УДК 629.735.051:681.323(045)

Абрамович О.О., к.т.н.,
Хопило К.О.,
Мосула Н. Ю.

ЗНАХОДЖЕННЯ НУЛЬОВОГО ПРИБЛИЖЕННЯ МЕТОДОМ МОДАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ ТА РОЗШИРЕННЯ ОБЛАСТІ РОБАСТНОЇ СТІЙКОСТІ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ УПРАВЛІННЯ БІЧНИМ РУХОМ БЕЗПІЛОТНОГО ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТА

Національний авіаційний університет
katerina.khopylo@yandex.ru

Першим етапом синтезу робастних систем управління є визначення структури і початкових параметрів з погляду розміщення полюсів замкнутої системи в заданій області. В даному випадку для цього використовується метод модального управління, який дозволяє визначити параметри системи управління. У статті приведено алгоритм розрахунку визначення початкових наближень методом модального управління для дискретних динамічних систем при неповному вимірюванні змінних стану, на основі підходу, запропонованому в [1]. Наступним етапом синтезу робастних цифрових систем управління є процедура робастизації, тобто розширення області робастної стійкості цифрової системи управління об'єкта. Приведено приклад використання даного підходу для цифрової системи управління бічним рухом безпілотного літального апарату

Ключові слова: системи управління, робастність, робастна стійкість, цифрова система, безпілотний літальний апарат.

Вступ

Одним із перших етапів процедури синтезу систем управління є визначення нульового наближення, оскільки є випадки, коли синтезована система виходить за границі стійкості, а причина цього – невірно заданий початковий вектор параметрів системи.

Одним із методів за допомогою якого знаходиться нульове наближення є метод модального управління. Цей метод одержав широкий розвиток для задач синтезу автоматичних систем. Найбільш повно він розвинутий для випадків визначення статичного зворотного зв'язку при повному вимірюванні змінних стану по заданому розташуванню коренів характеристичного полінома [2].

У той же час визначення динамічного зворотного зв'язку при неповному вимірюванні змінних стану викликає значних труднощів.

Дана задача вирішена для неперервних систем у [1]. Дане дослідження є рішенням задачі модального управління для дискретних динамічних систем при неповному вимірюванні змінних стану.

Як показано в [3-4], розміщення полюсів всередині деякої області на комплексній площині, що обмежена коливальністю, запасом стійкості, максимальною смугою пропускання, гарантує високу якість та робастність системи.

Постановка задачі

Розглянемо задану одновимірну розімкнену систему, що складається з послідовного з'єднання виконавчого механізму й об'єкта:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned},$$

де $A \in R^{n\times n}, B \in R^{n\times 1}, C \in R^{\ell\times n}$.

Бажані власні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ замкненої системи створюють вектор:

$$\tilde{A} = \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p ,$$

де р - кількість полюсів замкнутої системи $p \le \min(n+q, q(\ell+1)+\ell)$, q-порядок регулятора.

Відомо, що визначення власних чисел завжди пов'язано з похибками, і рішення задачі безпосередньо для дискретних систем управління пов'язано зі значними труднощами, тому що власні числа обмежені малою областю (одиничним колом).

Для задач управління польотом полюса дискретних моделей, що відповідають низькочастотним модам поздовжнього і бічного рухів, розташовані досить близько до одиничного кола, тому похибки обчислень можуть зміщати їх у нестійку область.

Обчислювальні процедури модального управління для неперервних систем виявляються більш стійкими до похибок обчислень, оскільки їх полюси розміщуються у лівій півплощині і не мають жорсткого обмеження в розміщенні, що притаманне дискретним системам, оскільки їх полюси розміщені в дуже малій області (в одиничному колі). У зв'язку з цим будемо вирішувати задачу для неперервної системи згідно методу, запропонованому в [1], а далі перейдемо до дискретної системи, перетворивши неперервну за допомогою білінійного перетворення.

Знаходження нульового наближення методом модального управління

Передавальна функція об'єкта має вигляд:

$$G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B = \frac{1}{p(s)} N\begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \ldots s^q \end{bmatrix}^T, \qquad (1)$$

де I_n - одинична матриця розміром $n \times n$, N - матриця розміром $\ell \times n$, що формується коефіцієнтами чисельника матриці передатної функції об'єкта, $p(s)$- характеристичний поліном розімкнутої системи, що визначається:

$$p(s) = |sI_n - A| = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0 \qquad (2)$$

Припустимо, що регулятор має форму:

$$f' \; s \; = \frac{1}{p_f(s)}\begin{bmatrix} 1 & s & s^2 \cdots s^q \end{bmatrix} M \; ,$$

де $p_f(s)$ – характеристичний поліном регулятора, $M \in R^{\,q+1 \times \ell}$ - матриця, що формується коефіцієнтами чисельника матриці передатної функції регулятора.

