УДК 681.372

Ігнатов В.О., д. т. н.,
Гузій М.М., к. т. н.,
Ладигіна О.А.

СТАТИСТИЧНА ОПТИМІЗАЦІЯ ОБСЛУГОВУВАННЯ ТРАФІКА В ГЕТЕРОГЕННИХ ІНФОКОМУНІКАЦІЙНИХ МЕРЕЖАХ

Національний авіаційний університет
nn05@ukr.net

Розроблені стохастичні моделі оптимізації обслуговування трафіка в гетерогенних інфокомунікаційних мережах

Ключові слова: трафік, інфокомунікаційна мережа, оптимізація

Вступ

Оптимізація обслуговування трафіка багатоканальною системою у припущені, що усі канали системи мають ідентичні характеристики і однакову пропускну здатність, достатньо досліджена, має практичне застосування. Проте ці припущення для гетерогенних інфокомунікаційних мереж, що складаються з неоднорідних телекомунікаційних і комп'ютерних мереж, не завжди відповідає дійсності.

Наприклад, в телекомунікаційних мережах мобільного зв'язку застосовують одночасно кабельні, оптоволоконні і радіорелейні лінії зв'язку, вони мають суттєво різні технічні характеристики. Тому актуальною є задача визначення реалізацій оптимального розподілу пропускних здатностей систем в гетерогенних інфокомунікаційних мережах з урахуванням неоднорідності систем, а також і обмежень, що мають місце на практиці.

Мета

У зв'язку з цим метою дослідження є обґрунтування і розробка математичних стохастичних моделей глобальних критеріїв оптимальності обслуговування трафіку гетерогенними інфокомунікаційними мережами, що включають системи з різними принципами дії та технічними характеристиками.

Постановка задачі

Постановка задачі статистичної оптимізації обслуговування трафіку в неоднорідних мережах є задачами стохастичного пошуку реалізацій оптимального розподілу пропускних здатностей систем гетерогенних інфокомунікаційних мереж з урахуванням їх особливостей і реально існуючих обмежень на умови розв'язання задач оптимізації.

Для досягнення мети необхідно виконати:

- обґрунтування стохастичних критеріїв оптимальності і обмежень;
- розроблення математичних моделей критеріїв оптимальності і обмежень;
- розв'язання задач оптимізації розподілу реалізацій пропускних здатностей систем гетерогенних інфокомунікаційних мереж;
- аналіз отриманих оптимальних рішень і формулювання певних висновків по результатам аналізу.

Основним методом розв'язання задач оптимізації обрано метод невизначених множників Лагранжа. Як відомо, цей метод дозволяє розв'язувати нелінійні задачі математичного програмування і враховувати обмеження на допустимі значення керованих змінних. Суттєвою є та обставина, що стохастичні нелінійні задачі оптимізації не мають рішень у загальному вигляді. Вони мають наближені рішення тільки для реалізацій випадкових параметрів.

Для розв'язання задачі пошуку оптимального рішення для багатосистемної гетерогенної інфокомунікаційних мереж зв'язку з різними технічними характеристиками систем виберемо стохастичні критерії оптимальності у вигляді сепарабельної адитивної функції вагових коефіцієнтів q_i, $i=1,...,N,$ визначальних параметрів стану систем a_i і b_i, пропускних здатностей систем C_i як керованих змінних:

$$D_N(q_i,n_i,N_s,a_i,b_i,C_i)=\sum_{i=1}^{Ns}q_iD_i= \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{Ns}q_i\left|P_i(n_i\geq N_i)a_ic_i^{-1}+P_i(n_i<N_i)b_ic_i\right|,$$

де Ns – загальне число різнорідних систем обслуговування трафіку в гетерогенній інфокомунікаційній мережі, $i = 1, Ns;$ Di – локальний критерій оптимізації для i – ої системи, $q_i = D_i/\Sigma_{i=1}^{N} D_{i_i}$ - ваговий коефіцієнт i-ої системи обслуговування.

