu.ua

На прикладі дослідження однієї реалізації випадкового процесу продемонстровано підхід до аналізу випадкових процесів, який полягає у виділенні та дослідженні таких класифікаційних ознак як клас процесу, тип закону розподілу, вид детермінованої складової та її характер, ознака стаціонарності та ергодичності. Показано принципи визначення параметрів та аналітичних моделей таких імовірнісних характеристик стаціонарного випадкового процесу як кореляційної функції та спектральної щільності

Ключові слова: стаціонарний випадковий процес, реалізація, апроксимативно-спектральний аналіз, кореляційна функція, спектральна щільність, параметричні та непараметричні критерії стаціонарності, тренд, апроксимація, математична модель

Вступ

В теперішній час одним з основних напрямків удосконалення систем автоматичного управління (САУ) є підвищення точності управління і стабілізації технологічних параметрів в досить вузьких межах [5].

Важлива роль у вирішенні завдання підвищення точності управління відводиться вимірювальним підсистемам, що входять до складу САУ. Випадковий характер збурюючих впливів і управляючих величин припускає застосування процедури статистичної обробки результатів вимірювань, що обумовлює наявність таких складових похибки: статистична похибка, похибка з-за неадекватності алгоритму обробки реальному випадковому процесу. Остання зазвичай виникає через помилку класифікації спостережуваного процесу. Встановлення апріорі класу процесу багато в чому зумовлює алгоритм обробки результатів вимірювань і апаратні засоби.

В САУ необхідність класифікації випадкових процесів потрібна для опису його динаміки аналітичними моделями, прогнозування його майбутніх значень і вибору алгоритмів управління.

Класифікацію слід розглядати як необхідний попередній етап дослідження випадкових процесів з метою виявлення їх властивостей до проведення основної

статистичної обробки, тому в певному сенсі класифікація повинна відображати алгоритм аналізу спостережуваного процесу. Дана класифікація дає можливість оперативно перебудовувати в САУ вимірювальну процедуру, а також знання типу детермінованих складових процесу підвищує точність ідентифікації параметрів цих складових.

При проведенні досліджень складних об'єктів доводиться стикатися з необхідністю обробки великих масивів експериментальних даних випадкового характеру. Результатом статистичної обробки набору таких даних є оцінка їх імовірнісних характеристик та побудова аналітичних моделей досліджуваних процесів і їх характеристик. Особливо актуальними задачами для дослідження поведінки об'єктів в часовій і частотній областях є побудова таких аналітичних виразів імовірнісних характеристик сигналів як кореляційна функція та спектральна щільність. Знання цих характеристик дозволяє вирішувати задачі ідентифікації динамічних систем. Побудова моделей кореляційних функцій і спектральних щільностей потужності можуть бути здійснені при статистичній обробці з використанням апроксимативного підходу.

Постановка задачі

В роботі на прикладі дослідження однієї реалізації випадкового процесу

продемонстровано поширений підхід при класифікації випадкових процесів, який полягає у виділенні інформативних ознак. В якості класифікаційних ознак були обрані клас процесу (стаціонарний, нестаціонарний), тип закону розподілу, вид детермінованої складової та її характер, ознака ергодичності. Також у відповідності з отриманими класифікаційними ознаками реалізації сформовано аналітичні вирази, що як найточніше описують складові початкового часового ряду даних (випадкового процесу).

Основна частина

Реалізація часового ряду який досліджується у роботі графічно представлена на рис.1.