Характеристичний поліном замкненої системи:

$$p_c(s) = s^{n+q} + \alpha_{n+q-1}s^{n+q-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

Задано вектор d - вектор різниць, що визначається поліномами замкненої $p_c(s)$ і розімкненої систем $p(s)$, тобто

$$d(s) = p_c(s) - p(s)s^q$$

Коефіцієнти полінома d представлені вектором:

$$d = \begin{bmatrix} \alpha_0 \ldots \alpha_{q-1} & \alpha_q - a_0 \ldots \alpha_{q+n-1} - a_{n-1} \end{bmatrix}^T,$$

де a - коефіцієнти полінома розімкненої системи, а α - коефіцієнти полінома замкненої системи. Запишемо рівняння у формі блочних матриць, що зв'язує об'єкт і регулятор:

$$d = Zf \qquad (3)$$

Матриця Z складається з коефіцієнтів характеристичного полінома розімкнутої системи (2) і з коефіцієнтів полінома чисельника матриці передатної функції N (1):

$$
Z = \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
a_0 & 0 & \cdots & 0 & n_{11} & 0 & \cdots & 0 & & n_{\ell 1} & 0 & \cdots & 0 \\
a_1 & a_0 & \cdots & 0 & n_{12} & n_{11} & \cdots & 0 & & & n_{\ell 1} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & a_0 & \vdots & \vdots & & n_{11} & & \vdots & \vdots & & n_{\ell 1} \\
a_{n-1} & a_{n-2} & & \vdots & n_{1\ell} & \vdots & & \vdots & \cdots & n_{\ell n} & \vdots & & \vdots \\
1 & a_{n-1} & & \vdots & 0 & n_{1\ell} & & \vdots & & 0 & n_{\ell n} & & \vdots \\
0 & 1 & & \vdots & \vdots & 0 & & \vdots & & \vdots & 0 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & a_{n-1} & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & & n_{1\ell} & & 0 & 0 & & n_{\ell n}
\end{array}\right] \tag{4}
$$

Вектор f є вектором шуканих величин, що складається з параметрів регулятора:

$$f = \; f_0 \ldots f_{q-1} \;\; m_{01} \;\; m_{11} \ldots m_{q1} \ldots$$
$$\ldots m_{0\ell} \;\; m_{1\ell} \ldots m_{q\ell} \;\;^{T}$$

Характеристичний поліном замкнутої системи визначається двома поліномами $p_d(s)$ і $p_e(s)$, де $p_d(s)$ - характеристичний поліном, визначений бажаними коренями замкнутої системи як

$$p_d(s) = \prod_{i=1}^{p}(s-\gamma_i) = s^p + \sum_{i=1}^{p} d_{p-i} s^{p-i}$$

і $p_e(s)$ - залишковий поліном:

$$p_e(s) = \frac{p_c(s)}{p_d(s)} = s^t + \sum_{i=1}^{t} e_{t-i} s^{t-i} \quad ,$$

де $t = n + q - p$.

Далі можемо записати

$$p_c(s) = p_d(s)\cdot p_e(s) =$$
$$= p_d(s)\cdot\left(s^t + \sum_{i=1}^{t} e_{t-i} s^{t-i}\right) =$$
$$= p_d(s)\cdot s^t + \sum_{i=1}^{t} p_d(s)\cdot e_{t-i} s^{t-i}$$

Визначимо різницевий поліном $d(s)$:

$$d(s) = p_c(s) - p(s)s^q =$$
$$= p_c(s)s^t - p(s)s^q + \sum_{i=1}^{t} p_d(s)\cdot e_{t-i} s^{t-i}$$

Звідси запишемо

$$d = d_0 + D_p e\,, \tag{5}$$

де d_0 - формується коефіцієнтами різниці $(p_d(s)s^t - p(s)s^q)$; e - вектор, який сформований невідомими коефіцієнтами e_i; а вектор D_p : $D_p = \; d_1 \;\; d_2 \;\; \ldots \;\; d_t$ визначається коефіцієнтами d_i полінома $p_d(s)s^{t-i}$.