В обраній моделі критерію оптимальності (1) вагові коефіцієнти повинні відповідати двом основним умовам: умові позитивності та умові нормування

Як показано в роботі [1], використання різних за змістом вагових коефіцієнтів q_i дозволяє враховувати багато принципових відмінностей в техніко-економічних характеристиках систем гетерогенних інфокомунікаційних мереж або видів їх трафіку.

Очевидно, що для обмежень можна виконувати класифікацію за певними ознаками. Для цього зручно представити обмеження в узагальненому вигляді:

$$C_N=\sum_{i=1}^{N}g_iC_i,\ . \tag{2}$$

де вагові коефіцієнти $g_i,\ i=1,N,$ обираються в залежності від діючого реально класу обмеження.

Розглянемо найбільш суттєві класи обмежень (Limitations L1-L6):

L1. Всі коефіцієнти однакові

$$g_{i1}=1,\ i=1,N,$$

тоді обмеження накладається на загальну сумарну пропускну здатність усіх систем інфокомукаційної мережі

$$\sum_{i=1}^{N}C_i\geq C_N^*,$$

де C_N^* – необхідне значення інтегральної пропускної здатності мережі.

L2. Обмеження накладається на загальну щорічну вартість обслуговування систем мережі, тоді

$$g_{i2}=b_i,\ i=1,N,$$

$$\sum_{i=1}^{N}b_iC_i\leq D_N^*,$$

де D_N^* – допустима загальна щорічна вартість обслуговування мережі.

L3. Обмеження враховує витрати, що обумовлені відмовами в обслуговуванні пакетів даних в мережі, тоді

$$g_{i3}=q_{i1},\quad i=1,N,\quad \sum_{i=1}^{N}g_{i3}=1.$$

L4. Обмеження враховує витрати на одиницю пропускної здатності системи, тоді

$$g_{i4}=q_{i2},\ i=1,N,$$

L5. Обмеження враховує коефіцієнти варіації тривалості обслуговування, тоді

$$g_{i5}=q_{i3},\quad i=1,N,$$

L6. Обмеження враховує максимальні значення математичного сподівання сумарних витрат, тоді

$$g_{i6}=q_{i4},.$$

Як і класифікація критеріїв, класифікація обмежень також не є вичерпною. Наприклад, обмеження може враховувати пріоритети трафіку по каналах, тоді

$$g_{i7}=q_{i5},\quad i=1,N,$$

Крім того, може діяти не одне, а декілька обмежень. Наприклад може бути одночасно два обмеження: L1 і L2.

Основна вимога для задач оптимізації з обмеженнями: загальне число обмежень не повинно дорівнюватися або бути більше числа керованих змінних.

Загальна постановка прямої задачі пошуку оптимального розподілу реалізацій пропускних здатностей систем в гетерогенній інфокомунікаційній мережі, має такий вигляд: необхідно знайти оптимальний розподіл реалізацій пропускних здатностей систем мережі

$$C_{i\ opt} = \arg \min_{C_i} D_N(C_i), \quad i = 1,..., N, \quad (3)$$

за умови, що виконується нерівність

$$C_N = \sum_{i=1}^{N} g_i C_i \geq G_N^*, \quad (4)$$

де C_N^* – необхідне значення середньої пропускної здатності систем мережі.

Для розв'язання цієї нелінійної задачі оптимізації складається допоміжна функція Лагранжа виду

$$L(a_i, b_i, C_i, \lambda) = \sum_{i=1}^{N} q_i (a_i C_i^{-1} + b_i C_i) + \lambda \left[C_N^* - \sum_{i=1}^{N} g_i C_i + \nu^2 \right],$$

де λ – допоміжний множник Лагранжа, ν - допоміжна змінна, яка вводиться у тому випадку, коли (4) задано у вигляді нерівності.