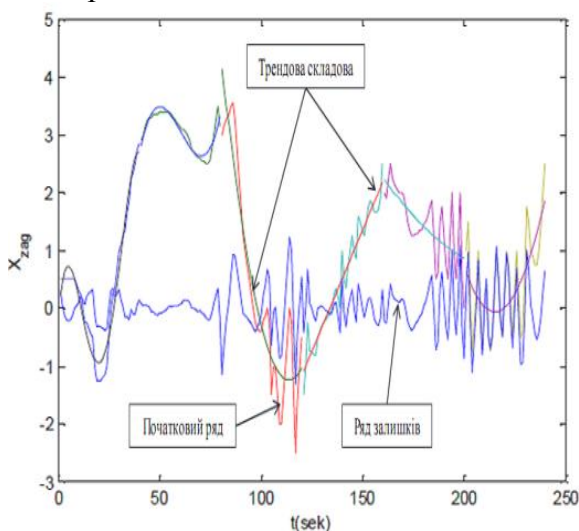


Рис.1. Графіки складових досліджуваного часового ряду

Перш ніж проводити подальші дослідження початковий ряд (рис. 1) був перевірений на відповідність нормальному закону розподілу застосуванням критерію узгодженості «хі-квадрат». Підтвердження гіпотези щодо нормальності закону розподілу ряду (рис. 2) дає можливість використати низку параметричних та непараметричних тестів (критеріїв) перевірки часового ряду на стаціонарність [2].

Випадковий процес $X(t)$ є стаціонарним, якщо його імовірнісні характеристики не залежать від часу.

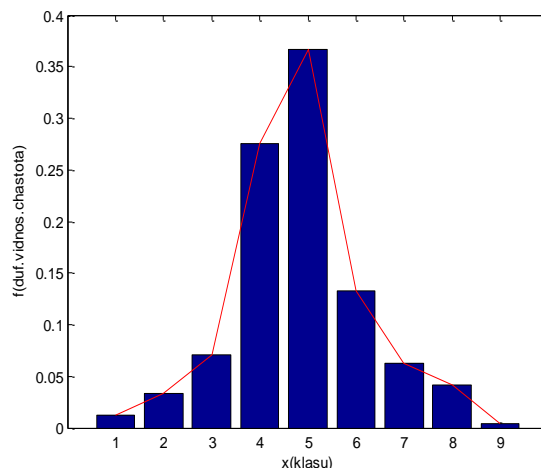


Рис. 2. Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу початкового ряду

Умовами стаціонарності випадкового процесу є: постійність математичного очікування $m_x(t) = m_x = const$ та дисперсії $D_x(t) = D_x = const$ процесу, а також залежність кореляційної функції від одного аргументу, яким є різниця між її аргументами $K_x(t, t + \tau) = k_x(\tau)$. Наявність певної тенденції розвитку процесу у часі, тобто деякої детермінованої складової – тренду, є свідченням нестаціонарності процесу.

Параметричні та непараметричні тести для перевірки стаціонарності часового ряду, були обрані тому що дозволяють шляхом нескладних математичних обчислень визначити наявність невідповідної складової – тренду, який описує одну зі складових динаміки часового ряду. До параметричних тестів відносяться наступні критерії перевірки:

- про постійність математичного очікування (t-критерій Стьюдента, F-критерій Фішера);

- про постійність дисперсії (F-критерій Фішера, критерій Кохрена)

До непараметричних тестів перевірки часового ряду відносяться:

- критерій серії за медіаною;
- критерій «зростаючих та спадаючих серій»;
- аналіз особливостей автокореляційної та часткової автокореляційної функцій.

Вище перераховані критерії [1, 3] були обчислені для початкового часового

ряду, отримані результати підтвердили його нестационарність (табл. 1), (рис. 3).

Таблиця 1. Результати виконання параметричних та непараметричних тестів для початкового ряду

Критерій	Стационарність/ не стационарність процесу
Параметричні тести	
t-критерій про постійність математичного очікування	Стационарний
F-критерій про постійність дисперсії	Нестационарний
F- критерій про постійність математичного очікування	Нестационарний
Критерій Кохрена про постійність дисперсії	Стационарний
Непараметричні тести	
Критерій серії за медіаною	Нестационарний
Критерій зростаючих та спадаючих серій»	Нестационарний
За АКФ	Нестационарний
За частковою АКФ	Нестационарний