Враховуючи (5) і (3) можна записати

$$d_0 + D_p e = Zf \;. \tag{6}$$

Розділимо вектор f на дві складові

$$f = \; f_1 \quad f_2 \;^{T}, \tag{7}$$

де f_2 складається з p елементів, і f_1 складається з $q(\ell+1)+\ell-p$ вільних елементів. Відповідно до (7) розкладемо Z

$$Z = \; Z_1 \quad Z_2 \tag{8}$$

Враховуючи (6)-(8) запишемо:

$$d_0 + D_p e = \; Z_1 \quad Z_2 \;\cdot\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}.$$

Звідси

$$\underbrace{d_0 - Z_1 f_1}_{=\hat{d}} = Z_2 f_2 - D_p e = \underbrace{\begin{bmatrix} Z_2 & -D_p \end{bmatrix}}_{=\hat{X}}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix} f_2 \\ e \end{bmatrix}}_{=\hat{f}}$$

$$\hat{d} = \hat{X}\hat{f} \tag{9}$$

Шуканий вектор параметрів регулятора визначається з виразу (9):

$$\hat{f} = \hat{X}^{-1}\hat{d} \tag{10}$$

Як показано в [5], розміщення полюсів усередині деякої області на комплексній площині, що обмежується коливальністю, запасом стійкості, максимальною смугою пропущення системи гарантує високу якість і робастність системи.

Рівняння (10) є рішенням для неперервної системи. Вектор f фактично визначає параметри неперервного регулятора $F(s)$ заданої структури. Якщо зробити заміну змінних за допомогою білінійного перетворення, то можна розглядати неперервну систему як дискретну. Для перетворення використовується підстановка

$$z = \frac{1+s}{1-s}.$$

Виконавши білінійне перетворення визначаємо параметри дискретного регулятора $F(z)$. Отриману замкнену систему (у прямому зв'язку – номінальний об'єкт, а в зворотному зв'язку знаходиться отриманий регулятор) необхідно перевірити на стійкість. Відомо, що дискретна система буде стійкою, якщо корені її характеристичного рівняння будуть знаходитись в колі з одиничним радіусом.

Як приклад рішення задачі модального управління розглянемо дискретну систему управління бічним каналом БПЛА.

На вхід регулятора бічного каналу надходять сигнали від датчиків кутів крену ϕ, рискання ψ і кутових швидкостей за креном крену p та рисканням r.

Номінальну модель бічного каналу малого безпілотного літального апарату, яка розрахована при істинній повітряній швидкості 250 км/год , має вигляд [6]:

$$\mathbf{Ao} = \begin{bmatrix} -0.136 & 0.1403 & 10^{-4} & -0.9986 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.003 & 0 & 0 & 0 \\ -56.21 & 0 & -11.25 & 3.332 & 0 & 0 \\ 1.190 & 0 & -0.210 & -0.240 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \end{bmatrix}, \mathbf{Bo} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

Відповідно збурена модель бічного каналу малого безпілотного літального апарату, яка розрахована при істинній повітряній швидкості 200 км/год , має вигляд [6]:

$$\mathbf{Aop} = \begin{bmatrix} -0.109 & 0.1754 & 10^{-4} & -0.9988 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.003 & 0 & 0 & 0 \\ -36.2778 & 0 & -9.195 & 2.802 & 0 & 0 \\ 0.8611 & 0 & -0.173 & -0.185 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & \end{bmatrix}, \mathbf{Bop} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 103.62 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

Матриця реальних вимірювань C є такою:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матриця D є нульовою матрицею відповідної розмірності.

Бажані власні числа номінальної замкненої системи для дискретного випадку:

$$\tilde{A} = 0{,}85; \quad 0{,}87 \pm 0{,}5j; \quad 0.28 \pm 0.05j;$$
$$0.93; \quad 0.96; \quad 0.965$$

В зв'язку з тим, що бажані власні числа замкненої системи знаходяться досить близько до кола з одиничним радіусом, то розрахунок динамічного зворотного зв'язку безпосередньо по вищевказаному алгоритму приводить до зміщення одного-двох полюсів за границі одиничного кола. Тому задача вирішується для неперервної системи, перетворивши за допомогою білінійного перетворення дискретну систему в неперервну.