Для пошуку оптимального розподілу реалізацій $C_{i\ opt}$, $i = 1,..., N,$ пропускних здатностей складових гетерогенної інфокомунікаційної мережі розв'язується система нелінійних рівнянь оптимізації

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(a_i, b_i, C_i, \lambda, q_i, g_i)}{\partial C_i} = 0, \ i = 1,..., N, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \nu} = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Оптимальний розподіл реалізацій $C_{i\ opt}$, що отримується з розв'язання системи (5) забезпечує мінімальне значення $D_{\min}(C_{i\ opt})$ при дотриманні обмеження (5).

Допоміжний множник Лагранжа

$$\lambda = \frac{\partial D_{\min}(C_{i\ opt})}{\partial C_N^*}$$

показує, як змінюється приріст значення $D_{\min}(C_{i\ opt})$ в залежності від приросту значення C_N^* обмеження.

Приклад 1. Припустимо, що $N = 2$. Виконаємо пошук оптимального розподілу пропускних здатностей C_1, C_2 двох різних систем мережі.

1. Допоміжна функція Лагранжа має вигляд

$$L(a_1, a_2; b_1, b_2; C_1, C_2; q_1, q_2; g_1, g_2; \lambda) =$$
$$= \sum_{i=1}^{2} q_i (a_i C_i^{-1} + b_i C_i) + \lambda \left[C_2^* - \sum_{i=1}^{2} g_i C_i - \nu^2 \right] \quad (6)$$

2. Реалізація системи рівнянь оптимізації (5) при $N = 2$ має вигляд

$$\begin{cases} q_1 b_1 - \dfrac{q_1 a_1}{C_1^2} - \lambda g_1 = 0, \\ q_2 b_2 - \dfrac{q_2 a_2}{C_2^2} - \lambda g_2 = 0, \\ g_1 C_1 + g_2 C_2 - \nu^2 = C_2^*, \\ 2\lambda\nu = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Система оптимізації керованих змінних є нелінійною алгебраїчною системою, знайти точне аналітичне рішення якої у загальному випадку неможливо, необхідно застосовувати наближені методи чисельного розв'язання рівнянь оптимізації цієї системи для реалізацій випадкових параметрів. Для отримання потрібної точності оптимальних оцінок рішення необхідно вибирати певний обсяг вибірок.

Скористуємося методом Ньютона і побудуємо відповідну ітераційну процедуру пошуку оптимального рішення. Припустимо, що обмеження має вигляд рівняння, тоді останнє рівняння в (7) відсутнє і систему рівнянь зручно представити у такому вигляді

$$\frac{q_1 a_1}{C_1^2} = q_1 b_1 - \lambda g_1, \qquad \frac{q_2 a_2}{C_2^2} = q_2 b_2 - \lambda g_2,$$
$$g_1 C_1 + g_2 C_2 = C_2^* \quad (8)$$

Для з'ясування логічного смислу допоміжного множника Лагранжа λ, складемо перші два рівняння системи (8) і визначимо значення λ через інші керовані змінні, отримаємо

$$\lambda = q_1 b_1 + q_2 b_2 - \left(\frac{a_1 q_1}{C_1^2} + \frac{a_2 q_2}{C_2^2} \right) = b_0 - b_0(C_1, C_2). \quad (9)$$

Аналізуючи співвідношення (9), можна зробити висновок, що множник λ представляє собою відхилення від середнього значення b_0 витрат $b_0(C_1, C_2)$, які мають місце при оптимальних значеннях пропускних здатностей каналів.

Для допоміжної функції Лагранжу (6) цей результат можна узагальнити

$$\lambda_N = \sum_{i=1}^{N} q_i b_i - \sum_{i=1}^{N} q_i \frac{a_i}{C_i^2} = b_{0N} - b_0(C_1, C_N)$$

Допоміжний множник Лагранжа коригує мінімальні значення математичного сподівання сумарних витрат на функціонування N – системної інфокомунікаційної мережі в залежності від параметрів b_i, $b_i(C_i)$, q_i, g_i, а також керованих змінних C_i, $i = 1,..., N$.

Приклад 2. Покажемо ітераційну процедуру пошуку оптимального рішення $C_{i\ opt}$, $i = 1,2,$ для нелінійної системи рівнянь оптимізації (7).