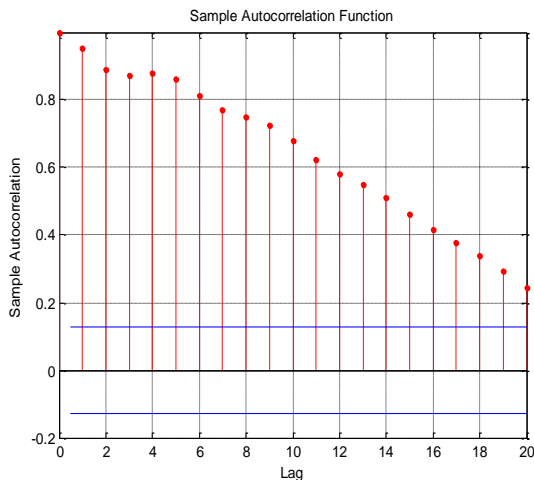


Рис. 3. Автокореляційна функція початкового часового ряду

З отриманої автокореляційної функції початкового часового ряду (рис.3) видно, що стовпці діаграми перевищують рівень «білого шуму» - границю статистичної значимості коефіцієнтів кореляції, що є свідченням внутрішньої кореляції елементів ряду тобто наявності детермінованої трендової складової у початковому часовому ряді та його нестационарності.

Характер та складність ряду початкових даних (рис. 1) свідчать про неможливість виконання ефективної глобальної апроксимації трендової складової ряду. Тому в роботі був застосований принцип точкової локальної апроксимації на базі методу найменших квадратів та методу ортогональних поліномів Чебишева [1, 3].

Для виділення трендової складової за допомогою вище вказаних методів, досліджуваний початковий ряд був розбитий на шість ділянок-інтервалів. Адекватні математичні моделі детермінованих складових кожного інтервалу, які якнайкраще описують локальні тренди, обиралися за розрахованими значеннями коефіцієнтів детермінації та статистик Дарбіна-Уотсона. Моделі найкращих трендів локальних ділянок за вказаних умов наведені у виразах (1-6), причому вони є ідентичними для двох вище вказаних апроксимативних методів:

$$X_1 = -2.75e^{-0.5*t^4} + 0.00236*t^3 - 0.0593*t^2 + 0.421*t - 0.171, \quad (1)$$

$$X_2 = 0.000197*t^3 - 0.0357*t^2 + 2.1*t - 36.7, \quad (2)$$

$$X_3 = 0.00504*t^2 - 1.15*t + 63.9, \quad (3)$$

$$X_4 = 0.0835*t - 11.2, \quad (4)$$

$$X_5 = -0.0346*t + 7.7, \quad (5)$$

$$X_6 = 0.0032*t^2 - 1.38*t + 148, \quad (6)$$

де t – аргумент часу від 0 до 40.

Графічний результат локальної апроксимації досліджуваного ряду зображений на рис.1.

Видалення трендової компоненти з початкового нестационарного ряду звільняє його від визначеної тенденції розвитку у часі та робить його майже однорідно змінним у часі, тобто надає вигляду неперервних випадкових коливань навколо середнього значення. Ряд випадкових залишків отримано обчисленням різниці рядів вигляду

$$E_t = X_t - \bar{X}_t, \quad (7)$$

де X_t – масив даних початкового ряду; \bar{X}_t – масив даних часового ряду що отримані за сформованими трендами (1-6).

Сформований ряд залишків (рис.1) аналогічно до початкового ряду перевірено за допомогою параметричних та непараметричних тестів стаціонарності. Результати виконаних тестів занесені до табл. 2. та наведені на рис.4.