Бажані власні числа неперервної замкненої системи були отримані за допомогою білінійного перетворення вектора власних чисел номінальної замкненої дискретної системи:

$$\tilde{A}_1 = \; -20; \quad -2,7 \pm 4,5\,j; \quad -0.28 \pm 2.5\,j;$$
$$-0.03; \quad -0.0023; \quad -0.0015$$

У відповідності з (4) формуємо матрицю Z:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 0 \\ 29 & 320 & 0 & 0 \\ 45 & 120 & -67 & 0 \\ 68 & 390 & -9 & -67 \\ 2 & 0 & 53 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 53 \end{bmatrix}$$

Із рівняння (5) маємо:

$$d_0 = \; 0 \quad 20 \quad 119 \quad 731 \quad 1184$$
$$3500 \quad 117 \quad 0.4 \quad 0.0003 \;^{T},$$

$$D_p = \; 1 \quad 26 \quad 157 \quad 791 \quad 1188$$
$$3503 \quad 118 \quad 0.45 \quad 0.00035 \;^{T}$$

Вектор параметрів регулятора у відповідності з (9) отримаємо:

$$\hat{f} = \; -1 \quad -0.62 \quad 0.001 \quad 0.02 \quad 0.07$$
$$0.014 \quad 0.16 \quad -0.08 \quad -2 \;^{T}$$

Якщо зробити заміну змінних за допомогою білінійного перетворення, то можна отримати з неперервної системи дискретну.

Відомо, що дискретна система буде стійкою, якщо корні характеристичного рівняння знаходяться в колі одиничного радіуса.

Після виконання всіх розрахунків по вищевказаному алгоритмі, отримали аналоговий регулятор:

$$F(s) = \left[\frac{-0.6s^2 - 0.38s}{300s^2 + 500.6s + 1} \quad \frac{0.014s^2 + 0.047s + 0.015}{300s^2 + 500.6s + 1} \quad \frac{0.097s^2 - 0.05s - 2}{300s^2 + 500.6s + 1} \right] \tag{11}$$

Перетворивши (11) за допомогою білінійного перетворення, отримаємо цифровий регулятор:

$$F(z) = \left[\frac{-0.002z^2 + 0.004z - 0.002}{z^2 - 1.961z + 0.9608} \quad \frac{0.00005z^2 - 0.0001z - 0.00005}{z^2 - 1.961z + 0.9608} \quad \frac{0.0003z^2 - 0.0006z + 0.0003}{z^2 - 1.961z + 0.9608} \right]$$

Замкнена система стійка, оскільки всі корні характеристичного рівняння знаходяться в колі одиничного радіуса.

Для отриманої дискретної системи пораховано $Í_{\infty}$ – норму (функція комплементарної чутливості, що є мірою робастності):

$$Í_{\infty} = 1,09\,.$$

Мале значення $Í_{\infty}$ – норми характерне для досить високої робастності системи.

Такий результат є самостійним рішенням, проте, в подальшому його можна покращити за допомогою робастної параметричної оптимізації.

Наступним кроком синтезу системи управління є розширення області робастної стійкості ЦСУ.

Розширення області робастної стійкості цифрової системи управління безпілотного літального апарату.

Якщо структурна та параметрична оптимізація якості системи автоматичного управління польотом виконана для деякого номінального об'єкта, це може призвести до різкого погіршення якості системи і навіть до втрати її стійкості під час зміни парамет рів об'єкта за умови дії параметричних збурень. Тому забезпечення робастності систем управління польотом є однією з головних вимог до функціонування системи управління польотом.

Даний дискретний регулятор $F(z)$ отриманий для номінального об'єкта. Номінальна система буде стійкою, оскільки корені її характеристичного рівняння будуть знаходитись в колі з одиничним радіусом. При такому регуляторі параметрично збурена модель системи може бути стійкою, а може бути й не нестійкою. Виникає задача розширення області стійкості [7], яка повинна охоплювати власні числа параметрично збуреної замкненої системи.

Для того, щоб вирішити дану задачу необхідно виконати процедуру параметричної робастної оптимізації. У процесі виконання процедури параметричної оптимізації робастних систем, з одного боку, досягається компромісне настроювання для збуреної й номінальної моделей та підбираються коефіцієнти, що задовольняють обидві системи .

З другого боку, всі коефіцієнти разом характеризують співвідношення між якістю (точністю) і робастністю системи. Тому збільшення коефіцієнта, відповідального за якість системи, веде до погіршення робастності і навпаки. При цьому обираються параметри, що забезпечують досягнення оптимального компромісу між якістю та робастністю системи за умови відшукання зазначених показників у деяких наперед заданих межах. Вектором початкових значень для виконання процедури оптимізації є знайдений в (10) вектор початкових параметрів регулятора. Після знаходження вектора початкових значень параметрів виконується процедура оптимізації, яка в даному випадку базується на методі Нелдера-Міда.