Алгоритм пошуку включає наступні кроки:

1. Вводяться позначення

$$f_i(C_{i\ opt}) = q_i b_i - \lambda g_i \qquad f_i(C_i) = q_i \frac{a_i}{C_i^2}$$

2. Нелінійна функція розкладається в ряд Тейлора

$$f_i(C_i, C_{i0}) = f_i(C_{i0}) + \frac{df_i(C_{i0})}{dC_i}(C_i - C_{i0}),$$

Знаходиться похідна функції

$$f_i'(C_{i0}) = -2q_i \frac{a_i}{C_{i0}^3}$$

3. Визначається значення C_i на $K+1$ ітерації

$$C_{i,K+1} = C_{iK} + \frac{f_i(C_{iK}) - f_i(C_{i opt})}{f_i'(C_{iK})} = C_{iK} + \frac{q_i b_i - \lambda g_i}{-2q_i a_i} C_{i,K-1}^3$$

4. Початкове значення C_{i0} для C_i в ітераційній процедурі зручно обирати як оптимальне значення $C_{i\ opt} = \sqrt{a_i / b_i}$ для i – ої системи мережі, тоді

$$f_i'(C_{10}) = -\frac{2a_1 q_1}{C_{10}^3} = -2\frac{q_1 b_1}{\sqrt{a_1 / b_1}}.$$

5. Перше значення оптимальної пропускної здатності i –ої системи

$$C_{i,1} = C_{i,0} - \frac{q_1 b_1 - \lambda g_1}{2q_1 b_1}\sqrt{\frac{a_1}{b_1}} \approx C_{10}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\lambda g_1}{q_1 b_1}\right)$$

6. Визначимо λ із першого рівняння, отримаємо на першому кроці ітераційної процедури

$$\lambda_1 = 2\frac{C_1 - C_{10}}{C_{10}}\frac{q_1}{C_1} b_1$$

7. Остаточно отримаємо співвідношення, що зв'язує значення $C_{1\ opt}$ на нульовій і першій ітераціях

$$C_{1\ opt,1} = \left[C^* - g_2 C_{20}\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\frac{g_2}{g_1}\frac{b_1}{b_2}\right)\right] \Big/ \left[1 - g_2\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\frac{g_2}{g_1}\frac{b_1}{b_2}\frac{C_{20}}{C_{10}}\right)\right]$$

8. Аналогічно, враховуючі третє рівняння, отримаємо, що

$$C_{2\ opt,1} = \frac{C^* - g_1 C_{1\ opt,1}}{g_2} = \frac{1}{g_2}\left\{ C^* - g_1\left[\frac{C^* - g_2 C_{20}\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\frac{g_2}{g_1}\frac{b_1}{b_2}\right)}{1 - g_2\left(1 - \frac{q_1}{q_2}\frac{g_2}{g_1}\frac{b_1}{b_2}\frac{C_{20}}{C_{10}}\right)}\right]\right\}$$

9. Для визначення λ_1 використаємо $C_{1\ opt,1}$, . і отримаємо усі три необхідні для організації ітераційної процедури.

Висновки

Основні результати дослідження.

1. Обгрунтовані критерії оптимальності і обмеження в прямій постановці задачі оптимізації розподілу реалізацій пропускних здатностей систем гетерогенних інфокомунікаційних мереж.

2. Розроблені математичні моделі для критеріїв оптимальності і обмежень, виконана класифікація обмежень задач оптимізації за ознаками вибору значення вагових коефіцієнтів.

3. Визначено логічний зміст значення невизначеного множника Лагранжа. Наведені приклади, що ілюструють особливості застосування методу Ньютона для отримання реалізацій оптимальних рішень нелінійних задач оптимізації з обмеженнями.

Список літератури

1. Игнатов В.А., Минаев Ю.Н., Гузий Н.Н. Аксиоматическая теория математического моделирования критериев оптимальности и ограничений. Науково-технічний журнал "Захист інформації" №4, 2004. – С. 47-56

Статтю подано до редакції 19.03.2015