Таблиця 2. Результати виконання параметричних та непараметричних тестів ряду випадкових залишків

Критерій	Стаціонарність/ не стаціонарність процесу
Параметричні тести	
t-критерій про постійність математичного очікування	Стаціонарний
F-критерій про постійність дисперсії	Стаціонарний
F- критерій про постійність математичного очікування	Стаціонарний
Критерій Кохрена про постійність дисперсії	Стаціонарний
Непараметричні тести	
Критерій серії за медіаною	Нетаціонарний
Критерій зростаючих та спадаючих серій»	Нстаціонарний
За АКФ	Стаціонарний
За частковою АКФ	Стаціонарний

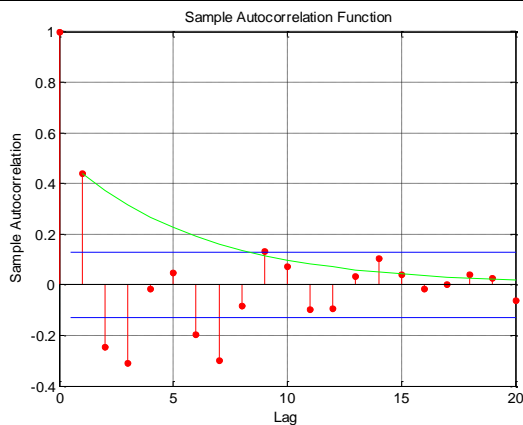


Рис. 4. Автокореляційна функція ряду випадкових залишків

З рис. 4 видно, що більшість отриманих числових значень не перевищують рівень довірчої ймовірності, тобто присутня лише слабка внутрішня кореляція. За приведених результатів можна вважати, що сформований ряд залишків не містить трендової складової та може вважатися стаціонарним.

Графічно сформований ряд випадкових стаціонарних залишків зображений на рис. 5.

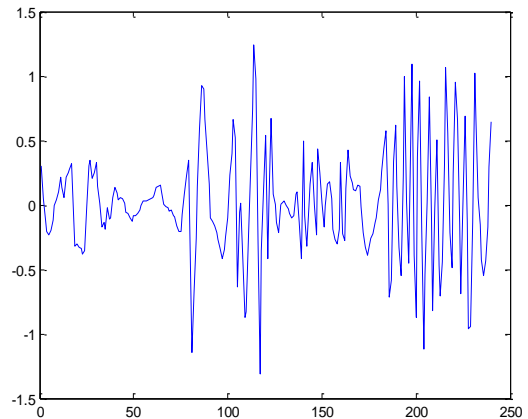


Рис.5. Графік ряду випадкових стаціонарних залишків

Більш повну інформацію про динамічні властивості процесу можна отримати по кореляційній функції. Типова кореляційна функція випадкового процесу є симетричною спадаючою функцією. Наявність коливальності кореляційної функції свідчить про періодичність випадкового процесу.

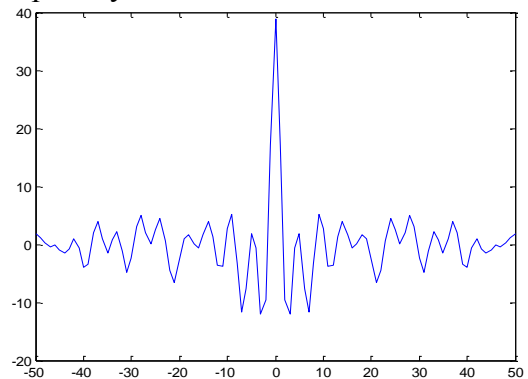


Рис. 6. Графік кореляційної функції сформованого ряду випадкових залишків

Стаціонарний, в широкому змісті, процес має кореляційну функцію, яка при необмеженому зростанні аргументу τ прямує до постійної величини, вказана умова чітко спостерігається у кореляційній функції досліджуваного ряду випадкових залишків, що є ще одним підтвердженням його стаціонарності Крім того кореляційна функція ряду випадкових залишків містить у своєму складі експоненту з від'ємним аргументом (рис. 4, рис. 6), що є свідченням ергодичності випадкового процесу.

Знання апіорі про ергодичність процесу значно спрощує алгоритмічне забезпечення інформаційно-вимірвальних та управляючих комплексів. Але в реальних умовах функціонування технологічних процесів та систем управління перевірити глобальну ергодичність процесу неможливо, й вона приймається як гіпотеза.