Складний показник якості, що мінімізується в ході виконання оптимізаційної процедури, має вигляд:

$$J_\Sigma = \lambda_\infty^n \cdot T_\infty^n + PF ,$$

а оптимальний вектор параметрів настройки регулятора визначається як результат виконання процедури оптимізації:

$$\overrightarrow{X}^* = \arg\min J_\Sigma(\overrightarrow{X}) , \quad \overrightarrow{X} \in M_c ,$$

де M_c - область стійкості в просторі параметрів регулятора, що визначається областю М.

Мінімізуючи H_∞-норму, в системі досягається максимальна робастність. Завдяки цьому збурена система буде лишатись стійкою.

Отриманий після виконання процедури оптимізації оптимальний регулятор повинен задовольняти умовам робастної стійкості як для номінальної, так і для параметрично збуреної систем управління.

Як приклад рішення задачі розширення області робастної стійкості розглянемо дискретну систему управління бічним каналом БПЛА.

Після знаходження вектора початкових значень параметрів виконується процедура оптимізації, яка в даному випадку базується на методі Нелдера-Міда [8].

В ході виконання оптимізаційної процедури оптимальний вектор параметрів регулятора (9) прийме значення:

$$\hat{f} = -7.7 \ \ -0.61 \ \ -0.03 \ \ -0.48 \ \ -2.5$$
$$-2.7 \ \ -1 .6 \ \ -0.0014 \ \ -0.0019 \ ^T ,$$

а дискретний регулятор $F(z)$:

$$F(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{-0.015z^2 + 0.03z - 0.015}{z^2 - 1.977z + 0.9773} \\ \dfrac{-0.001z^2 + 0.0019z - 0.00088}{z^2 - 1.977z + 0.9773} \\ \dfrac{-0.003z^2 + 0.0061z - 0.003}{z^2 - 1.977z + 0.9773} \end{bmatrix}^T$$

Для отриманої дискретної системи визначено $Í_\infty -$ норма, значення якої приведено в таблиці 1.

Табл.1. Чисельні характеристики номінальної та збуреної систем

Об'єкт	**H∞**
Номінальний.	0,7071
Збурений	0,7116

Висновок

В результаті знаходження нульового приближення вектора початкових значень параметрів регулятора методом модального управління та розширення області робастної стійкості цифрової системи управління бічним каналом безпілотного літального апарата отримано модель системи, для якої кількісно оцінено міру робастності.

Отримані значення H_∞ – норми, розраховані для номінальної та параметрично збуреної моделей замкненої системи мають невеликі розбіжності, що є цілком допустимим з точки зору функціонування системи в цілому. Мале значення H_∞ – норми засвідчує високий рівень робастності системи.

Такий результат є самостійним рішенням, проте, в подальшому його можна покращити за допомогою робастної параметричної оптимізації.

Список літератури

1. M.T. Soylemez., N. Munro. A Parametric Solution to the Pole Assignment Problem Using Dynamic Output-Feedback. IEEE Trans. on Automatic Control. 2001, May. Vol. 46, N.5, p.p. 711-723.
2. E.de Paiva, Carvalho J.R., Ferreira P.A. An H_2/H_∞ PID Heading Controller for AURORA-1 Semi-Autonomous Robotic Airship//Proceedings of AIAA 14th Lighter-Than-Air Technical Committee Convention and Exhibition.- Akron, USA.-Session 2.-2001.-P.21-27.
3. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory.- Boyd S., Chaoui L.El., Peron E. Balakrishnan V. - Philadelphia, PA:SIAM.-1994.-193p.
4. Ackermann J. Parameter Space Design of Robust Control Systems//IEEE Trans. on Automatic Control.-1980.-Dec.-Vol. AC-25.- №6.-P. 1058 – 1072.
5. Филипс Ч., Харбор Р. Системы управления с обратной связью.-М.: Лаборатория базовых знаний.- 2001.-615 с.
6. Skogestad S. , Postlethwaite I. . Multivariable Feedback Control. Analysis and Design.-John Wiley & Sons.- 1997.- 559 p.
7. Евтушенко В.Н., Туник А.А. Повышение робастности регуляторов для дискретных систем с высокой степенью астатизма// Проблемы авионики. – К.:КМУЦА, 1997.-С.181-186.
8. Банди Б. Методы оптимизации. Вводный курс.-1988. - М.: Радио и связь.-128 с.

Статтю подано до редакції 29.04.2015