Отже, ряд випадкових залишків сформований з початкового за виразом (7) (рис. 5) не містить трендової складової, є випадковим стаціонарним ергодичним процесом.

Після того як було виконано оцінку класифікаційних ознак та здійснено попередню статистичну обробку початкового часового ряду, виникає необхідність переходу від набору числових даних до певного аналітичного виразу, що буде описувати досліджуваний процес та його складові частини.

Виходячи з проведених досліджень, початковий часовий ряд (рис. 1) являє собою суму детермінованої трендової складової, яка аналітично описується виразами (1-6), та випадкової стаціонарної ергодичної складової, яка може бути описана через імовірнісні характеристики. Особливо актуальними задачами для дослідження поведінки об'єктів в часовій і частотній областях є побудова таких аналітичних виразів імовірнісних характеристик сигналів як кореляційна функція та спектральна щільність. Знання цих характеристик дозволяє вирішувати задачі ідентифікації динамічних систем.

Побудова моделей кореляційних функцій і спектральних щільностей потужності можуть бути здійснені при статистичній обробці з використанням апроксимативного підходу. Сутність якого полягає у знаходженні відповідного аналітичного виразу $\varphi(x(t), a_0, a_1, \dots, a_n)$ імовірнісних характеристик стаціонарних сигналів з невідомими параметрами a_0, a_1, \dots, a_n , що задовольняють заданому критерію оптимальності та такого що описує отримані експериментальні результати [1].

Аналітична модель кореляційної функції отримана при розв'язанні задачі апроксимації кореляційної функції параметричними моделями виконанням наступних кроків: за апіорними даними та результатом побудованої кореляційної функції (рис. 6) досліджуваного процесу обрано апроксимативну (еталонну) модель кореляційної функції $\rho_a(\tau, a_1, \dots, a_n)$, експоненціально-косинусну, що описується наступним виразом [1]:

$$\rho(\tau, \alpha, \omega_0) = e^{-\alpha|\tau|} \cdot \cos \omega_0 \tau, \quad (9)$$

де τ – інтервал дискретизації; α – параметр затухання; ω_0 – частота коливання кореляційної функції. Даний вираз застосовується при апроксимації кореляційної функції недиференційованих процесів.

Невідомі параметри моделі шукаємо на базі методу найменших квадратів як такі що задовольняють мінімуму квадратичної похибки апроксимації вигляду [1]:

$$\Delta = \int_0^{\infty} \left[x(\tau) - \rho_a(\tau, a_1, \dots, a_n) \right]^2 dt. \quad (10)$$

Розв'язок системи рівнянь що реалізує умову мінімуму похибки Δ (10) можна виконати числовим методом, наприклад, шляхом вирішення двох трансцендентних рівнянь методом Ньютона, вигляду [1]:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - \frac{S_1 \cdot S_5 - S_2 \cdot S_4}{S_3 \cdot S_5 - S_4^2} \\ \omega_{n+1} = \omega_n - \frac{S_2 \cdot S_3 - S_1 \cdot S_4}{S_3 \cdot S_5 - S_4^2} \end{cases}, \quad (11)$$

де S_i - результати проміжних розрахунків за вказаним методом [1].

Аналогічні обчислення параметрів кореляційної функції (9) можна виконати застосувавши метод деформованого багатогранника для багатовимірної мінімізації цільової функції вигляду

$$f(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^{J_{\max}} \left[x(\tau_i) - \rho_a(\tau_i, a_1, \dots, a_n) \right]^2.$$

Аналітична модель спектральної щільності сигналу обирається завдяки наявності аналітичного зв'язку між кореля-

ційною функцією та спектральною щільністю потужності, основою якого є перетворення Вінера-Хінчина, відповідно процедури апроксимації характеристик є взаємозв'язаними. Обрана модель спектральної щільності відповідно до розрахованої експоненціально-косинусної моделі має вигляд [1]:

$$\frac{\sigma_x^2 \cdot \alpha}{\pi} \left\{ \frac{\alpha^2 + \omega^2 + \omega_0^2}{\omega^2 + (\omega - \omega_0)^2 [a^2 + (\omega + \omega_0)^2]} \right\} \quad (13)$$

Математична модель спектральної щільності сигналу також отримана шляхом виконання апроксимація за методом узагальнених логарифмічних-частотних характеристик, який базується на заміні ділянок спектральної щільності близькими по частотним характеристикам елементарними ланками, результати якої мають вигляд:

$$S_{xx} = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \left| \frac{T_1^2 s^2 + 2\zeta_1 T_1 + 1}{(T_2 s + 1) \cdot (T_3 s + 1) \cdot (T_4^2 s^2 + 2\zeta_2 T_4 + 1)} \right|^2 \quad (14)$$

де T_i – постійні часу ланок; ζ_i - дикрименти затухання ланок.

Графічне представлення результатів апроксимації спектральної щільності досліджуваного сигналу вказаними методами наведена на рис. 7.

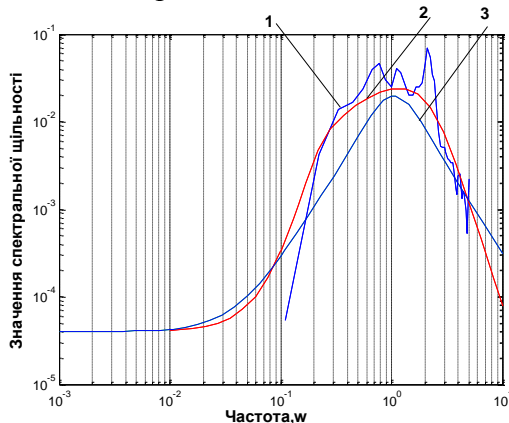


Рис. 7. Результат апроксимації спектральної щільності: 1- спектральна щільність ряду випадкових залишків; 2 – модель, отримана за методом узагальнених логарифмічних характеристик (14); 3 – модель, отримана за експоненціально-косинусною моделлю кореляційної функції (13)

Прикладним результатом роботи є представлення математичної моделі однієї реалізації досліджуваного часового ряду, що є нестационарним, у вигляді двох складових частин: детермінованої, модель

якої наведена у виразах (1)-6) та випадкової стаціонарної частини, модель якої являє собою спектральну щільність у вигляді (13) або (14).

Висновок

Проведені дослідження дозволили продемонструвати послідовність етапів аналізу випадкових процесів, запропонувати процедуру обробки випадкових процесів, а також розробити у подальшому алгоритм автоматичної класифікації за сукупністю ознак. Дана класифікація дає можливість оперативно перебудовувати в САУ вимірювальну процедуру, а також знання типу детермінованих складових процесу підвищує точність ідентифікації параметрів цих складових.

Знайдена математична модель часового ряду дає можливість досліднику здійснювати подальшу оптимізацію процесу, котрий описує певну реальну систему і оперувати вже не набором значень часового ряду, який зазвичай є громістким, а певною формулою що описує даний ряд.

Список літератури

1. Прохоров С.А. Прикладний аналіз випадкових процесів. – Самара, 2007. – 585с.
2. Новицький І.В. Випадкові процеси: Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НГУ, 2011. – 124с.
3. Сорока Л.І., Ковальчук І.В. Випадкові процеси: методичні рекомендації. – Луцьк: Східноєвропейський національний університет імені Лесі Українки, 2013. – 56с.
4. Коломієць С.В. Теорія випадкових процесів. – Суми: ДВНЗ «УАБС НБУ», 2011. – 80 с.
5. Іванов В.А., Медведєв В.С., Чемоданов Б.К., Ющенко А.С. Математичні основи теорії автоматичного управління. – Донецьк: МГТУ ім. Н.Е. БАУМАНА, 2006. – 325 с.